Educación General Básica - Subnivel Superior

MATEMÁTICA

9.º Grado

GUÍA DEL DOCENTE

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA

Ministerio de Educación

Transformar la educación
MISIÓN DE TODOS

Matemática 9

GUÍA DEL DOCENTE

sm

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

Viceministro de Educación
Freddy Peñafiel Larrea

Viceministra de Gestión Educativa
Daysi Valentina Rivadeneira Zambrano

Subsecretario de Fundamentos Educativos (E)
Miguel Ángel Herrera Pavo

Subsecretaria de Administración Escolar
Mirian Maribel Guerrero Segovia

Directora Nacional de Currículo (S)
María Cristina Espinosa Salas

Directora Nacional de Operaciones y Logística
Ada Leonora Chamorro Vásquez

Av. Amazonas N34-451 y Atahualpa
Quito, Ecuador
www.educacion.gob.ec

Ministerio de Educación

Matemática 9

PROYECTO LICITACIÓN MINISTERIO DE EDUCACIÓN, ECUADOR 2016

Dirección de contenidos editoriales Ecuador
María Alexandra Prócel Alarcón

Creación de contenidos
Jefferson Humberto Domínguez Estévez

Conceptualización del proyecto para el área
Luis Humberto Buitrón Aguas

Diseño y diagramación
Luis Fernando Hernández Castro

Corrección de estilo
Yoanna Pedraye Soto

Fotografía
Archivo SM Ediciones Ecuador, Archivo SM Ediciones Colombia, Shutterstock

Ilustración
Roger Icaza L, Gisela Bohórquez, Mónica Medina

Impreso en Ecuador
Primera impresión: agosto 2016

ADVERTENCIA
Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.

Índice

Índice

El nuevo currículo ecuatoriano

Perfil de salida del Bachillerato ecuatoriano

Objetivos integradores del nivel de Bachillerato	Objetivos generales del área
	Objetivos del área en Bachillerato
Objetivos integradores del subnivel de Básica Superior	Objetivos del área en Básica Superior
Objetivos integradores del subnivel de Básica Media	Objetivos del área en Básica Media
Objetivos integradores del subnivel de Básica Elemental	Objetivos del área en Básica Elemental
Objetivos integradores del subnivel de Básica Preparatoria	Objetivos del área en Básica Preparatoria

Destrezas con criterios de desempeño para cada subnivel y organizadas en bloques curriculares

Criterios e indicadores de evaluación por subnivel

Códigos de los elementos curriculares

Perfil de salida

Valor del perfil	Código
Justicia	J.
Innovación	I.
Solidaridad	S.

	Código
Matemática	M
Básica Superior	4

Bloques curriculares	Código
Álgebra y funciones	1
Geometría y medida	2
Estadística y probabilidad	3

	Código
Objetivo integrador del subnivel	OI. 4.□
Objetivo general del área	OG. M.□
Objetivo del área por subnivel	O. M. 4.□
Destreza con criterios de desempeño	M. 4.1.□
Criterio de evaluación	CE. M. 4.□
Indicador para la evaluación del criterio	I. M. 4.1.□

Bloque curricular

Número de secuencia □

El perfil de salida del Bachillerato ecuatoriano

Somos justos porque:	Somos innovadores porque:	Somos solidarios porque:
J.1. Comprendemos las necesidades y potencialidades de nuestro país y nos involucramos en la construcción de una sociedad democrática, equitativa e inclusiva. **J.2.** Actuamos con ética, generosidad, integridad, coherencia y honestidad en todos nuestros actos. **J.3.** Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos. **J.4.** Reflejamos y reconocemos nuestras fortalezas y debilidades para ser mejores seres humanos en la concepción de nuestro plan de vida.	**I.1.** Tenemos iniciativas creativas, actuamos con pasión, mente abierta y visión de futuro; asumimos liderazgos auténticos, procedemos con proactividad y responsabilidad en la toma de decisiones y estamos preparados para enfrentar los riesgos que el emprendimiento conlleva. **I.2.** Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles. **I.3.** Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos. **I.4.** Actuamos de manera organizada, con autonomía e independencia; aplicamos el razonamiento lógico, crítico y complejo; y practicamos la humildad intelectual en un aprendizaje a lo largo de la vida.	**S.1.** Asumimos responsabilidad social y tenemos capacidad de interactuar con grupos heterogéneos, procediendo con comprensión, empatía y tolerancia. **S.2.** Construimos nuestra identidad nacional en busca de un mundo pacífico y valoramos nuestra multiculturalidad y multietnicidad, respetando las identidades de otras personas y pueblos. **S.3.** Armonizamos lo físico e intelectual; usamos nuestra inteligencia emocional para ser positivos, flexibles, cordiales y autocríticos. **S.4.** Nos adaptamos a las exigencias de un trabajo en equipo en el que comprendemos la realidad circundante y respetamos las ideas y aportes de las demás personas.

Objetivos integradores para el subnivel Superior de la Educación General Básica

O.I.4.1. Identificar y resolver problemas relacionados con la participación ciudadana para contribuir a la construcción de la sociedad del Buen Vivir, comprendiendo la complejidad del sistema democrático y el marco legal y de derechos en el contexto regional y global.	**O.I.4.7.** Construir, interpretar y debatir discursos y expresiones de diversa índole de forma responsable y ética, por medio del razonamiento lógico, logrando acuerdos y valorando la diversidad.
O.I.4.2. Emplear un pensamiento crítico, ordenado y estructurado, construido a través del uso ético y técnico de fuentes, tecnología y medios de comunicación, en procesos de creación colectiva, en un contexto intercultural de respeto.	**O.I.4.8.** Recopilar, organizar e interpretar materiales propios y ajenos en la creación científica, artística y cultural, trabajando en equipo para la resolución de problemas, mediante el uso del razonamiento lógico, fuentes diversas, TIC, en contextos múltiples y considerando el impacto de la actividad humana en el entorno.
O.I.4.3. Analizar, comprender y valorar el origen, estructura y funcionamiento de los procesos sociales y del medio natural, en el contexto de la era digital, subrayando los derechos y deberes de las personas frente a la transformación social y la sostenibilidad del patrimonio natural y cultural.	**O.I.4.9.** Actuar desde los espacios de participación juvenil, comprendiendo la relación de los objetivos del Buen Vivir, la provisión de servicios y la garantía de derechos por parte del Estado con la responsabilidad y diversidad social, natural y cultural.
O.I.4.4. Analizar las consecuencias de la toma de decisiones relativas a derechos sociales, ambientales, económicos, culturales, sexuales y reproductivos en la formulación de su plan de vida, en el contexto de la sociedad del Buen Vivir.	**O.I.4.10.** Explicar y valorar la interculturalidad y la multiculturalidad a partir del análisis de las diversas manifestaciones culturales del Estado plurinacional, reconociendo la influencia de las representaciones sociales, locales y globales sobre la construcción de la identidad.
O.I.4.5. Tomar decisiones orientadas a la resolución de problemas, a partir del uso de diversas técnicas de investigación, nuevas tecnologías y métodos científicos, valorando los aspectos éticos, sociales, ambientales, económicos y culturales del contexto problemático.	**O.I.4.11.** Observar, analizar y explicar las características de diversos productos culturales y artísticos, organizando espacios de creación, interpretación y participación en prácticas corporales, destacando sus posibilidades expresivas y los beneficios para una salud integral.
O.I.4.6. Investigar colaborativamente los cambios en el medio natural y en las estructuras sociales de dominación que inciden en la calidad de vida, como medio para reflexionar sobre la construcción social del individuo y sus relaciones con el entorno en una perspectiva histórica, incluyendo enfoques de género, étnicos y de clase.	**O.I.4.12.** Resolver problemas mediante el trabajo en equipo, adoptando roles en función de las necesidades del grupo y acordando estrategias que permitan mejorar y asegurar resultados colectivos, usando la información y variables pertinentes en función del entorno y comunicando el proceso seguido.

Objetivos generales del área de Matemática

Al término de la Educación General Básica, como resultado de los aprendizajes en el área de Matemática, los estudiantes serán capaces de:

OG.M.1. Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.

OG.M.2. Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.

OG.M.3. Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problémicas del medio.

OG.M.4. Valorar el empleo de las TICs para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentado la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.

OG.M.5. Valorar sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales para plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.

OG.M.6. Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.

**El texto de esta sección ha sido reproducido textualmente del documento Currículo Nacional de Matemática, Ministerio de Educación, publicado en 2016, (página 60)*

Objetivos del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica

Al finalizar este subnivel, los estudiantes serán capaces de:

O.M.4.1. Reconocer las relaciones existentes entre los conjuntos de números enteros, racionales, irracionales y reales; ordenar estos números y operar con ellos para lograr una mejor comprensión de procesos algebraicos y de las funciones (discretas y continuas); y fomentar el pensamiento lógico y creativo.

O.M.4.2. Reconocer y aplicar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva; las cuatro operaciones básicas; y la potenciación y radicación para la simplificación de polinomios, a través de la resolución de problemas.

O.M.4.3. Representar y resolver de manera gráfica (utilizando las TIC) y analítica ecuaciones e inecuaciones con una variable; ecuaciones de segundo grado con una variable; y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, para aplicarlos en la solución de situaciones concretas.

O.M.4.4. Aplicar las operaciones básicas, la radicación y la potenciación en la resolución de problemas con números enteros, racionales, irracionales y reales, para desarrollar el pensamiento lógico y crítico.

O.M.4.5. Aplicar el teorema de Pitágoras para deducir y entender las relaciones trigonométricas (utilizando las TIC) y las fórmulas usadas en el cálculo de perímetros, áreas, volúmenes, ángulos de cuerpos y figuras geométricas, con el propósito de resolver problemas. Argumentar con lógica los procesos empleados para alcanzar un mejor entendimiento del entorno cultural, social y natural; y fomentar y fortalecer la apropiación y cuidado de los bienes patrimoniales del país.

O.M.4.6. Aplicar las conversiones de unidades de medida del SI y de otros sistemas en la resolución de problemas que involucren perímetro y área de figuras planas, áreas y volúmenes de cuerpos geométricos, así como diferentes situaciones cotidianas que impliquen medición, comparación, cálculo y equivalencia entre unidades..

O.M.4.7. Representar, analizar e interpretar datos estadísticos y situaciones probabilísticas con el uso de las TIC, para conocer y comprender mejor el entorno social y económico, con pensamiento crítico y reflexivo.

**El texto de esta sección ha sido reproducido textualmente del documento Currículo Nacional de Matemática, Ministerio de Educación, publicado en 2016, (páginas 125)*

Interpretación del nuevo currículo del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica

<table>
<tr><th rowspan="2">Objetivos generales del área que se evalúan</th><th colspan="2">Criterio de evaluación: CE.M.4.1. Emplea las relaciones de orden, las propiedades algebraicas (adición y multiplicación), las operaciones con distintos tipos de números (Z, Q, I) y expresiones algebraicas, para afrontar inecuaciones y ecuaciones con soluciones de diferentes campos numéricos, y resolver problemas de la vida real, seleccionando la forma de cálculo apropiada e interpretando y juzgando las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema; analiza la necesidad del uso de la tecnología.</th></tr>
<tr><th>Destrezas con criterios de desempeño a evaluar</th><th>Indicadores para la evaluación del criterio</th></tr>
<tr><td>OG.M.1.
OG.M.2.
OG.M.3.
OG.M.4.
OG.M.5.
OG.M.6.</td><td>M.4.1.1. Reconocer los elementos del conjunto de números enteros Z, ejemplificando situaciones reales en las que se utilizan los números enteros negativos.
M.4.1.2. Establecer relaciones de orden en un conjunto de números enteros, utilizando la recta numérica y la simbología matemática (=, <, ≤, >, ≥).
M.4.1.3. Operar en Z (adición, sustracción, multiplicación) de forma numérica, aplicando el orden de operación.
M.4.1.4. Deducir y aplicar las propiedades algebraicas (adición y multiplicación) de los números enteros en operaciones numéricas.
M.4.1.5. Calcular la potencia de números enteros con exponentes naturales.
M.4.1.6. Calcular raíces de números enteros no negativos que intervienen en expresiones matemáticas.
M.4.1.7. Realizar operaciones combinadas en Z aplicando el orden de operación, y verificar resultados utilizando la tecnología.
M.4.1.8. Expresar enunciados simples en lenguaje matemático (algebraico) para resolver problemas.
M.4.1.9. Aplicar las propiedades algebraicas (adición y multiplicación) de los números enteros en la suma de monomios homogéneos y la multiplicación de términos algebraicos.
M.4.1.10. Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Z en la solución de problemas.
M.4.1.11. Resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita en Z, de manera analítica, en la solución de ejercicios numéricos y problemas.
M.4.1.12. Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones o inecuaciones de primer grado con una incógnita en Z, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.
M.4.1.13. Reconocer el conjunto de los números racionales Q e identificar sus elementos.
M.4.1.14. Representar y reconocer los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.
M.4.1.15. Establecer relaciones de orden en un conjunto de números racionales utilizando la recta numérica y la simbología matemática (=, <, ≤, >, ≥).</td><td>I.M.4.1.1. Ejemplifica situaciones reales en las que se utilizan los números enteros; establece relaciones de orden empleando la recta numérica; aplica las propiedades algebraicas de los números enteros en la solución de expresiones con operaciones combinadas, empleando correctamente la prioridad de las operaciones; juzga la necesidad del uso de la tecnología. (I.4.)
I.M.4.1.2. Formula y resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números enteros y el planteamiento y resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita; juzga e interpreta las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. (I.2.)
I.M.4.1.3. Establece relaciones de orden en un conjunto de números racionales e irracionales, con el empleo de la recta numérica (representación geométrica); aplica las propiedades algebraicas de las operaciones (adición y multiplicación) y las reglas de los radicales en el cálculo de ejercicios numéricos y algebraicos con operaciones combinadas; atiende correctamente la jerarquía de las operaciones. (I.4.)</td></tr>
</table>

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	M.4.1.16. Operar en Q (adición y multiplicación) resolviendo ejercicios numéricos. **M.4.1.17.** Aplicar las propiedades algebraicas para la suma y la multiplicación de números racionales en la solución de ejercicios numéricos. **M.4.1.18.** Calcular potencias de números racionales con exponentes enteros. **M.4.1.19.** Calcular raíces de números racionales no negativos en la solución de ejercicios numéricos (con operaciones combinadas) y algebraicos, atendiendo la jerarquía de la operación. **M.4.1.20.** Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q en la solución de problemas sencillos. **M.4.1.21.** Resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita en Q de manera algebraica. **M.4.1.22.** Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones o inecuaciones de primer grado con una incógnita en Q, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. **M.4.1.26.** Reconocer el conjunto de los números irracionales e identificar sus elementos. **M.4.1.27.** Simplificar expresiones numéricas aplicando las reglas de los radicales.	**I.M.4.1.4.** Formula y resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales y el planteamiento y resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita. (I.2.)
Objetivos generales del área que se evalúan	**Criterio de evaluación:** CE.M.4.2. Emplea las relaciones de orden, las propiedades algebraicas de las operaciones en R y expresiones algebraicas, para afrontar inecuaciones, ecuaciones y sistemas de inecuaciones con soluciones de diferentes campos numéricos, y resolver problemas de la vida real, seleccionando la notación y la forma de cálculo apropiada e interpretando y juzgando las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema; analiza la necesidad del uso de la tecnología.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1. OG.M.2. OG.M.3. OG.M.4. OG.M.5. OG.M.6.	**M.4.1.23.** Definir y reconocer polinomios de grados 1 y 2. **M.4.1.24.** Operar con polinomios de grado ≤ 2 (adición y producto por escalar) en ejercicios numéricos y algebraicos. **M.4.1.25.** Reescribir polinomios de grado 2 con la multiplicación de polinomios de grado 1. **M.4.1.28.** Reconocer el conjunto de los números reales R e identificar sus elementos. **M.4.1.29.** Aproximar números reales a números decimales para resolver problemas. **M.4.1.30.** Establecer relaciones de orden en un conjunto de números reales utilizando la recta numérica y la simbología matemática ($=, <, \leq, >, \geq$). **M.4.1.31.** Calcular adiciones y multiplicaciones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades en R (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).	**I.M.4.2.1.** Emplea las operaciones con polinomios de grado ≤ 2 en la solución de ejercicios numéricos y algebraicos; expresa polinomios de grado 2 como la multiplicación de polinomios de grado 1. (I.4.)

Interpretación del nuevo currículo del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	M.4.1.32. Calcular expresiones numéricas y algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R. **M.4.1.33.** Reconocer y calcular productos notables e identificar factores de expresiones algebraicas. **M.4.1.34.** Aplicar las potencias de números reales con exponentes enteros para la notación científica. **M.4.1.35.** Calcular raíces cuadradas de números reales no negativos y raíces cúbicas de números reales, aplicando las propiedades en R. **M.4.1.36.** Reescribir expresiones numéricas o algebraicas con raíces en el denominador utilizando propiedades en R (racionalización). **M.4.1.37.** Identificar las raíces como potencias con exponentes racionales para calcular potencias de números reales no negativos con exponentes racionales en R. **M.4.1.38.** Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en R para resolver problemas sencillos. **M.4.1.39.** Representar un intervalo en R de manera algebraica y gráfica, y reconocer el intervalo como la solución de una inecuación de primer grado con una incógnita en R. **M.4.1.40.** Resolver de manera geométrica una inecuación lineal con dos incógnitas en el plano cartesiano sombreando la solución. **M.4.1.41.** Resolver un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas de manera gráfica (en el plano) y reconocer la zona común sombreada como solución del sistema.	**I.M.4.2.2.** Establece relaciones de orden en el conjunto de los números reales; aproxima a decimales; y aplica las propiedades algebraicas de los números reales en el cálculo de operaciones (adición, producto, potencias, raíces) y la solución de expresiones numéricas (con radicales en el denominador) y algebraicas (productos notables). (I.4.) **I.M.4.2.3.** Expresa raíces como potencias con exponentes racionales, y emplea las potencias de números reales con exponentes enteros para leer y escribir en notación científica información que contenga números muy grandes o muy pequeños. (I.3., I.4.) **I.M.4.2.4.** Resuelve problemas que requieran de ecuaciones de primer grado con una incógnita en R; utiliza las distintas notaciones para los intervalos y su representación gráfica en la solución de inecuaciones de primer grado y sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas de manera gráfica, en R. (I.1., I.4.)
Objetivos generales del área que se evalúan	**Criterio de evaluación:** CE.M.4.3. Define funciones elementales (función real, función cuadrática), reconoce sus representaciones, propiedades y fórmulas algebraicas, analiza la importancia de ejes, unidades, dominio y escalas, y resuelve problemas que pueden ser modelados a través de funciones elementales; propone y resuelve problemas que requieran el planteamiento de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas y ecuaciones de segundo grado; juzga la necesidad del uso de la tecnología.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	M.4.1.42. Calcular el producto cartesiano entre dos conjuntos para definir relaciones binarias (subconjuntos), representándolas con pares ordenados. **M.4.1.43.** Identificar relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia sobre un subconjunto del producto cartesiano.	**I.M.4.3.1.** Representa como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos, e identifica las relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia de un subconjunto de dicho producto. (I.4.)

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1. OG.M.2. OG.M.3. OG.M.4. OG.M.5. OG.M.6.	**M.4.1.44.** Definir y reconocer funciones de manera algebraica y de manera gráfica, con diagramas de Venn, determinando su dominio y recorrido en Z. **M.4.1.45.** Representar funciones de forma gráfica, con barras, bastones y diagramas circulares, y analizar sus características. **M.4.1.46.** Elaborar modelos matemáticos sencillos como funciones en la solución de problemas. **M.4.1.47.** Definir y reconocer funciones lineales en Z, con base en tablas de valores, de formulación algebraica y/o representación gráfica, con o sin el uso de la tecnología. **M.4.1.48.** Reconocer funciones crecientes y decrecientes a partir de su representación gráfica o tabla de valores. **M.4.1.49.** Definir y reconocer una función real identificando sus características: dominio, recorrido, monotonía, cortes con los ejes. **M.4.1.50.** Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica (con o sin el empleo de la tecnología), e identificar su monotonía a partir de la gráfica o su pendiente. **M.4.1.51.** Definir y reconocer funciones potencia con n=1, 2, 3, representarlas de manera gráfica e identificar su monotonía. **M.4.1.52.** Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales, y resolver problemas. **M.4.1.53.** Reconocer la recta como la solución gráfica de una ecuación lineal con dos incógnitas en R. **M.4.1.54.** Reconocer la intersección de dos rectas como la solución gráfica de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. **M.4.1.55.** Resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas de manera algebraica, utilizando los métodos de determinante (Cramer), de igualación, y de eliminación gaussiana. **M.4.1.56.** Resolver y plantear problemas de texto con enunciados que involucren funciones lineales y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas; e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. **M.4.1.57.** Definir y reconocer una función cuadrática de manera algebraica y gráfica, determinando sus características: dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos y paridad. **M.4.1.58.** Reconocer los ceros de la función cuadrática como la solución de la ecuación de segundo grado con una incógnita. **M.4.1.59.** Resolver la ecuación de segundo grado con una incógnita de manera analítica (por factoreo, completación de cuadrados, fórmula binomial) en la solución de problemas.	**I.M.4.3.2.** Resuelve problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos, como funciones; emplea gráficas de barras, bastones y diagramas circulares para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema. (I.2.) **I.M.4.3.3.** Determina el comportamiento (función creciente o decreciente) de las funciones lineales en Z, basándose en su formulación algebraica, tabla de valores o en gráficas; valora el empleo de la tecnología; y calcula funciones compuestas gráficamente. (I.4.) **I.M.4.3.4.** Utiliza las TIC para graficar funciones lineales, cuadráticas y potencia (n=1, 2, 3), y para analizar las características geométricas de la función lineal (pendiente e intersecciones), la función potencia (monotonía) y la función cuadrática (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimo, paridad); reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función lineal o cuadrática, lo resuelve y plantea otros similares. (J.1., I.4.)

Interpretación del nuevo currículo del área de Matemática para el subnivel Superior de Educación General Básica

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	M.4.1.60. Aplicar las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado con una incógnita para resolver problemas. **M.4.1.61.** Resolver (con apoyo de las TIC) y plantear problemas con enunciados que involucren modelos con funciones cuadráticas, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.	**I.M.4.3.5.** Plantea y resuelve problemas que involucren sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, ecuaciones de segundo grado y la aplicación de las propiedades de las raíces de la ecuación de segundo grado; juzga la validez de las soluciones obtenidas en el contexto del problema. (I.4., J.2.)
Objetivos generales del área que se evalúan	**Criterio de evaluación:** CE.M.4.4. Valora la importancia de la teoría de conjuntos para definir conceptos e interpretar propiedades; aplica las leyes de la lógica proposicional en la solución de problemas y la elaboración de argumentos lógicos.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1. OG.M.2. OG.M.3. OG.M.4. OG.M.5.	**M.4.2.1.** Definir y reconocer proposiciones simples a las que se puede asignar un valor de verdad para relacionarlas entre sí con conectivos lógicos: negación, disyunción, conjunción, condicionante y bicondicionante; y formar proposiciones compuestas (que tienen un valor de verdad que puede ser determinado). **M.4.2.2.** Definir y reconocer una tautología para la construcción de tablas de verdad. **M.4.2.3.** Conocer y aplicar las leyes de la lógica proposicional en la solución de problemas. **M.4.2.4.** Definir y reconocer conjuntos y sus características para operar con ellos (unión, intersección, diferencia, complemento) de forma gráfica y algebraica.	**I.M.4.4.1.** Representa, de forma gráfica y algebraica, las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento entre conjuntos; utiliza conectivos lógicos, tautologías y la lógica proposicional en la solución de problemas, comunicando resultados y estrategias mediante el razonamiento lógico. (I.3., I.4.)
Objetivos generales del área que se evalúan	**Criterio de evaluación:** CE.M.4.5. Emplea la congruencia, semejanza, simetría y las características sobre las rectas y puntos notables, en la construcción de figuras; aplica los conceptos de semejanza para solucionar problemas de perímetros y áreas de figuras, considerando como paso previo el cálculo de longitudes. Explica los procesos de solución de problemas utilizando como argumento criterios de semejanza, congruencia y las propiedades y elementos de triángulos. Expresa con claridad los procesos segu idos y los razonamientos empleados.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	M.4.2.5. Definir e identificar figuras geométricas semejantes, de acuerdo a las medidas de los ángulos y a la relación entre las medidas de los lados, determinando el factor de escala entre las figuras (teorema de Thales). **M.4.2.6.** Aplicar la semejanza en la construcción de figuras semejantes, el cálculo de longitudes y la solución de problemas geométricos. **M.4.2.7.** Reconocer y trazar líneas de simetría en figuras geométricas para completarlas o resolverlas.	**I.M.4.5.1.** Construye figuras simétricas; resuelve problemas geométricos que impliquen el cálculo de longitudes con la aplicación de conceptos de semejanza y la aplicación del teorema de Tales; justifica procesos aplicando los conceptos de congruencia y semejanza. (I.1., I.4.)

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1. OG.M.2. OG.M.3. OG.M.4. OG.M.5. OG.M.6.	**M.4.2.8.** Clasificar y construir triángulos, utilizando regla y compás, bajo condiciones de ciertas medidas de lados y/o ángulos. **M.4.2.9.** Definir e identificar la congruencia de dos triángulos de acuerdo a criterios que consideran las medidas de sus lados y/o sus ángulos. **M.4.2.10.** Aplicar criterios de semejanza para reconocer triángulos rectángulos semejantes y resolver problemas. **M.4.2.11.** Calcular el perímetro y el área de triángulos en la resolución de problemas. **M.4.2.12.** Definir y dibujar medianas y baricentro, mediatrices y circuncentro, alturas y ortocentro, bisectrices e incentro en un triángulo. **M.4.2.13.** Plantear y resolver problemas que impliquen la identificación de las características de las rectas y puntos notables de un triángulo.	**I.M.4.5.2.** Construye triángulos dadas algunas medidas de ángulos o lados; dibuja sus rectas y puntos notables como estrategia para plantear y resolver problemas de perímetro y área de triángulos; comunica los procesos y estrategias utilizados. (I.3.)

Objetivos generales del área que se evalúan	**Criterio de evaluación:** CE.M.4.6. Utiliza estrategias de descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras compuestas, y en el cálculo de cuerpos compuestos; aplica el teorema de Pitágoras y las relaciones trigonométricas para el cálculo de longitudes desconocidas de elementos de polígonos o cuerpos geométricos, como requerimiento previo a calcular áreas de polígonos regulares, y áreas y volúmenes de cuerpos, en contextos geométricos o en situaciones reales. Valora el trabajo en equipo con una actitud flexible, abierta y crítica.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.1. OG.M.2. OG.M.3. OG.M.4. OG.M.5.	**M.4.2.14.** Demostrar el teorema de Pitágoras utilizando áreas de regiones rectangulares. **M.4.2.15.** Aplicar el teorema de Pitágoras en la resolución de triángulos rectángulos. **M.4.2.16.** Definir e identificar las relaciones trigonométricas en el triángulo rectángulo (seno, coseno, tangente) para resolver numéricamente triángulos rectángulos. **M.4.2.17.** Resolver y plantear problemas que involucren triángulos rectángulos en contextos reales, e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. **M.4.2.18.** Calcular el área de polígonos regulares por descomposición en triángulos. **M.4.2.19.** Aplicar la descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras geométricas compuestas. **M.4.2.20.** Construir pirámides, prismas, conos y cilindros a partir de patrones en dos dimensiones (redes), para calcular el área lateral y total de estos cuerpos geométricos.	**I.M.4.6.1.** Demuestra el teorema de Pitágoras valiéndose de diferentes estrategias, y lo aplica en la resolución de ejercicios o situaciones reales relacionadas a triángulos rectángulos; demuestra creatividad en los procesos empleados y valora el trabajo individual o grupal. (I.1., S.4.) **I.M.4.6.2.** Reconoce y aplica las razones trigonométricas y sus relaciones en la resolución de triángulos rectángulos y en situaciones problema de la vida real. (I.3.)

	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
	M.4.2.21. Calcular el volumen de pirámides, prismas, conos y cilindros aplicando las fórmulas respectivas. **M.4.2.22.** Resolver problemas que impliquen el cálculo de volúmenes de cuerpos compuestos (usando la descomposición de cuerpos).	**I.M.4.6.3.** Resuelve problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas de polígonos regulares, áreas y volúmenes de pirámides, prismas, conos y cilindros; aplica, como estrategia de solución, la descomposición en triángulos y/o la de cuerpos geométricos; explica los procesos de solución empleando la construcción de polígonos regulares y cuerpos geométricos; juzga la validez de resultados. (I.3., I.4.)
Objetivos generales del área que se evalúan	**Criterio de evaluación:** CE.M.4.7. Representa gráficamente información estadística, mediante tablas de distribución de frecuencias y con el uso de la tecnología. Interpreta y codifica información a través de gráficas. Valora la claridad, el orden y la honestidad en el tratamiento y presentación de datos. Promueve el trabajo colaborativo en el análisis crítico de la información recibida de los medios de comunicación.	
	Destrezas con criterios de desempeño a evaluar	Indicadores para la evaluación del criterio
OG.M.2. OG.M.4. OG.M.6.	**M.4.3.1.** Organizar datos procesados en tablas de frecuencias para definir la función asociada, y representarlos gráficamente con ayuda de las TIC. **M.4.3.2.** Organizar datos no agrupados (máximo 20) y datos agrupados (máximo 50) en tablas de distribución de frecuencias: absoluta, relativa, relativa acumulada y acumulada, para analizar el significado de los datos. **M.4.3.3.** Representar de manera gráfica, con el uso de la tecnología, las frecuencias: histograma o gráfico con barras (polígono de frecuencias), gráfico de frecuencias acumuladas (ojiva), diagrama circular, en función de analizar datos.	**I.M.4.6.1.** Interpreta datos agrupados y no agrupados en tablas de distribución de frecuencias y gráficas estadísticas (histogramas, polígono de frecuencias, ojiva y/o diagramas circulares), con el uso de la tecnología; interpreta funciones y juzga la validez de procedimientos, la coherencia y la honestidad de los resultados obtenidos. (J.2., I.3.)

<table>
<tr><td rowspan="2">Objetivos generales del área que se evalúan</td><td colspan="2">Criterio de evaluación: CE.M.4.8. Analiza y representa un grupo de datos utilizando los elementos de la estadística descriptiva (variables, niveles de medición, medidas de tendencia central, de dispersión y de posición). Razona sobre los posibles resultados de un experimento aleatorio sencillo. Calcula probabilidades aplicando como estrategia técnicas de conteo, el cálculo del factorial de un número y el coeficiente binomial, operaciones con conjuntos y las leyes de De Morgan. Valora la importancia de realizar estudios estadísticos para comprender el medio y plantear soluciones a problemas de la vida diaria. Emplea medios tecnológicos, con creatividad y autonomía, en el desarrollo de procesos estadísticos. Respeta las ideas ajenas y argumenta procesos.</td></tr>
<tr><td>Destrezas con criterios de desempeño a evaluar</td><td>Indicadores para la evaluación del criterio</td></tr>
<tr><td>OG.M.1.
OG.M.2.
OG.M.3.
OG.M.4.
OG.M.5.
OG.M.6.</td><td>M.4.3.4. Definir y aplicar la metodología para realizar un estudio estadístico: estadística descriptiva.
M.4.3.5. Definir y utilizar variables cualitativas y cuantitativas.
M.4.3.6. Definir y aplicar niveles de medición: nominal, ordinal, intervalo y razón.
M.4.3.7. Calcular e interpretar las medidas de tendencia central (media, mediana, moda) y medidas de dispersión (rango, varianza y desviación estándar) de un conjunto de datos en la solución de problemas.
M.4.3.8. Determinar las medidas de posición: cuartiles, deciles, percentiles, para resolver problemas.
M.4.3.9. Definir la probabilidad (empírica) y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes.
M.4.3.10. Aplicar métodos de conteo (combinaciones y permutaciones) en el cálculo de probabilidades.
M.4.3.11. Calcular el factorial de un número natural y el coeficiente binomial en el cálculo de probabilidades.
M.4.3.12. Operar con eventos (unión, intersección, diferencia y complemento) y aplicar las leyes de De Morgan para calcular probabilidades en la resolución de problemas.</td><td>I.M.4.8.1. Utiliza información cuantificable del contexto social; utiliza variables; aplica niveles de medición; calcula e interpreta medidas de tendencia central (media, mediana y moda), de dispersión (rango, varianza y desviación estándar) y de posición (cuartiles, deciles, percentiles); analiza críticamente información a través de tablas o gráficos; resuelve problemas en forma grupal e individual; y comunica estrategias, opiniones y resultados. (I.4., S.4.)
I.M.4.8.2. Calcula probabilidades de eventos aleatorios empleando combinaciones y permutaciones, el cálculo del factorial de un número y el coeficiente binomial; operaciones con eventos (unión, intersección, diferencia y complemento) y las leyes de De Morgan. Valora las diferentes estrategias y explica con claridad el proceso lógico seguido para la resolución de problemas. (I.2., I.4.)</td></tr>
</table>

Necesidades educativas especiales

La Educación es un derecho que todas las personas tienen en el transcurso de su vida, y es el Estado que debe promover, respetar y garantizar los mismos. Tal como indica la Ley de Educación del Ecuador, sección quinta, Art. 26 ".- La educación es un derecho de las personas a lo largo de su vida y un deber ineludible e inexcusable del Estado. Constituye un área prioritaria de la política pública y de la inversión estatal, garantía de la igualdad e inclusión social y condición indispensable para el buen vivir. Las personas, las familias y la sociedad tienen el derecho y la responsabilidad de participar en el proceso educativo".

El artículo anteriormente citado manifiesta que la educación es un derecho fundamental del ser humano, y es el Estado el que garantiza el acceso a la educación de todos sus habitantes sin discriminación alguna en igualdad de condiciones para todos. Se puede entender que cada persona es un ser humano único e irrepetible, con sus propias características y ritmos de aprendizaje, por lo tanto el docente debe respetar las diferencias individuales. Los docentes deben considerar el empleo de respuestas y estrategias diversas en lo que refiere a las necesidades educativas de sus estudiantes, asociadas o no a discapacidad; sin que esto signifique excluirles del sistema educativo formal, si no como una invitación a realizar adaptaciones curriculares de ser el caso, modificación en la modalidad y metodología de enseñanza- aprendizaje educativa; con el único objetivo de que todos tengan las mismas oportunidades de acceder a la educación respetando la condición propia de cada uno, son estos elementos los que definen a la Educación Inclusiva, que pretende disminuir toda forma de discriminación y exclusión.

Se conceptúa por Educación Inclusiva, en el acuerdo ministerial N 0295-13 en la Normativa referente a la atención a los estudiantes con necesidades educativas especiales en establecimientos de educación ordinaria o en instituciones educativas especializadas, en el Capítulo III Educación Inclusiva Art. 11 "La educación inclusiva se define como el proceso de identificar y responder a la diversidad de necesidades especiales de todos los estudiantes a través de la mayor participación en el aprendizaje, las culturas y en las comunidades, a fin de reducir la exclusión en la educación. La educación inclusiva se sostiene en los principios constitucionales, legales nacionales y en los diferentes instrumentos internacionales referentes a su promoción y funcionamiento".

Reconociendo la importancia de promover mensajes de inclusión y respeto a la diversidad se considera oportuno incluir dentro de los textos escolares información general y con un lenguaje sencillo que les sirva de apoyo a los docentes, quienes dentro del aula, presenten diferentes estrategias para la construcción del aprendizaje con sus estudiantes, ya sea por razones de discapacidad o no necesariamente. Y como parte de su derecho fundamental e irrenunciable que se encuentra vigente en la Constitución de la República del Ecuador, en la Sección Quinta de los grupos vulnerables, Artículo 47, "En el ámbito público y privado recibirán atención prioritaria, preferente y especializada los niños y adolescentes, las mujeres embarazadas, las personas con discapacidad, las que adolecen de enfermedades catastróficas de alta complejidad y las de la tercera edad. Del mismo modo, se atenderá a las personas en situación de riesgo y víctimas de violencia doméstica, maltrato infantil, desastres naturales o antropogénicos".

Por lo antes citado en este apartado se pretende sociabilizar con el docente en términos generales la caracterización y facilitación de sugerencias que podría emplear como herramienta de apoyo en el proceso educativo del estudiante, frente a algunos problemas de comportamiento de inicio en la niñez que podrían presentarse en el ambiente escolar y que requieren necesidad educativa especial no asociadas a la discapacidad; tales como la discapacidad cognitiva y las capacidades y talentos excepcionales y dentro de las situaciones de vulnerabilidad se señalará la problemática de las adicciones. Sin llegar a convertirse en una guía de adaptación curricular para la educación.

Discapacidad cognitiva

Presentan dificultades en la adaptación al medio, por alteraciones en el funcionamiento neurológico. Como categoría diagnóstica, el retraso mental abarca una serie bastante amplia de síntomas y manifestaciones de tipo comportamental, adaptativo y de desempeño, que lo complejizan tanto en el proceso de identificación como de intervención. Por ello, la neurobiología, la psicología, las ciencias del desarrollo y el comportamiento, han tratado durante años de identificar componentes básicos que permitan caracterizar el cuadro clínico y establecer con claridad patrones de evaluación y atención oportuna; pero todos los esfuerzos han resultado parcialmente admisibles, pues se trata de un ejercicio en el que juegan un

Necesidades educativas especiales

sin fin de variables, concepciones, actitudes y prácticas, sin mencionar los aspectos éticos y de procesos.

Recomendaciones

- Las experiencias de aprendizaje que promueven la percepción clara, llevan a los estudiantes con discapacidad cognitiva a definiciones precisas del problema o tarea que deben resolver, a través del uso de los canales perceptivos y la verbalización de lo que creen que es la demanda de la tarea. Se deben ofrecer estímulos sensoriales (visuales, táctiles, auditivos, olfativos y gustativos) diversos para una misma tarea y realizar preguntas de monitoreo como ¿Qué es lo que te estoy diciendo?, ¿Qué debes hacer?, ¿Sabes cómo resolver la tarea?

- La atención educativa debe enfocarse hacia el desarrollo del pensamiento reflexivo, explicativo y argumentativo, evitando la impulsividad en las respuestas, la desorganización y la falta de coordinación de los elementos. Dado que responden con rapidez y generalmente de forma inapropiada o que se demoran más tiempo de lo normal para responder, por tanto se deben emplear estrategias que ayuden al estudiante a planificar su acción. En este caso son útiles los listados de prioridades (verbales o escritos dependiendo del nivel de funcionalidad en habilidades académicas funcionales), las preguntas de seguimiento ¿Qué es lo primero que debes hacer?, ¿Qué resultados obtuviste?, ¿Qué debes hacer luego?

- Son efectivas las estrategias de asociación como los ficheros de palabras por categorías, registros de procesos simples (bañarse, vestirse, comprar, preparar un desayuno, etc.). También la elaboración de diccionarios con términos comunes para el nivel escolar en que se encuentran y el uso de diccionarios formales para los que poseen habilidades académicas más funcionales.

- Emplear estrategias de ordenación (manejo de calendarios, uso de agendas diarias en clase o en el hogar, registros de actividades, diarios de campo de acuerdo a los niveles de desempeño en habilidades académicas), comparación (aparejamientos, correspondencias, conjuntos, cuadros comparativos), organización de secuencias visuales, narración de secuencias). Estas estrategias favorecerán la comprensión de acontecimientos de forma diacrónica y sincrónica, lo que les permitirá conectar sucesos y las relaciones de orden entre ellos.

Estudiantes con capacidades y talentos excepcionales

Son aquellas personas que presentan un desempeño superior en las múltiples áreas y tienen un alto potencial para aprender y desarrollar competencias que supera al de las demás personas de su edad. Estos estudiantes se caracterizan por tener un ritmo de aprendizaje rápido con coeficientes intelectuales altos y tienen habilidades meta-cognitivas superiores.

Recomendaciones

- El docente, al detectar este tipo de necesidad educativa, debe reportar al DECE para que analice el caso y oriente al representante del estudiante para que acuda al especialista y realice el test correspondiente para saber el nivel de coeficiente intelectual del estudiante.

- Se recomienda que el docente planifique actividades con diferentes grados de dificultad, actividades variadas en las cuales los estudiantes puedan desarrollar diferentes destrezas y consiga objetivos distintos.

- Realizar preguntas a los estudiantes para que estimulen su pensamiento y les permitan analizar y expresar lo que han comprendido acerca de una lectura, de un libro o un artículo, también se puede desarrollar su imaginación a partir de preguntas tales como: ¿Qué piensas que ocurrirá después de leer tal libro?, ¿Qué final le darías a tal cuento?, etc.

- Realizar diferentes proyectos educativos como actividades extracurriculares en las cuales los estudiantes desarrollen sus habilidades, destrezas y descubran sus talentos escondidos, por ejemplo: organizar grupos de danza, de música, de teatro, de cocina, de oratoria, los cuales despierten el interés por aprender de los estudiantes y salgan de las clases monótonas.

UNIDAD 1 Evaluación diagnóstica

Nombre:..
Grado:................ **Fecha:**................

1. Los 25 estudiantes de grado noveno planearon una salida recreativa. Contaban con 1 500 dólares, pero necesitaban 4 000. Así, decidieron invertir los 1 500 dólares en el alquiler de un cinema para proyectar una película y aprovechar las ganancias obtenidas.
Si el valor de cada boleta era de 2 dólares entonces necesitaban vender al menos:

A. 750 boletos B. 2 000 boletos

C. 2 750 boletos D. 5 500 boletos

2. El gerente del cinema decidió darle a los estudiantes 3 dólares más por cada cinco boletas vendidas. Una forma de calcular el dinero toral que tienen al vender 33 boletas es:

A. $(33\times2)+[(30\div5)\times3]=84$

B. $(33\times2)+[(30\div5)\times3]=39$

C. $(33\times13)=429$

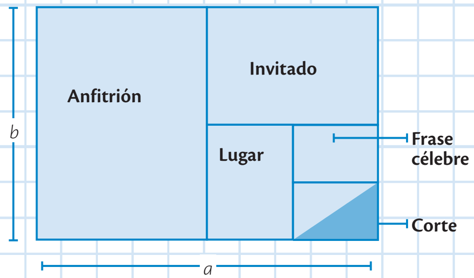
D. $(33\times2)+3=69$

3. El resultado de la operación es:
$[(-5)^4]^3 \div [(-5)^2 \cdot (-5)^6]$

A. 25 B. 125

C. 625 D. 312

4. En una imprenta se realizan varios modelos de tarjetas con forma rectangular. La figura muestra la forma en la que se distribuyen los espacios en uno de los modelos que elaboran.



Según el dibujo, el área que no corresponde al corte decorativo es:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{31}{32}$ C. $\frac{1}{32}$ D. $\frac{7}{8}$

5. Si el área destinada para la información del anfitrión es de 20 cm^2 entonces, los valores de a y b son:

A. a = 5 cm y b = 4 cm

B. a = 10 cm y b = 2 cm

C. a = 8 cm y b = 5 cm

D. a = 10 cm y b = 8 cm

6. El área del rectángulo que se pierde con el corte de la pestaña se puede representar como:

A. $\frac{ab}{2}$ B. $\frac{ab}{6}$

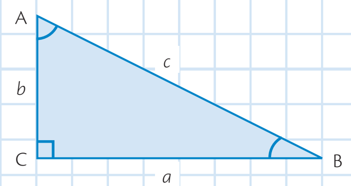
C. $\frac{ab}{12}$ D. $\frac{ab}{32}$

7. La expresión fraccionaria que corresponde a 3,25 es:

A. $\frac{11}{2}$ B. $\frac{13}{4}$

C. $\frac{15}{7}$ D. $\frac{9}{5}$

8. Para el triángulo de la figura, si c=9 y b=8, el valor de c es:



A. 1 B. $\sqrt{145}$

C. $\sqrt{17}$ D. $\sqrt{23}$

Propósito de la unidad

Bloque de álgebra y funciones

En el bloque numérico se incluyen las formas de representación de los números, las características de los sistemas numéricos; el significado, la utilidad, las propiedades y los procedimientos para resolver las operaciones.

Definiremos a cada número racional como el representante de la clase de equivalencia que contiene todas las fracciones equivalentes a ella, recordándoles que los números decimales son una forma equivalente de escribir números racionales y en general, números reales.

Toda clase de matemática, en la que se practiquen cálculos, también debe hacer que los estudiantes, discutan, dialoguen, argumenten y comuniquen sus resultados y conclusiones.

Tampoco se pueden resolver problemas sin el dominio hábil de los procedimientos de cálculo, pero de éstos, las y los estudiantes deben conocer también las relaciones entre ellos y sus propiedades, y comprender los fundamentos de las reglas que están utilizando.

Toda clase de matemática en la que se realicen cálculos en la resolución de problemas es donde los estudiantes ponen en juego los saberes adquiridos.

Evaluaciones

Diagnóstica

La evaluación diagnóstica, además de ayudar a generar en los estudiantes curiosidad acerca de los temas que se estudiarán, permite anticipar o predecir los conceptos en los que se puede encontrar alguna dificultad. En este caso, los resultados le servirán al docente para planear las clases y proponer la metodología más conveniente para el proceso de proceso de enseñanza-aprendizaje.

Para iniciar la unidad se hace necesario el manejo de operaciones con números enteros y fraccionarios, ya que al realizar cálculos con las distintas operaciones con números racionales, irracionales y reales, los estudiantes deben dominar estas destrezas en la solución de problemas.

Formativa

Es muy importante que analice los avances o las dificultades que tuvieron los estudiantes al desarrollar cada actividad. ¿Qué aprendizajes nuevos tuvieron? Esto, además de darle pistas del desarrollo de los estudiantes, le permitirá motivar procesos de metacognición muy valiosos para el aprendizaje.

La evaluación formativa contempla una serie de ejercicios y problemas que permitan verificar si desarrollaron las destrezas planteadas como: reconocer situaciones reales en las que se utilizan los números racionales y reales.

Aplicar las operaciones con números reales en la resolución de problemas. Aplicar los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación, y la división y efectuar operaciones combinadas con números reales. Aplicar las reglas de potenciación y radicación en la simplificación de expresiones numéricas.

Sumativa

La función principal de esta evaluación es identificar lo que los estudiantes aprendieron durante el desarrollo de la unidad correspondiente. Esto, además de permitir analizar cuáles son las dificultades y las fortalezas del proceso de enseñanza-aprendizaje, servirá como evidencia que los que les permitirán desarrollar con fluidez los conceptos de la unidad siguiente

Se presentan una serie de problemas que permiten evaluar los logros alcanzados al inicio de la unidad y los posteriores como: aplica las reglas de potenciación y radicación en la simplificación de expresiones numéricas, aproxima decimales, en la simplificación de expresiones numéricas, emplea las potencias de números reales con exponentes enteros para leer y escribir en notación científica información que contenga números muy grandes o muy pequeños

Respuestas

Evaluación diagnóstica

1	2	3	4	5	6	7	8
A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D

Esquema conceptual

Conocimientos de la unidad

- Bloque de álgebra y funciones
  - Números reales
    - Números racionales
    - Fracciones equivalentes
    - Números racionales
    - Orden en los números racionales
  - Expresiones fraccionaria y decimal de un número racional
    - Expresión decimal de un número racional
    - Clasificación de las expresiones decimales
    - Fracción generatriz de un número racional
  - Números racionales en la recta numérica
    - Números irracionales en la recta numérica
  - Números reales
    - Valor absoluto
    - Orden en el conjunto de los números reales
    - Propiedades de las relaciones de orden
  - Intervalos y semirrectas
    - Intervalos
    - Semirrectas y su representación gráfica
  - Operaciones con números reales
    - Adición y sustracción de números reales
    - Multiplicación y división de números reales

Cultura del Buen Vivir

■ **Valor: La honestidad**

Una persona honesta se comporta y se expresa con sinceridad y coherencia, respetando los valores de la justicia y la verdad.

- Potencia de un número real
  - Propiedades de la potenciación de números reales
- Notación científica
- Raíz de un número real
  - Raíz enésima
  - Potencias con exponente fraccionario
  - Propiedades de las raíces de números reales
  - Radicales equivalentes
- Racionalización de denominadores
- Polinomios
  - Expresiones algebraicas
  - Tipos de expresiones algebraicas
  - Valor numérico de una expresión algebraica
  - Monomios y Monomios semejantes
  - Reducción de términos semejantes en un polinomio
- Adición y sustracción de polinomios
  - Adición de polinomios
  - Sustracción de polinomios
- Multiplicación de polinomios
  - Multiplicación de monomios
  - Multiplicación de monomio por polinomio
  - Multiplicación de polinomio por polinomio

Compromiso a lograr

Mediante el desarrollo de la unidad y la aplicación del nuevo conjunto numérico, empleando las relaciones de orden, las propiedades algebraicas (adición y multiplicación), las operaciones con distintos tipos de números (Z, Q, I) con soluciones de diferentes campos numéricos, y resolver problemas de la vida real, seleccionando la forma de cálculo apropiada e interpretando y juzgando las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema; analiza la necesidad del uso de la tecnología.

Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica	
Unidad 1: números reales	
Objetivos generales del área	**Objetivos del área por subnivel**
OG.M.1. – OG.M.6.	O.M.4.2.
Objetivos de subnivel	**Valores**
OI.4.1. – OI.4.12	• La honestidad (I.2.),
Criterios de evaluación	**Indicadores de evaluación**
CE.M.4.2.	I.M.4.1.3. – I.M.4.2.2. – I.M.4.2.3.

Objetivos de la unidad

- Establecer relaciones de orden en un conjunto de números racionales e irracionales, con el empleo de la recta numérica (representación geométrica).
- Aplicar las propiedades algebraicas de las operaciones (adición y multiplicación) y las reglas de los radicales en el cálculo de ejercicios numéricos y algebraicos con operaciones combinadas; atiende correctamente la jerarquía de las operaciones.
- Expresar raíces como potencias con exponentes racionales, y emplea las potencias de números reales con exponentes enteros para leer y escribir en notación científica información que contenga números muy grandes o muy pequeños

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Álgebra y funciones	• Reconocer el conjunto de los números racionales Q e identificar sus elementos. • Reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción. • Representar y reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción. • Operar en Q (adición y multiplicación) resolviendo ejercicios numéricos. • Reconocer el conjunto de los números irracionales e identificar sus elementos. • Establecer relaciones de orden en un conjunto de números irracionales utilizando la recta numérica. • Reconocer el conjunto de los números reales R e identificar sus elementos.	• Muestre a los estudiantes las diversas situaciones en las cuales se aplican los números racionales y reales. • Comente a los estudiantes los diferentes usos que tienen las representaciones decimales de un racional • Aclare que una consecuencia directa de la jerarquía de las operaciones es la necesidad del uso del paréntesis, si se quiere alterar el orden indicado de esta jerarquía. • Recuerde cómo surgieron los números irracionales y cómo de esa forma se completa el conjunto de los números reales.	• Reconoce situaciones reales en las que se utilizan los números racionales y reales. • Aplica las operaciones con números reales en la resolución de problemas. • Aplica los algoritmos de la suma, la resta, la multiplicación y la división y efectúa operaciones combinadas con números reales.	**Actividad:** resuelve problemas que conducen a la aplicación de las operaciones de números reales.

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Álgebra y funciones	• Establecer relaciones de orden en un conjunto de números reales utilizando la recta numérica y la simbología • matemática (=, <, ≤, >, ≥). • Calcular expresiones numéricas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R. • Calcular adiciones y multiplicaciones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades en R • (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto). • Aplicar las potencias de números reales con exponentes enteros para la notación científica. • Simplificar expresiones numéricas aplicando las reglas de los radicales	• Recuerde a los estudiantes la necesidad de ampliar los diferentes conjuntos de números reales. • Cuente que las rectas y semirrecta contienen conjuntos de números reales que contienen elementos mayores, menores, mayores e iguales y menores e iguales. • Muestre la ubicación de algunos intervalos en la recta numérica y comente que a cada intervalo de la recta se le asigna una recta o semirrecta real y a cada número real. • Presente a los y las estudiantes situaciones en las cuales se emplee la notación científica. Lleve lecturas científicas que permitan la identificación de números en esta notación: distancias entre estrellas, la longitud de diámetros de algunos planetas • Explique a los estudiantes que para realizar operaciones con potencias de base diez, es necesario aplicar la propiedad distributiva.	• Aplica las reglas de potenciación y radicación en la simplificación de expresiones numéricas. • Aproxima decimales, en la simplificaión de expreciones numéricas. • Emplea las potencias de números reales con exponentes enteros para leer y escribir en • notación científica información que contenga números muy grandes o muy pequeños	**Técnica:** observación. **Instrumento:** registro descriptivo

Recursos: Materiales del medio, Tic, Texto Guía, Cuaderno de trabajo.
Bibliografía: Mason, J., Burton, L. (1992), Stacey Pensar matemáticamente Madrid: Ediciones/Labor..

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Muestre a los y las estudiantes las diversas situaciones en las cuales se aplican los números racionales; una de ellas es la que se presenta en la figura de la página del libro. Luego explique que el conjunto de los números racionales fue definido para que expresiones como 1/3 y 1/6 determinen un número y la división siempre esté definida (excepto por cero).

b. Además, cuénteles que los números racionales reciben ese nombre porque están relacionados con razón de enteros o división de enteros.

c. Hable de la simplificación y amplificación de números racionales, como procesos para la determinación de racionales equivalentes.

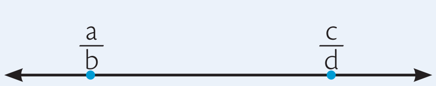
Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. En la ilustración se muestra la ubicación de la relación de orden menor que:

Relación de orden

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, porque $\frac{a}{b}$ esta a la izquierda de $\frac{c}{d}$ en la recta númerica.

Representación en la recta numérica



Bloque de Álgebra y funciones

1 Números racionales

Explora

La Figura 1 está dividida en regiones con cuatro colores diferentes.

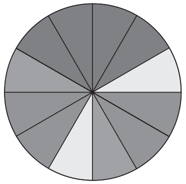


Figura 1

• ¿Cuáles colores ocupan la misma parte del círculo?

El círculo está dividido en doce regiones iguales, que están sombreadas con colores diferentes así:

- El color rojo ocupa cuatro regiones de la unidad.
- El color azul ocupa cuatro regiones de la unidad.
- El color amarillo ocupa dos regiones de la unidad.
- El color verde ocupa dos regiones de la unidad.

Por lo tanto, las regiones de color azul y rojo ocupan la misma parte del círculo y las regiones de color amarillo y verde ocupan también la misma cantidad.

1.1 Fracciones equivalentes

Al considerar el círculo de la Figura 1. como una unidad, se puede establecer que cada color ocupa una fracción de ella. En este caso, la distribución es:

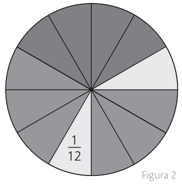


Figura 2

La región roja ocupa $\frac{1}{3}$ de la unidad.

La región azul ocupa $\frac{2}{6}$ de la unidad.

La región amarilla ocupa $\frac{1}{6}$ de la unidad.

La región verde ocupa $\frac{2}{12}$ de la unidad.

Además, se pueden establecer las siguientes comparaciones:

- Las regiones azul y roja ocupan la misma parte de la unidad. Por lo tanto, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ y se afirma que las fracciones son equivalentes.
- Las regiones amarilla y verde ocupan la misma parte de la unidad. Por lo tanto, $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ y se afirma que las fracciones son equivalentes.

Las **fracciones equivalentes** son aquellas fracciones que representan la misma parte de una unidad.

Ten en cuenta

Si dos fracciones son equivalentes, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Extremo → 2 / Medio → 6 ; 5 ← Medio / 15 ← Extremo

$$\frac{2}{6} = \frac{5}{15}$$

$$2 \cdot 15 = 6 \cdot 5$$

Dada una fracción, se pueden obtener fracciones equivalentes a ella, ya sea por **amplificación** o por **simplificación**.

- Se amplifica una fracción cuando se multiplica tanto el numerador como el denominador por un mismo número distinto de cero.
- Se simplifica una fracción cuando se divide tanto el numerador como el denominador por un mismo número distinto de cero.

Ten en cuenta

La Figura 3. representa la relación entre los conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Z}$. A partir de ella, se pueden identificar las características de cada conjunto.

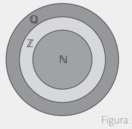


Figura 3

Ejemplo 1

Se pueden obtener fracciones equivalentes a $\frac{15}{60}$ de dos maneras.

Amplificación: $\frac{15}{60} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{30}{120} \underset{\times 3}{\overset{\times 3}{=}} \frac{90}{360}$

Simplificación: $\frac{15}{60} \underset{\div 3}{\overset{\div 3}{=}} \frac{5}{20} \underset{\div 5}{\overset{\div 5}{=}} \frac{1}{4}$

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer el conjunto de los números racionales Q e identificar sus elementos.

1.2 Números racionales

El **conjunto de los números racionales** ($\mathbb{Q}$) es el conjunto de números que se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros con $b \neq 0$.

Ejemplo 2

Estos son ejemplos de números racionales: $3, \frac{6}{13}, -12, \frac{8}{5}, 2, 0, -\frac{4}{7}$.

1.3 Orden en los números racionales

Dados dos números racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, se puede establecer una de estas relaciones:

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Actividad resuelta

Comunicación

1. Establece cuál de estos números, $-\frac{3}{5}$ o $-\frac{7}{10}$, es mayor.

Solución:
Para comparar números racionales, se utilizan criterios similares a los utilizados para comparar fracciones. Observa:

$$-\frac{3}{5} \qquad -\frac{7}{10}$$
$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$-\frac{6}{10} \qquad -\frac{7}{10}$$

Se reducen al mínimo común denominador, es decir, se obtienen fracciones equivalentes cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo de los dos denominadores.

$$-6 > -7$$

$$-\frac{6}{10} > -\frac{7}{10}$$

Se comparan los numeradores y se obtiene la conclusión.

App

Números racionales

Abre la aplicación *GRE Math Arithmetic Review LE* y enfréntate a cada uno de los retos asociados con conjuntos numéricos, sus operaciones y relaciones.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Encuentra cuatro fracciones equivalentes en cada caso.
   a. $\frac{7}{5}$ b. $\frac{4}{5}$ c. $\frac{30}{45}$
   d. $-\frac{16}{20}$ e. $-\frac{9}{5}$ f. $-\frac{1}{4}$

Comunicación

3. Calcula, en cada caso, la fracción irreducible.
   a. $\frac{30}{150}$ b. $\frac{28}{42}$ c. $\frac{18}{3}$

4. Explica qué diferencias hay entre números enteros y números racionales. Después, responde.
   a. ¿Todos los enteros son racionales?
   b. ¿Todos los números racionales son enteros?
   c. ¿Cuál es la relación entre los conjuntos $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$?
   d. ¿Cuál es la relación entre los conjuntos $\mathbb{N}$ y $\mathbb{Q}$?

Razonamiento

5. Escribe >, < o =, según corresponda.
   a. $-2 \ \square \ \frac{3}{5}$ b. $\frac{5}{9} \ \square \ \frac{-4}{9}$
   c. $\frac{5}{4} \ \square \ \frac{4}{7}$ d. $\frac{7}{-6} \ \square \ \frac{6}{5}$
   e. $\frac{5}{8} \ \square \ \frac{5}{7}$ f. $-\frac{6}{8} \ \square \ \frac{-3}{6}$
   g. $\frac{-6}{12} \ \square \ \frac{4}{12}$ h. $0 \ \square \ \frac{4}{13}$

Resolución de problemas

6. En un grupo de 100 personas, $\frac{2}{5}$ prefieren la música moderna; $\frac{3}{10}$, la música clásica y el resto, el jazz.
   a. ¿Qué parte del grupo prefiere el jazz o la música clásica?
   b. ¿Cuántas personas prefieren cada tipo de música?

Comunicación 1. $-\frac{6}{10} > -\frac{7}{10}$

Ejercitación

2. a. Respuesta libre b. Respuesta libre
   c. Respuesta libre d. Respuesta libre
   e. Respuesta libre f. Respuesta libre

Comunicación

3. a. $\frac{1}{5}$
   b. $\frac{2}{3}$
   c. 6

4. a. Sí
   b. No
   c. $\mathbb{Z}$ está contenido en $\mathbb{Q}$.
   d. $\mathbb{N}$ está contenido en $\mathbb{Q}$.

Razonamiento

5. a. < b. >
   c. > d. <
   e. < f. <
   g. < h. <

Resolución de problemas

6. a. $\frac{3}{10}$
   b. 40 personas escuchan música moderna, 30 personas música clásica y 30 jazz.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Los números racionales $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ se pueden expresar como números decimales:

$\frac{1}{4} = 0{,}25$ porque, $1 \div 4 = 0{,}25$.

y $\frac{1}{3} = 0{,}3333$ porque, $1 \div 3 = 0{,}3333$.

A cada número racional le corresponde una expresión decimal, que se halla dividiendo el numerador y denominador.

Expresión decimal y fraccionaria de un número racional

Los números racionales 1/2 y 1/4 se pueden expresar como números decimales.

La expresión decimal de cualquier número racional es exacta, periódica pura o periódica mixta.

1/2 = 0,25, porque 1:4 =0,25

1/2= 0,5, porque 1:2=0,5

A cada número racional le corresponde una expresión decimal, que se halla dividiendo el numerador entre el denominador.

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Comente a los estudiantes los diferentes usos que tienen las representaciones decimales de un racional. Por ejemplo para mencionar el tiempo empleado por los ganadores de algunas competencias, para conocer el saldo de una cuenta bancaria, etc..

b. Explique que como los números racionales representan razones entre dos magnitudes es posible escribir esa razón como una división, en la cual, el cociente no es un número entero sino un número decimal, y que para calcular ese decimal, basta dividir el numerador entre el denominador.

2 Expresiones fraccionaria y decimal de un número racional

Explora

La Figura 1 presenta el porcentaje de preferencias de tipos de deportes de un grupo de personas.

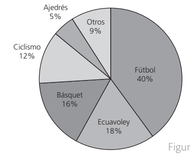


Figura 1

• ¿De qué otra manera se pueden representar estos porcentajes?

El porcentaje es un tipo de comparación entre dos cantidades: una indica la parte o un total y la otra corresponde al total o unidad. Entonces, todo porcentaje se puede escribir como una fracción. En las fracciones, el numerador corresponde al valor de la parte y el denominador es 100, ya que equivale al valor total de la unidad. (Tabla 1)

Tipo de deporte	Fútbol	Ecuavoley	Básquet	Ciclismo	Ajedrés	Otros
Porcentaje	40%	18%	16%	12%	5%	9%
Expresión fraccionaria	$\frac{40}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{9}{100}$

Tabla 1

Además, cada fracción se prodría escribir como un número decimal.

2.1 Expresión decimal de un número racional

Según la información de la Tabla 1, el valor 18% equivale a $\frac{18}{100}$ del total. Observa:

Porcentaje — Número racional — Expresión decimal

$$18\% = \frac{18}{100} = 0{,}18$$

La **expresión decimal** equivale a la división del numerador entre el denominador.

Ejemplo 1

• La expresión decimal de los porcentajes de la Figura 1 se calcula así:

Expresión fraccionaria	$\frac{40}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{16}{100}$	$\frac{12}{100}$	$\frac{5}{100}$	$\frac{9}{100}$
Expresión decimal	0,4	0,18	0,16	0,12	0,05	0,09

Tabla 2

Ten en cuenta

Para conocer qué tipo de expresión decimal tiene un número fraccionario, basta con identificar los factores primos de su denominador así:

- Si solo tiene como factores el 2 o el 5, la expresión decimal es exacta.
- Si contiene factores distintos de 2 y 5, la expresión es periódica pura.
- Si, además del 2 o del 5, tiene otros factores, la expresión es periódica mixta.

2.2 Clasificación de las expresiones decimales

De acuerdo con la estructura de las cifras decimales, la expresión decimal de un número racional puede ser **exacta**, **periódica pura** o **periódica mixta**.

Expresión decimal	Características	Ejemplo
Exacta	Tiene un número finito de cifras decimales. Equivale a una fracción decimal, es decir, una con denominador 10 o una potencia de 10.	$\frac{9}{2} = 4{,}5$
Periódica pura	Su parte decimal está formada por un grupo de cifras que se repite indefinidamente. Ese grupo se llama periodo.	$\frac{10}{3} = 3{,}33 = 3{,}\widehat{3}$
Periódica mixta	Su parte decimal está formada por un grupo de cifras que no se repite y un grupo de cifras que se repite indefinidamente. El grupo que no se repite se llama anteperiodo.	$\frac{25}{6} = 4{,}166 = 4{,}1\widehat{6}$

Tabla 3

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.

La clasificación de las expresiones decimales de los números racionales se puede resumir de la siguiente manera:

- Expresiones decimales
  - Exactas
  - Periódicas
    - Mixtas
    - Puras

Ejemplo 2

Al calcular la expresión decimal de los números $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{3}$ y $\frac{17}{6}$, se encuentra esto:

$$\frac{5}{4} = 1{,}25 \qquad \frac{7}{3} = 2{,}333\ldots \qquad \frac{17}{6} = 2{,}8333\ldots$$

De lo anterior, se deduce que las expresiones decimales son:

Exacta

Parte decimal

$$\frac{5}{4} = 1{,}25$$

Parte entera

Periódica pura

Periodo

$$\frac{7}{3} = 2{,}\widehat{3}$$

Parte entera

Periódica mixta

Periodo

$$\frac{17}{6} = 2{,}8\widehat{3}33$$

Parte entera Anteperiodo

2.3 Fracción generatriz de un número racional

Todo decimal exacto, periódico puro y periódico mixto tiene una representación fraccionaria llamada **fracción generatriz.**

Fracción generatriz de una expresión decimal exacta

La fracción generatriz de una expresión decimal exacta es aquella cuyo numerador es igual a la parte entera seguida por la parte decimal (sin la coma) y el denominador es una potencia de 10, con tantos ceros como cifras decimales tiene el número.

Ejemplo 3

La fracción generatriz de 4,3567 se puede conseguir así:

$$4{,}3567 = 4{,}3567 \cdot \frac{10\,000}{10\,000} = \frac{43\,567}{10\,000}$$

Fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura

La fracción generatriz de una expresión decimal periódica pura con parte entera nula tiene por numerador el periodo y por denominador el número formado por tantos nueves como cifras tenga el periodo. Si el número tiene parte entera distinta de cero, se calcula la fracción generatriz de la parte decimal y después se le suma la parte entera.

Ejemplo 4

La expresión decimal 13,735 735 735 735 735… es periódica pura y su periodo tiene tres cifras. Para encontrar su fracción generatriz, se puede proceder así:

$$13 + \frac{735}{999} = \frac{4\,574}{999}$$

Tantos nueves como cifras tenga el periodo

Ten en cuenta

La fracción generatriz de un número decimal exacto se calcula de la siguiente forma:

$$\frac{\text{Número sin coma}}{\underbrace{10\ldots0}}$$

Tantos ceros como cifras tenga la parte decimal.

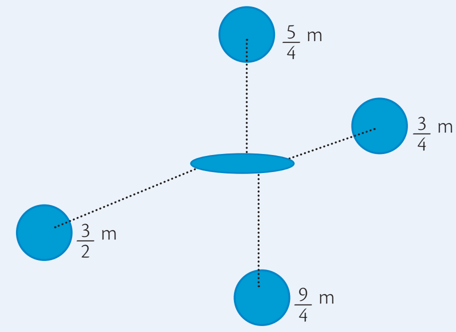
La fracción generatriz de un número decimal periódico puro se halla así:

$$\text{Parte entera} + \frac{\text{periodo}}{\underbrace{9\ldots9}}$$

Tantos nueves como cifras tenga el periodo.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. En la ilustración se muestra la ubicación de cuatro pelotas y la distancia de ellas a un hoyo.



¿Que tienen en común las distancias que se expresan?, ¿Cúal es la ubicación, en la recta numérica, de las cantidades que aparecen en la ilustración?

Actividades TIC

Ingresa a este link:

https://phet.colorado.edu/es/simulation/legacy/build-a-fraction

Crea una fracción, hasta el nivel que puedas

Actividades colaborativas

Forme grupos de cuatro estudiantes, pídales que reúnan las pinturas de los cuatro estudiantes y determinen la fracción que representa la suma de los colores amarillo, azul y rojo con respecto al total de pinturas del grupo de trabajo.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Una fracción puede dar un número decimal periódico:

$\frac{1}{9} = 0{,}1111111111\ldots$ $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$

$\frac{1}{3} = 0{,}333333333333$ $\frac{2}{27} = 0{,}074074074\ldots$

$\frac{7}{12} = 0{,}58333333\ldots$

Dado un número periódico en su representación decimal, es posible encontrar la fracción que lo produce (fracción generatriz). Ejemplo:

$x = 0{,}3333....$

$10x = 3{,}3333....$ (multiplicando por 10 ambos miembros)

$9x = 3$ (restando segunda fila menos primera fila)

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Halla la expresión decimal de cada número racional.

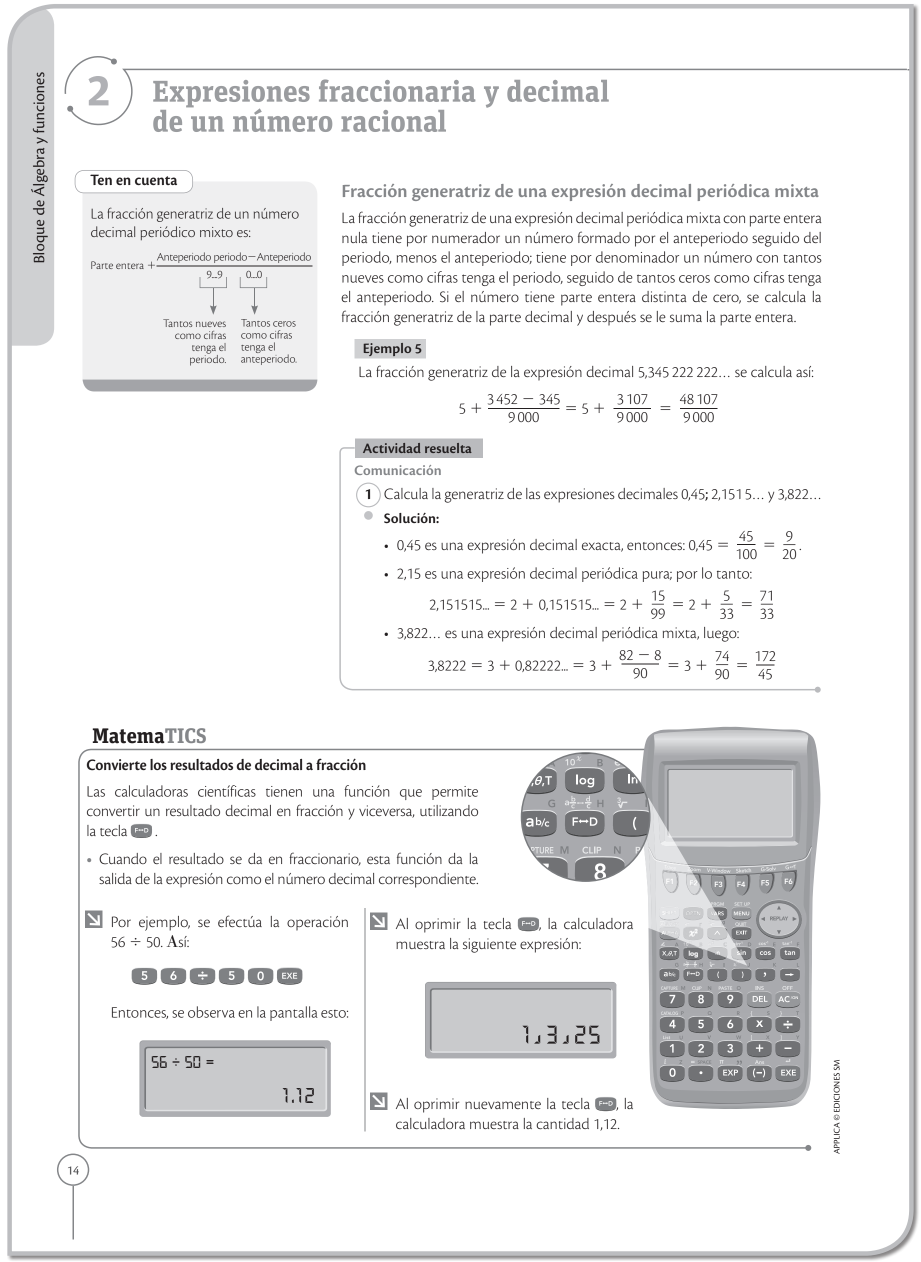
   a. $\frac{6}{5}$ b. $-\frac{10}{3}$ c. $\frac{15}{8}$

   d. $\frac{4}{3}$ e. $-\frac{5}{6}$ f. $\frac{12}{5}$

2. Encuentra y determina el tipo de expresión decimal de cada número.

   a. $\frac{13}{5}$ b. $\frac{3}{4}$ c. $\frac{14}{3}$

   d. $-\frac{11}{4}$ e. $\frac{1}{9}$ f. $-\frac{8}{11}$



Bloque de Álgebra y funciones

2 Expresiones fraccionaria y decimal de un número racional

Ten en cuenta

La fracción generatriz de un número decimal periódico mixto es:

$$\text{Parte entera} + \frac{\text{Anteperiodo periodo} - \text{Anteperiodo}}{9...9\ \ 0...0}$$

Tantos nueves como cifras tenga el periodo. Tantos ceros como cifras tenga el anteperiodo.

Fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta

La fracción generatriz de una expresión decimal periódica mixta con parte entera nula tiene por numerador un número formado por el anteperiodo seguido del periodo, menos el anteperiodo; tiene por denominador un número con tantos nueves como cifras tenga el periodo, seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperiodo. Si el número tiene parte entera distinta de cero, se calcula la fracción generatriz de la parte decimal y después se le suma la parte entera.

Ejemplo 5

La fracción generatriz de la expresión decimal 5,345 222 222… se calcula así:

$$5 + \frac{3\,452 - 345}{9\,000} = 5 + \frac{3\,107}{9\,000} = \frac{48\,107}{9\,000}$$

Actividad resuelta

Comunicación

1 Calcula la generatriz de las expresiones decimales 0,45; 2,151 5… y 3,822…

Solución:

- 0,45 es una expresión decimal exacta, entonces: $0{,}45 = \frac{45}{100} = \frac{9}{20}$.
- 2,15 es una expresión decimal periódica pura; por lo tanto:

$$2{,}151515... = 2 + 0{,}151515... = 2 + \frac{15}{99} = 2 + \frac{5}{33} = \frac{71}{33}$$

- 3,822… es una expresión decimal periódica mixta, luego:

$$3{,}8222 = 3 + 0{,}82222... = 3 + \frac{82 - 8}{90} = 3 + \frac{74}{90} = \frac{172}{45}$$

MatemaTICS

Convierte los resultados de decimal a fracción

Las calculadoras científicas tienen una función que permite convertir un resultado decimal en fracción y viceversa, utilizando la tecla F↔D.

- Cuando el resultado se da en fraccionario, esta función da la salida de la expresión como el número decimal correspondiente.

Por ejemplo, se efectúa la operación 56 ÷ 50. Así:

5 6 ÷ 5 0 EXE

Entonces, se observa en la pantalla esto:

56 ÷ 50 =
1.12

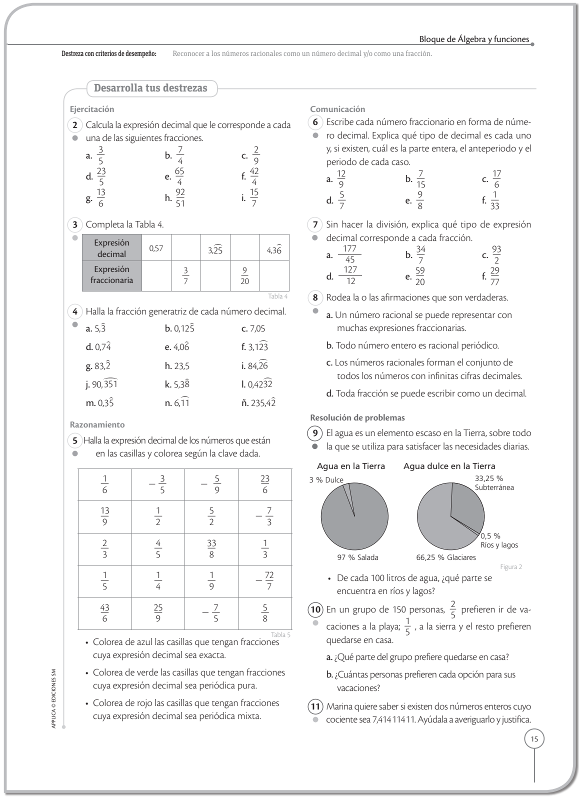
Al oprimir la tecla F↔D, la calculadora muestra la siguiente expresión:

1⌟3⌟25

Al oprimir nuevamente la tecla F↔D, la calculadora muestra la cantidad 1,12.

14

APPLICA © EDICIONES SM


Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula la expresión decimal que le corresponde a cada una de las siguientes fracciones.

a. $\frac{3}{5}$ b. $\frac{7}{4}$ c. $\frac{2}{9}$

d. $\frac{23}{5}$ e. $\frac{65}{4}$ f. $\frac{42}{4}$

g. $\frac{13}{6}$ h. $\frac{92}{51}$ i. $\frac{15}{7}$

3 Completa la Tabla 4.

Expresión decimal	0,57		$3,\widehat{25}$		$4,3\widehat{6}$
Expresión fraccionaria		$\frac{3}{7}$		$\frac{9}{20}$	

Tabla 4

4 Halla la fracción generatriz de cada número decimal.

a. $5,\widehat{3}$ b. $0,12\widehat{5}$ c. 7,05

d. $0,7\widehat{4}$ e. $4,0\widehat{6}$ f. $3,1\widehat{23}$

g. $83,\widehat{2}$ h. 23,5 i. $84,\widehat{26}$

j. $90,\widehat{351}$ k. $5,3\widehat{8}$ l. $0,42\widehat{32}$

m. $0,3\widehat{5}$ n. $6,\widehat{11}$ ñ. $235,4\widehat{2}$

Razonamiento

5 Halla la expresión decimal de los números que están en las casillas y colorea según la clave dada.

$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{5}{9}$	$\frac{23}{6}$
$\frac{13}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{7}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{33}{8}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{72}{7}$
$\frac{43}{6}$	$\frac{25}{9}$	$-\frac{7}{5}$	$\frac{5}{8}$

Tabla 5

- Colorea de azul las casillas que tengan fracciones cuya expresión decimal sea exacta.
- Colorea de verde las casillas que tengan fracciones cuya expresión decimal sea periódica pura.
- Colorea de rojo las casillas que tengan fracciones cuya expresión decimal sea periódica mixta.

Comunicación

6 Escribe cada número fraccionario en forma de número decimal. Explica qué tipo de decimal es cada uno y, si existen, cuál es la parte entera, el anteperiodo y el periodo de cada caso.

a. $\frac{12}{9}$ b. $\frac{7}{15}$ c. $\frac{17}{6}$

d. $\frac{5}{7}$ e. $\frac{9}{8}$ f. $\frac{1}{33}$

7 Sin hacer la división, explica qué tipo de expresión decimal corresponde a cada fracción.

a. $\frac{177}{45}$ b. $\frac{34}{7}$ c. $\frac{93}{2}$

d. $\frac{127}{12}$ e. $\frac{59}{20}$ f. $\frac{29}{77}$

8 Rodea la o las afirmaciones que son verdaderas.

a. Un número racional se puede representar con muchas expresiones fraccionarias.

b. Todo número entero es racional periódico.

c. Los números racionales forman el conjunto de todos los números con infinitas cifras decimales.

d. Toda fracción se puede escribir como un decimal.

Resolución de problemas

9 El agua es un elemento escaso en la Tierra, sobre todo la que se utiliza para satisfacer las necesidades diarias.

Figura 2

- De cada 100 litros de agua, ¿qué parte se encuentra en ríos y lagos?

10 En un grupo de 150 personas, $\frac{2}{5}$ prefieren ir de vacaciones a la playa; $\frac{1}{5}$, a la sierra y el resto prefieren quedarse en casa.

a. ¿Qué parte del grupo prefiere quedarse en casa?

b. ¿Cuántas personas prefieren cada opción para sus vacaciones?

11 Marina quiere saber si existen dos números enteros cuyo cociente sea 7,414 114 11. Ayúdala a averiguarlo y justifica.

APPLICA © EDICIONES SM

15

2. a. 0,6 b. 1,75 c. 0,222

d. 4,6 e. 16,25 f. 10,5

g. 2,1666 h. 1,8039 i. 2,1428

3.

Expresión decimal	0,57	0,4285	3,25	0,45	4,36
Expresión fraccionaria	$\frac{57}{100}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{109}{25}$

4. a. $\frac{16}{3}$ b. $\frac{113}{900}$ c. $\frac{141}{20}$

d. $\frac{67}{90}$ e. $\frac{61}{15}$ f. $\frac{1546}{495}$

g. $\frac{749}{2}$ h. $\frac{47}{2}$ i. $\frac{8342}{99}$

j. $\frac{3343}{37}$ k. $\frac{97}{18}$ l. $\frac{419}{990}$

m. $\frac{16}{45}$ n. $\frac{55}{9}$ ñ. $\frac{10594}{45}$

Razonamiento

5.

$0.1\widehat{6}$ rojo	−0.6 azul	$-0.\widehat{5}$ verde	$3.8\widehat{3}$ rojo
$1.\widehat{4}$ verde	0,5 azul	2,5 azul	$-2.\widehat{3}$ verde
$0.\widehat{6}$ verde	0,8 azul	4,125 azul	$0.\widehat{3}$ verde
0,2 azul	0,25 azul	$0,\widehat{1}$ verde	−10,2 azul
$7,1\widehat{6}$ rojo	$2.\widehat{7}$ verde	−1,4 azul	0,625 azul

Comunicación

6.

decimal	Tipo de decimal	Parte entera	anteperiodo	periodo
$1,\widehat{3}$	pura	1		3
$0,4\widehat{6}$	mixta	0	4	6
$2,8\widehat{3}$	mixta	2	8	3
0,714285	pura	0		714285
1,125	exacta	1		
$0,0\widehat{30}$	mixta	0	1	30

7. a. Periódica mixta

b. Periódica pura

c. Exacta

d. Periódica mixta

e. Exacta

f. Periódica pura

8. a. V b. F

c. F d. V

Resolución de problemas

9. 0,5 litros

10. a. $\frac{2}{5}$

b. Prefieren ir a la playa 60 personas, vacaciones a la sierra 30 y 60 prefieren quedarse en casa.

11. No existen

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Indique a los estudiantes que al igual que los enteros, los números racionales se ubican en la recta numérica determinando dos sentidos: el negativo (números ubicados a la izquierda de cero) y el positivo (números ubicados a la derecha de cero).

b. La ubicación de los números racionales en la recta numérica es similar al proceso estudiado en grados anteriores sobre los números fraccionarios, solo que en esta oportunidad se incluyen los números negativos. Es importante que entiendan la contenencia entre los conjuntos numéricos estudiados y comprendan que la representación de algunos racionales en la recta numérica como:
$\frac{12}{4}$ y - $\frac{9}{3}$ coinciden con los enteros 4 y -3, que también son racionales.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Escribe $>$ o $<$ para comparar cada par de fracciones.

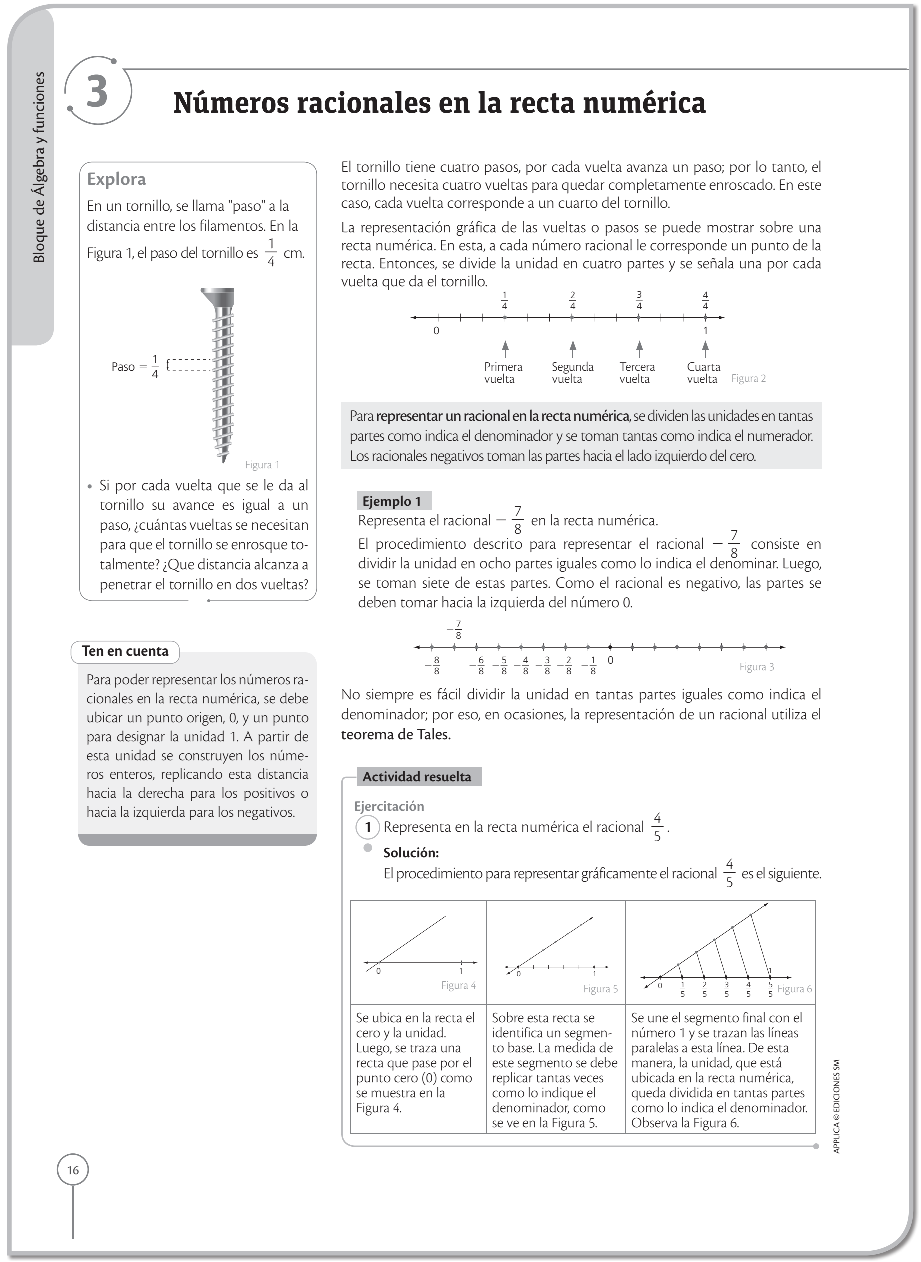
a. $\frac{3}{5}$ ☐ $\frac{1}{5}$ b. $\frac{6}{5}$ ☐ $\frac{7}{3}$

c. $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{2}{9}$ d. $\frac{6}{3}$ ☐ $\frac{8}{7}$

2. Escribe una fracción menor que cada una de las fracciones dadas.

a. $\frac{2}{8}$ b. $\frac{8}{3}$ c. $\frac{7}{11}$

d. $\frac{6}{9}$ e. $\frac{7}{12}$ f. $-\frac{8}{12}$



Bloque de Álgebra y funciones

3 Números racionales en la recta numérica

Explora

En un tornillo, se llama "paso" a la distancia entre los filamentos. En la Figura 1, el paso del tornillo es $\frac{1}{4}$ cm.

Paso = $\frac{1}{4}$

Figura 1

- Si por cada vuelta que se le da al tornillo su avance es igual a un paso, ¿cuántas vueltas se necesitan para que el tornillo se enrosque totalmente? ¿Que distancia alcanza a penetrar el tornillo en dos vueltas?

El tornillo tiene cuatro pasos, por cada vuelta avanza un paso; por lo tanto, el tornillo necesita cuatro vueltas para quedar completamente enroscado. En este caso, cada vuelta corresponde a un cuarto del tornillo.

La representación gráfica de las vueltas o pasos se puede mostrar sobre una recta numérica. En esta, a cada número racional le corresponde un punto de la recta. Entonces, se divide la unidad en cuatro partes y se señala una por cada vuelta que da el tornillo.

$\frac{1}{4}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{4}$
0 1
Primera vuelta Segunda vuelta Tercera vuelta Cuarta vuelta

Figura 2

Para **representar un racional en la recta numérica**, se dividen las unidades en tantas partes como indica el denominador y se toman tantas como indica el numerador. Los racionales negativos toman las partes hacia el lado izquierdo del cero.

Ejemplo 1

Representa el racional $-\frac{7}{8}$ en la recta numérica.

El procedimiento descrito para representar el racional $-\frac{7}{8}$ consiste en dividir la unidad en ocho partes iguales como lo indica el denominar. Luego, se toman siete de estas partes. Como el racional es negativo, las partes se deben tomar hacia la izquierda del número 0.

$-\frac{7}{8}$
$-\frac{8}{8}$ $-\frac{6}{8}$ $-\frac{5}{8}$ $-\frac{4}{8}$ $-\frac{3}{8}$ $-\frac{2}{8}$ $-\frac{1}{8}$ 0

Figura 3

No siempre es fácil dividir la unidad en tantas partes iguales como indica el denominador; por eso, en ocasiones, la representación de un racional utiliza el **teorema de Tales.**

Ten en cuenta

Para poder representar los números racionales en la recta numérica, se debe ubicar un punto origen, 0, y un punto para designar la unidad 1. A partir de esta unidad se construyen los números enteros, replicando esta distancia hacia la derecha para los positivos o hacia la izquierda para los negativos.

Actividad resuelta

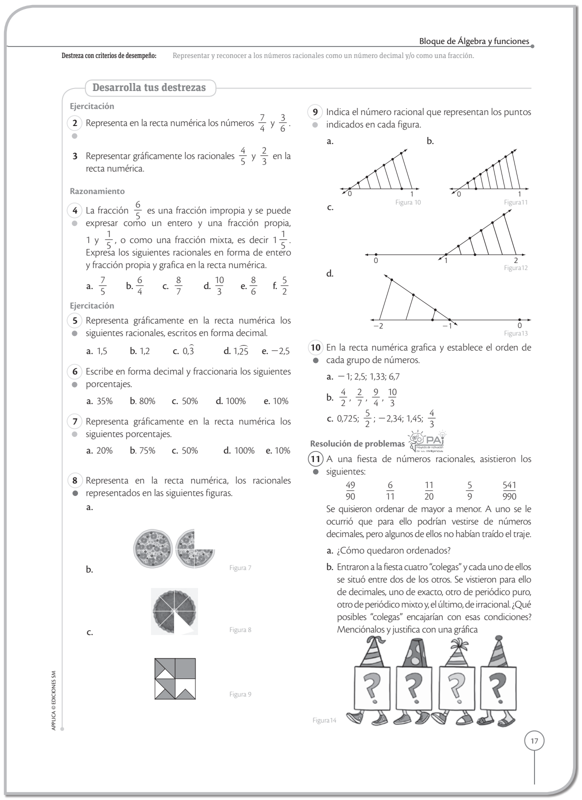
Ejercitación

1 Representa en la recta numérica el racional $\frac{4}{5}$.

Solución:

El procedimiento para representar gráficamente el racional $\frac{4}{5}$ es el siguiente.

0 1 Figura 4	0 1 Figura 5	0 $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{5}$ 1 Figura 6
Se ubica en la recta el cero y la unidad. Luego, se traza una recta que pase por el punto cero (0) como se muestra en la Figura 4.	Sobre esta recta se identifica un segmento base. La medida de este segmento se debe replicar tantas veces como lo indique el denominador, como se ve en la Figura 5.	Se une el segmento final con el número 1 y se trazan las líneas paralelas a esta línea. De esta manera, la unidad, que está ubicada en la recta numérica, queda dividida en tantas partes como lo indica el denominador. Observa la Figura 6.


Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Representar y reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Representa en la recta numérica los números $\frac{7}{4}$ y $\frac{3}{6}$.

3 Representar gráficamente los racionales $\frac{4}{5}$ y $\frac{2}{3}$ en la recta numérica.

Razonamiento

4 La fracción $\frac{6}{5}$ es una fracción impropia y se puede expresar como un entero y una fracción propia, 1 y $\frac{1}{5}$, o como una fracción mixta, es decir $1\frac{1}{5}$. Expresa los siguientes racionales en forma de entero y fracción propia y grafica en la recta numérica.

a. $\frac{7}{5}$ b. $\frac{6}{4}$ c. $\frac{8}{7}$ d. $\frac{10}{3}$ e. $\frac{8}{6}$ f. $\frac{5}{2}$

Ejercitación

5 Representa gráficamente en la recta numérica los siguientes racionales, escritos en forma decimal.

a. 1,5 b. 1,2 c. $0,\widehat{3}$ d. $1,\widehat{25}$ e. −2,5

6 Escribe en forma decimal y fraccionaria los siguientes porcentajes.

a. 35% b. 80% c. 50% d. 100% e. 10%

7 Representa gráficamente en la recta numérica los siguientes porcentajes.

a. 20% b. 75% c. 50% d. 100% e. 10%

8 Represena en la recta numérica, los racionales representados en las siguientes figuras.

a. Figura 7

b. Figura 8

c. Figura 9

9 Indica el número racional que representan los puntos indicados en cada figura.

a. Figura 10 b. Figura11 c. Figura12 d. Figura13

10 En la recta numérica grafica y establece el orden de cada grupo de números.

a. − 1; 2,5; 1,33; 6,7

b. $\frac{4}{2}, \frac{2}{7}, \frac{9}{4}, \frac{10}{3}$

c. 0,725; $\frac{5}{2}$; −2,34; 1,45; $\frac{4}{3}$

Resolución de problemas

11 A una fiesta de números racionales, asistieron los siguientes:

$\frac{49}{90}$ $\frac{6}{11}$ $\frac{11}{20}$ $\frac{5}{9}$ $\frac{541}{990}$

Se quisieron ordenar de mayor a menor. A uno se le ocurrió que para ello podrían vestirse de números decimales, pero algunos de ellos no habían traído el traje.

a. ¿Cómo quedaron ordenados?

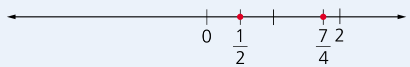
b. Entraron a la fiesta cuatro "colegas" y cada uno de ellos se situó entre dos de los otros. Se vistieron para ello de decimales, uno de exacto, otro de periódico puro, otro de periódico mixto y, el último, de irracional. ¿Qué posibles "colegas" encajarían con esas condiciones? Menciónalos y justifica con una gráfica

Figura14

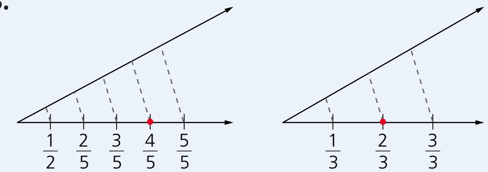
17

Ejercitación

2.



3.

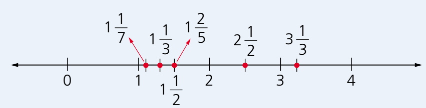


Razonamiento

4. a. $1\frac{2}{5}$ b. $1\frac{1}{2}$

c. $1\frac{1}{7}$ d. $3\frac{1}{3}$

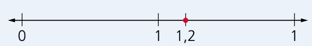
e. $1\frac{1}{3}$ f. $2\frac{1}{2}$



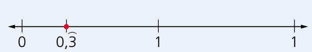
Ejercitación

5. a. 1,5

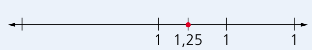
b. 1,2



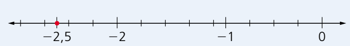
c. $0.\widehat{3}$



d. 1,25



e. −2,5



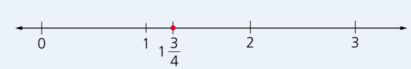
6. a. $\frac{35}{100} = 0{,}35$ b. $\frac{80}{100} = 0{,}8$

c. $\frac{50}{100} = 0{,}5$ d. $\frac{100}{100} = 1$

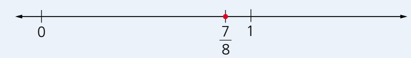
e. $\frac{10}{100} = 0{,}1$

7.

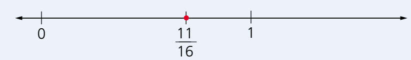
8. a. $1\frac{3}{4}$



b. $\frac{7}{8}$



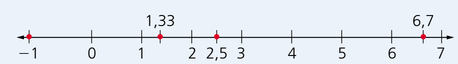
c. $\frac{11}{16}$



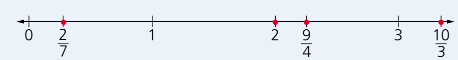
9. a. $\frac{5}{6}$ b. $\frac{2}{8}$

c. $1\frac{2}{5}$ d. $-1\frac{1}{3}$

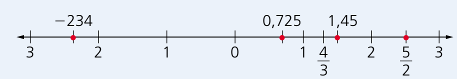
10. a.



b.



c.



Resolucion de problemas

11. a. $\frac{5}{9}, \frac{11}{20}, \frac{541}{990}, \frac{6}{11}, \frac{49}{90}$

b. Respuesta libre

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Es importante revisar los conocimientos previos de los estudiantes sobre las propiedades de los números enteros y sus operaciones.

b. Indique que el algoritmo para la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación de fracciones y decimales, estudiados en cursos anteriores, son los mismos que se aplicarán para operar números racionales, la diferencia radica en la inclusión de números negativos.

c. Es importante contextualizar las operaciones que se definen.

d. En la página se presenta un problema en el cual se hace uso de las operaciones con fracciones. Pida que lo lean y lo analicen.

e. Aclare que una consecuencia directa de la jerarquía de las operaciones es la necesidad del uso del paréntesis, si se quiere alterar el orden indicado de esta jerarquía. Plantee ejercicios en los cuales se observen ejercicios idénticos entre sí, excepto por algún paréntesis o aquellos en los cuales se encuentran resultados diferentes colocando paréntesis en distintos lugares de la operación.

F. Además de la jerarquia de las operaciones se debe tomar en cuenta que, en determinados ejercicios, se pide la resolución de raices que tienen dentro sumas o resta, multiplicaciones y divisiones. No hay una regla fija para la resolución sino la lógica y aplicación de propiedades.

4 Operaciones con números racionales

Explora

Una bañera se puede llenar por medio de dos llaves: la llave *A* la llena en 30 minutos y la llave *B* la llena en 20 minutos.

- ¿En cuánto tiempo se llenará la bañera si se abren las dos llaves al mismo tiempo?

La velocidad con la que se llena la bañera con la llave *A* se puede escribir como un número racional $\frac{1}{30}$. Igualmente, la velocidad de la llave *B* corresponde al racional $\frac{1}{20}$. Para calcular la velocidad con la que se llena el tanque al abrir las dos llaves, se deben adicionar las dos velocidades, es decir: $\frac{1}{30} + \frac{1}{20}$. Entonces:

Se calcula el m.c.m. de los denominadores	m.c.m. $(30, 20) = 60$.
Se buscan las fracciones equivalentes a $\frac{1}{30}$ y $\frac{1}{20}$, con denominador 60.	Son: $\frac{2}{60}$ y $\frac{3}{60}$.
Se adicionan las fracciones obtenidas y, si es posible, se simplifica el resultado.	$\frac{2}{60} + \frac{3}{60} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$

Como la suma de las dos velocidades es $\frac{5}{60}$, se concluye que las dos llaves llenan cinco bañeras en 60 minutos y que las dos llaves llenan una bañera en 12 minutos ($\frac{1}{12}$).

Para resolver ciertas situaciones, es necesario aplicar **operaciones entre racionales,** tales como la adición, la sustracción, la división, la multiplicación y la potenciación.

Si $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con b y $d \neq 0$, y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces las operaciones con números reales se pueden definir como se muestra a continuación.

Adición	
$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$
Sustracción	
$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$	$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$
Multiplicación y división	
$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Potenciación y radicación			
$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$
$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$	$\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$	$\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{a^{\frac{n}{m}}}{b^{\frac{n}{m}}} = \frac{\sqrt[m]{a^n}}{\sqrt[m]{b^n}}$	

Ten en cuenta

Las propiedades de las potencias para números enteros se aplican también en los números racionales. Observa.

Si $a, b \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0$, y $m, n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$a^n = a \times a \times a \times a \times \ldots \times a$

$a^0 = 1$

$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

$a^m \times a^n = a^{m+n}$

$a^m \times b^m = (a \cdot b)^m$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[n]{a^m}$

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Resuelve estas operaciones: $\frac{3}{13} + \frac{-14}{13}$, $\sqrt[4]{\frac{6}{15}}$, $\frac{-25}{32} \times \frac{12}{20}$ y $\left(\frac{7}{3}\right)^3$.

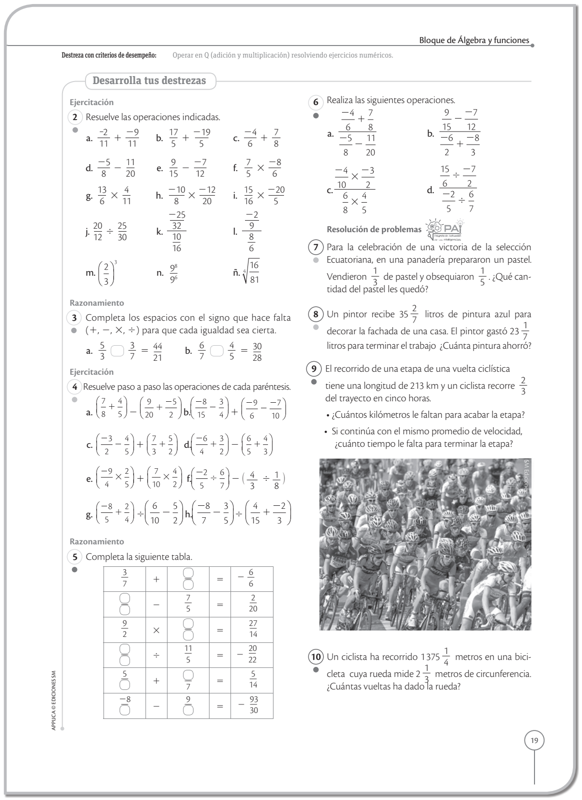
Solución:

a. $\frac{3}{13} + \frac{-14}{13} = \frac{3+(-14)}{13} = \frac{-11}{13}$

b. $\sqrt[4]{\frac{6}{15}} = \frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{15}}$

c. $\frac{-25}{32} \times \frac{12}{20} = \frac{(-25) \cdot (12)}{(32) \cdot (20)} = \frac{-300}{640} = \frac{-15}{32}$

d. $\left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{7^3}{3^3} = \frac{343}{27}$



Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Operar en Q (adición y multiplicación) resolviendo ejercicios numéricos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve las operaciones indicadas.

a. $\frac{-2}{11}+\frac{-9}{11}$ b. $\frac{17}{5}+\frac{-19}{5}$ c. $\frac{-4}{6}+\frac{7}{8}$

d. $\frac{-5}{8}-\frac{11}{20}$ e. $\frac{9}{15}-\frac{-7}{12}$ f. $\frac{7}{5}\times\frac{-8}{6}$

g. $\frac{13}{6}\times\frac{4}{11}$ h. $\frac{-10}{8}\times\frac{-12}{20}$ i. $\frac{15}{16}\times\frac{-20}{5}$

j. $\frac{20}{12}\div\frac{25}{30}$ k. $\frac{\frac{-25}{32}}{\frac{10}{16}}$ l. $\frac{\frac{-2}{9}}{\frac{8}{6}}$

m. $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ n. $\frac{9^8}{9^6}$ ñ. $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$

Razonamiento

3 Completa los espacios con el signo que hace falta $(+, -, \times, \div)$ para que cada igualdad sea cierta.

a. $\frac{5}{3}\ \square\ \frac{3}{7}=\frac{44}{21}$ b. $\frac{6}{7}\ \square\ \frac{4}{5}=\frac{30}{28}$

Ejercitación

4 Resuelve paso a paso las operaciones de cada paréntesis.

a. $\left(\frac{7}{8}+\frac{4}{5}\right)-\left(\frac{9}{20}+\frac{-5}{2}\right)$ b. $\left(\frac{-8}{15}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{-9}{6}-\frac{-7}{10}\right)$

c. $\left(\frac{-3}{2}-\frac{4}{5}\right)+\left(\frac{7}{3}+\frac{5}{2}\right)$ d. $\left(\frac{-6}{4}+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{6}{5}+\frac{4}{3}\right)$

e. $\left(\frac{-9}{4}\times\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{7}{10}\times\frac{4}{2}\right)$ f. $\left(\frac{-2}{5}\div\frac{6}{7}\right)-\left(\frac{4}{3}\div\frac{1}{8}\right)$

g. $\left(\frac{-8}{5}+\frac{2}{4}\right)\div\left(\frac{6}{10}-\frac{5}{2}\right)$ h. $\left(\frac{-8}{7}-\frac{3}{5}\right)\div\left(\frac{4}{15}+\frac{-2}{3}\right)$

Razonamiento

5 Completa la siguiente tabla.

$\frac{3}{7}$	$+$	$\frac{\square}{\square}$	$=$	$-\frac{6}{6}$
$\frac{\square}{\square}$	$-$	$\frac{7}{5}$	$=$	$\frac{2}{20}$
$\frac{9}{2}$	$\times$	$\frac{\square}{\square}$	$=$	$\frac{27}{14}$
$\frac{\square}{\square}$	$\div$	$\frac{11}{5}$	$=$	$-\frac{20}{22}$
$\frac{5}{\square}$	$+$	$\frac{\square}{7}$	$=$	$\frac{5}{14}$
$\frac{-8}{\square}$	$-$	$\frac{9}{\square}$	$=$	$-\frac{93}{30}$

6 Realiza las siguientes operaciones.

a. $\frac{\frac{-4}{6}+\frac{7}{8}}{\frac{-5}{8}-\frac{11}{20}}$ b. $\frac{\frac{9}{15}-\frac{-7}{12}}{\frac{-6}{2}+\frac{-8}{3}}$

c. $\frac{\frac{-4}{10}\times\frac{-3}{2}}{\frac{6}{8}\times\frac{4}{5}}$ d. $\frac{\frac{15}{6}\div\frac{-7}{2}}{\frac{-2}{5}\div\frac{6}{7}}$

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

7 Para la celebración de una victoria de la selección Ecuatoriana, en una panadería prepararon un pastel. Vendieron $\frac{1}{3}$ de pastel y obsequiaron $\frac{1}{5}$. ¿Qué cantidad del pastel les quedó?

8 Un pintor recibe $35\frac{2}{7}$ litros de pintura azul para decorar la fachada de una casa. El pintor gastó $23\frac{1}{7}$ litros para terminar el trabajo ¿Cuánta pintura ahorró?

9 El recorrido de una etapa de una vuelta ciclística tiene una longitud de 213 km y un ciclista recorre $\frac{2}{3}$ del trayecto en cinco horas.

- ¿Cuántos kilómetros le faltan para acabar la etapa?
- Si continúa con el mismo promedio de velocidad, ¿cuánto tiempo le falta para terminar la etapa?

SM Ediciones

10 Un ciclista ha recorrido $1\,375\frac{1}{4}$ metros en una bicicleta cuya rueda mide $2\frac{1}{3}$ metros de circunferencia. ¿Cuántas vueltas ha dado la rueda?

APPLICA © EDICIONES SM

19

Ejercitacion

2. a. -1 b. $-\frac{2}{5}$ c. $\frac{5}{24}$

d. $-\frac{47}{40}$ e. $\frac{71}{60}$ f. $-\frac{28}{15}$

g. $\frac{26}{33}$ h. $\frac{3}{4}$ i. $-\frac{15}{4}$

j. 2 k. $-\frac{5}{4}$ l. $-\frac{1}{6}$

m. $\frac{8}{27}$ n. 9^2 ñ. $\frac{2}{3}$

Razonamiento

3. a. $+$ b. $\div$

Ejercitación

4. a. $\frac{149}{40}$ b. $-\frac{25}{12}$ c. $\frac{38}{15}$

d. $-\frac{38}{15}$ e. $\frac{1}{2}$ f. $-\frac{153}{15}$

g. $\frac{11}{19}$ h. $\frac{61}{14}$

Razonamiento

5.

$\frac{3}{7}$	$+$	$-\frac{23}{21}$	$=$	$-\frac{4}{6}$
$\frac{3}{2}$	$-$	$\frac{7}{5}$	$=$	$\frac{2}{20}$
$\frac{9}{2}$	$\cdot$	$\frac{3}{7}$	$=$	$\frac{27}{14}$
-2	$\div$	$\frac{11}{5}$	$=$	$-\frac{20}{22}$
$\frac{5}{2}$	$+$	$-\frac{15}{7}$	$=$	$\frac{5}{14}$
$-\frac{8}{5}$	$-$	$\frac{9}{6}$	$=$	$-\frac{93}{30}$

6. a. $-\frac{25}{141}$ b. $-\frac{71}{340}$

c. 1. d. $\frac{75}{49}$

Resolución de problemas

7. Quedaron $\frac{7}{15}$ de pastel.

8. El pintor ahorro $12\frac{1}{7}$

9. Al ciclista le faltan 71 km por recorrer.

Al ciclista le faltan 2,5 horas para terminar la etapa.

10. El ciclista ha dado $589\frac{11}{28}$ vueltas.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

Números irracionales

a. Comente a los estudiantes el origen de los números irracionales con el número π y la lectura, de ten en cuenta, que se presenta en la página del libro.

b Explique que fueron los pitagóricos quienes descubrieron, la imposibilidad de explicar las relaciones geométricas, empleando unidamente los números naturales.

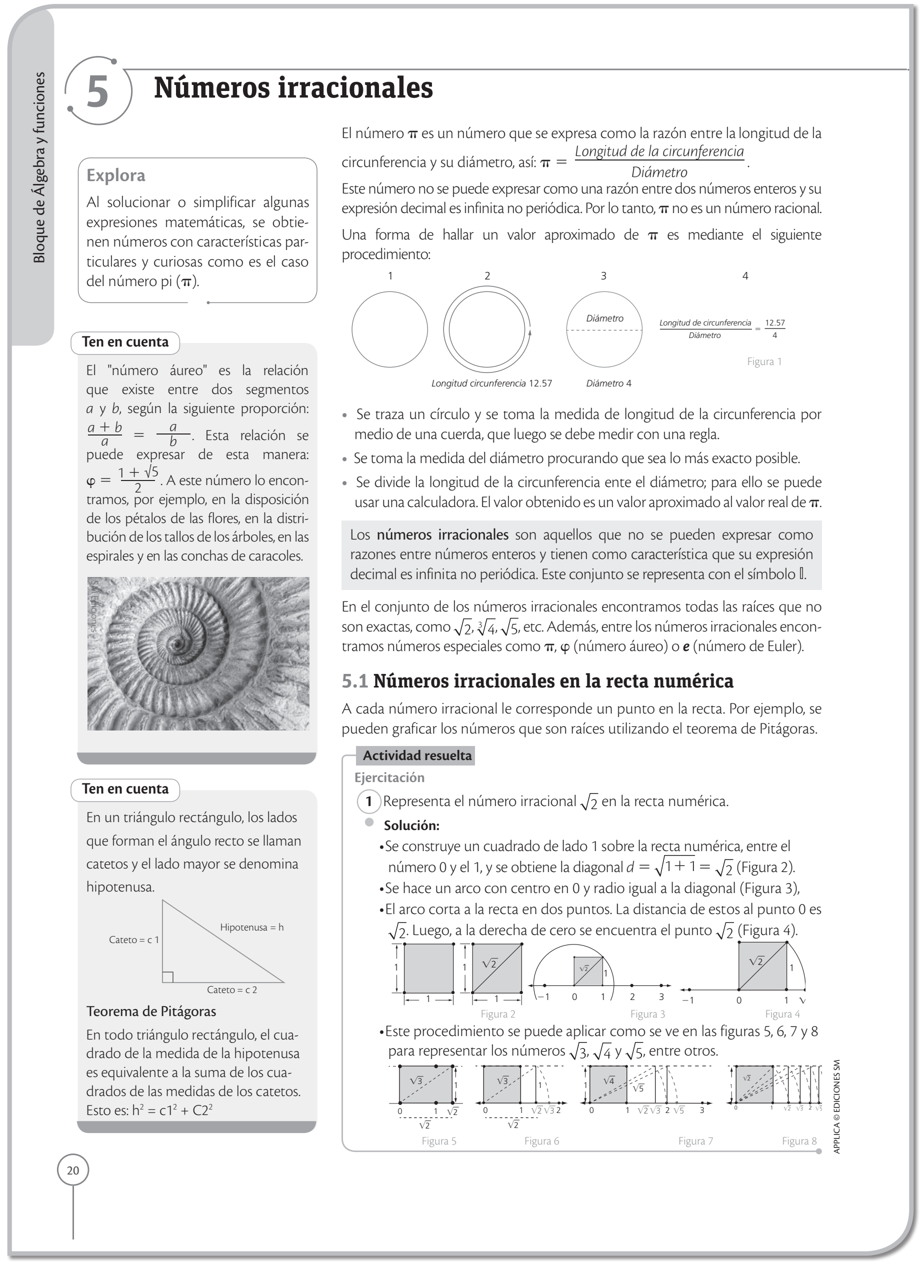
Números irracionales en la recta numérica

c. Recuerde en qué consiste el teorema de Pitágoras, y su aporte al descubrimiento de los números irracionales.

d. Pida a los estudiantes que realicen la construcción del número √2 como se indica en la página del libro. Aclare que dicha construcción justifica geométricamente, por qué la relación entre la diagonal de un cuadrado y su lado no puede expresarse mediante una razón de números enteros o un número racional.

e. Como √2 es la diagonal del cuadrado de lado, la unidad, entonces es un número irracional.

F. Pida a los estudiantes que realizen el mismo procedimiento para representar en rectas numéricas los números irracionales √3, √4 y √5 , con la aplicación de la formación de la diagonal de un cuadrado y el cálculo de la hipotenusa con el teorema de Pitágoras.



Bloque de Álgebra y funciones

5 **Números irracionales**

Explora

Al solucionar o simplificar algunas expresiones matemáticas, se obtienen números con características particulares y curiosas como es el caso del número pi (π).

Ten en cuenta

El "número áureo" es la relación que existe entre dos segmentos *a* y *b*, según la siguiente proporción: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Esta relación se puede expresar de esta manera: $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. A este número lo encontramos, por ejemplo, en la disposición de los pétalos de las flores, en la distribución de los tallos de los árboles, en las espirales y en las conchas de caracoles.

Ten en cuenta

En un triángulo rectángulo, los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el lado mayor se denomina hipotenusa.

Cateto = c 1
Hipotenusa = h
Cateto = c 2

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos. Esto es: $h^2 = c1^2 + C2^2$

El número π es un número que se expresa como la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, así: $\pi = \frac{\text{Longitud de la circunferencia}}{\text{Diámetro}}$.

Este número no se puede expresar como una razón entre dos números enteros y su expresión decimal es infinita no periódica. Por lo tanto, π no es un número racional.

Una forma de hallar un valor aproximado de π es mediante el siguiente procedimiento:

1 2 3 4

Longitud circunferencia 12.57 — Diámetro 4 — $\frac{\text{Longitud de circunferencia}}{\text{Diámetro}} = \frac{12.57}{4}$

Figura 1

- Se traza un círculo y se toma la medida de longitud de la circunferencia por medio de una cuerda, que luego se debe medir con una regla.
- Se toma la medida del diámetro procurando que sea lo más exacto posible.
- Se divide la longitud de la circunferencia ente el diámetro; para ello se puede usar una calculadora. El valor obtenido es un valor aproximado al valor real de π.

Los **números irracionales** son aquellos que no se pueden expresar como razones entre números enteros y tienen como característica que su expresión decimal es infinita no periódica. Este conjunto se representa con el símbolo 𝕀.

En el conjunto de los números irracionales encontramos todas las raíces que no son exactas, como $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt{5}$, etc. Además, entre los números irracionales encontramos números especiales como π, φ (número áureo) o ***e*** (número de Euler).

5.1 Números irracionales en la recta numérica

A cada número irracional le corresponde un punto en la recta. Por ejemplo, se pueden graficar los números que son raíces utilizando el teorema de Pitágoras.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Representa el número irracional $\sqrt{2}$ en la recta numérica.

Solución:

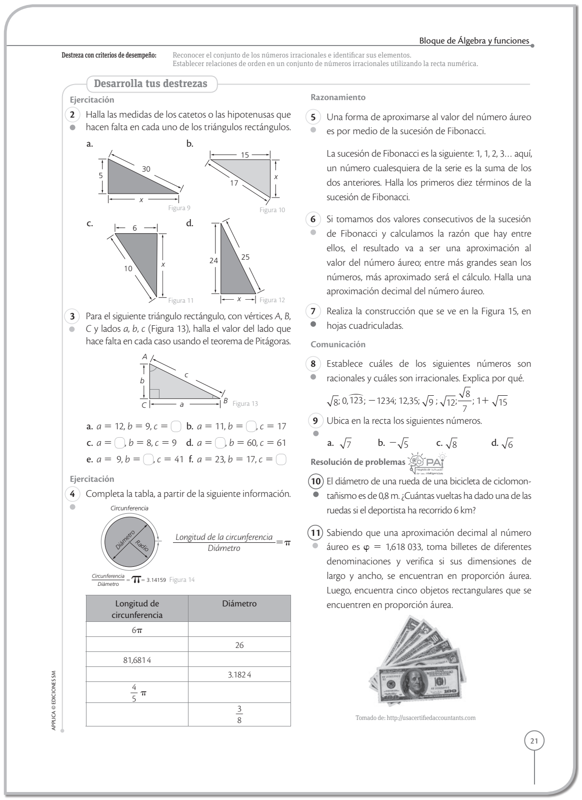
- Se construye un cuadrado de lado 1 sobre la recta numérica, entre el número 0 y el 1, y se obtiene la diagonal $d = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ (Figura 2).
- Se hace un arco con centro en 0 y radio igual a la diagonal (Figura 3),
- El arco corta a la recta en dos puntos. La distancia de estos al punto 0 es $\sqrt{2}$. Luego, a la derecha de cero se encuentra el punto $\sqrt{2}$ (Figura 4).

Figura 2 Figura 3 Figura 4

- Este procedimiento se puede aplicar como se ve en las figuras 5, 6, 7 y 8 para representar los números $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$ y $\sqrt{5}$, entre otros.

Figura 5 Figura 6 Figura 7 Figura 8

20



Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer el conjunto de los números irracionales e identificar sus elementos. Establecer relaciones de orden en un conjunto de números irracionales utilizando la recta numérica.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla las medidas de los catetos o las hipotenusas que hacen falta en cada uno de los triángulos rectángulos.

a. b. c. d.

Figura 9 Figura 10 Figura 11 Figura 12

3 Para el siguiente triángulo rectángulo, con vértices A, B, C y lados a, b, c (Figura 13), halla el valor del lado que hace falta en cada caso usando el teorema de Pitágoras.

Figura 13

a. $a = 12, b = 9, c = \square$ b. $a = 11, b = \square, c = 17$
c. $a = \square, b = 8, c = 9$ d. $a = \square, b = 60, c = 61$
e. $a = 9, b = \square, c = 41$ f. $a = 23, b = 17, c = \square$

Ejercitación

4 Completa la tabla, a partir de la siguiente información.

$\frac{\text{Longitud de la circunferencia}}{\text{Diámetro}} = \pi$

$\frac{\text{Circunferencia}}{\text{Diámetro}} = \pi = 3.14159$ Figura 14

Longitud de circunferencia	Diámetro
6π	
	26
81,6814	
	3.1824
$\frac{4}{5}\pi$	
	$\frac{3}{8}$

Razonamiento

5 Una forma de aproximarse al valor del número áureo es por medio de la sucesión de Fibonacci.

La sucesión de Fibonacci es la siguiente: 1, 1, 2, 3… aquí, un número cualesquiera de la serie es la suma de los dos anteriores. Halla los primeros diez términos de la sucesión de Fibonacci.

6 Si tomamos dos valores consecutivos de la sucesión de Fibonacci y calculamos la razón que hay entre ellos, el resultado va a ser una aproximación al valor del número áureo; entre más grandes sean los números, más aproximado será el cálculo. Halla una aproximación decimal del número áureo.

7 Realiza la construcción que se ve en la Figura 15, en hojas cuadriculadas.

Comunicación

8 Establece cuáles de los siguientes números son racionales y cuáles son irracionales. Explica por qué.

$\sqrt{8}$; $0,\overset{\frown}{123}$; -1234; 12,35; $\sqrt{9}$; $\sqrt{12}$; $\frac{\sqrt{8}}{7}$; $1+\sqrt{15}$

9 Ubica en la recta los siguientes números.

a. $\sqrt{7}$ b. $-\sqrt{5}$ c. $\sqrt{8}$ d. $\sqrt{6}$

Resolución de problemas

10 El diámetro de una rueda de una bicicleta de ciclomontañismo es de 0,8 m. ¿Cuántas vueltas ha dado una de las ruedas si el deportista ha recorrido 6 km?

11 Sabiendo que una aproximación decimal al número áureo es $\varphi = 1{,}618\,033$, toma billetes de diferentes denominaciones y verifica si sus dimensiones de largo y ancho, se encuentran en proporción áurea. Luego, encuentra cinco objetos rectangulares que se encuentren en proporción áurea.

Tomado de: http://usacertifiedaccountants.com

21

APPLICA © EDICIONES SM

Ejercitación

2. a. 29,58 b. 8

c. 8 d. 7

3.

a	b	c
12	9	15
11	$2\sqrt{42}$	17
$\sqrt{17}$	8	9
11	60	61
9	40	41
23	17	$\sqrt{818}$

Ejercitación

4.

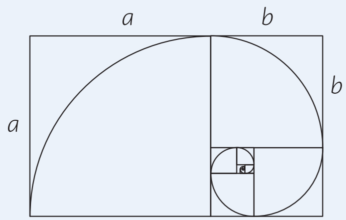
Longitud de circunferencia	Diámetro
6π	6
81,6814	26
81,6814	26
9,997	3,1824
$\frac{4}{5}\pi$	$\frac{4}{5}$
1,1780	$\frac{3}{8}$

Razonamiento

5. 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

6. 1,618034…

7.

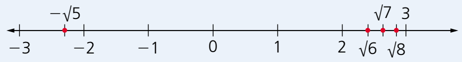


Comunicación

8.

Racional	Irracional
$0,\overset{\frown}{123}$	$\sqrt{8}$
-1234	$\sqrt{12}$
12,35	$1+\sqrt{15}$
$\sqrt{9}$	$\frac{\sqrt{8}}{7}$

9.



Resolución de problema

10. La rueda ha dado $\frac{7\,500}{\pi}$ vueltas.

11. Respuesta libre

Libro del alumno

Ampliación conceptual

De los naturales a los enteros

En el conjunto de los números naturales N = {1, 2, 3, 4, 5, ...} hay solución para las ecuaciones de la forma x+ b = a, solamente cuando a > b.

Por lo tanto, fue necesario ampliar el conjunto N y considerar el cero y los números enteros negativos. Este nuevo conjunto se denomina conjunto de números enteros.

Se simboliza con Z.

$$Z = \{\dots, -3, -2, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$Z = Z^{+} \cup Z^{-} \cup \{0\}$$

De los enteros a los racionales

Las ecuaciones de la forma $bx = a$, tales que a y b son números enteros, tienen solución en el conjunto Z si a es múltiplo de b. Pero si a no es múltiplo de b y $b \neq 0$, entonces, la solución de la ecuación es el número racional $x \frac{a}{b}$.

El conjunto de números racionales (Q) está formado por los números que pueden expresarse en forma de fracción o en forma de número decimal exacto o infinito periódico.

$$Q = \left\{\frac{a}{b} \middle| a \in Z, b \in Z, b \neq 0\right\}$$

Los números irracionales

El conjunto de los números irracionales está conformado por los números que no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros.

Los números irracionales tienen una expresión decimal infinita no periódica π, √2 son ejemplos de números irracionales

6 Números reales

Explora

Los números reales permiten establecer mediciones relacionadas con los conceptos de longitud, área y volumen de figuras cuyas dimensiones pertenecen tanto al conjunto de los números racionales como de los irracionales.

- ¿Cuál es el área de un cuadrado de $\frac{4}{5}$ cm de lado?

SM Ediciones

- Halla el área superficial de una esfera de 5 cm radio.

SM Ediciones

Para calcular el área del cuadrado de $\frac{4}{5}$ cm de lado, se aplican las operaciones entre números racionales así: $\frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}. = 0{,}64\ cm^2$.

De otra parte, el cálculo del área superficial de una esfera está dada por la formula $4\pi r^2$ y, considerando que π es un número irracional, se tiene que el resultado $4\pi\,(5m)^2 = 314{,}159265\ m^2$ también es un número irracional.

Entonces, tanto 0,64 como 314,159265 pertenecen al conjunto de los números reales.

El **conjunto de los números reales** ($\mathbb{R}$) está formado por todos los números racionales e irracionales. Es decir, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Además, a cada número real le corresponde un punto en la recta numérica.

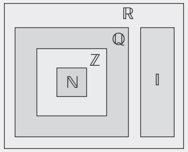
Ejemplo 1

Los números reales pueden ser:

- Números naturales como 4, 6, 8.
- Números enteros como -5, -10, 0.
- Números racionales como $\frac{-3}{5}$ y $3{,}4\widehat{789}$.
- Números irracionales como $\sqrt{2}$, π y φ.

Ten en cuenta

La relación que hay entre el conjunto $\mathbb{R}$ y los demás conjuntos se representa así:



6.1 Valor absoluto

El **valor absoluto** de un número real es la distancia del número hasta el 0. Se escribe como $|a|$ y su resultado siempre es un número positivo.

Entonces, si $a \in \mathbb{R}$, $|a| = \begin{cases} -a \text{ si } a \leq 0 \\ a \text{ si } a \geq 0 \end{cases}$.

Actividades resueltas

Ejercitación

1 Halla el valor absoluto de los números φ; $-256{,}245\widehat{37}$; π; $-\frac{8}{9}$.

Solución:

Para hallar el valor absoluto de estos números, se tiene en cuenta la definición de valor absoluto. Esta es:

- Cuando el número es positivo, el valor absoluto es el número. Así: $|\varphi| = \varphi$, $|\pi| = \pi$
- Cuando el número es negativo, su valor absoluto es el número sin el signo. Así: $|-256{,}245\widehat{37}| = 256{,}245\widehat{37}$; $\left|-\frac{8}{9}\right| = \frac{8}{9}$

Solución de problemas PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

2 Halla la distancia que hay entre los números -50 y 27; -89 y -37.

Solución:

La distancia entre dos números se calcula como el valor absoluto de la diferencia de los números. De este modo: $d(a, b) = |a - b| = |b - a|$.

Si $a = -50$ y $b = 27$: $d(-50, 27) = |-50 - 27| = 77$ (Figura 1).

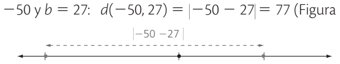


Figura 1

Si $a = -89$ y $b = -37$: $d(-89, -37) = |-89 - (-27)| = 62$ (Figura 2).

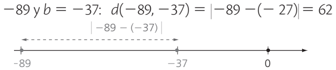


Figura 2

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación TIC

www.e-sm.net/8smt01

Encuentra y explora algunas situaciones problema relacionadas con el valor absoluto de los números reales.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer el conjunto de los números reales R e identificar sus elementos.

6.2 Orden en el conjunto de los números reales

Los números reales guardan una **relación de orden** en la que, para dos números reales a y b, se cumple una y solo una de las siguientes condiciones: $a > b$, $a < b$ o $a = b$.

Entonces:

$a > b \longrightarrow$ si $a - b > 0$ ($a - b$ es positivo)
$a < b \longrightarrow$ si $a - b < 0$ ($a - b$ es negativo)
$a = b \longrightarrow$ si $a - b = 0$ ($a - b$ es igual a cero)

Ejemplo 2

Para establecer el orden entre los números $-2.456\,7$; $\sqrt{3}$; -3; π; $-1,\overset{\frown}{234}$ y $\frac{5}{3}$, se pueden comparar las expresiones decimales de cada uno.

Los números decimales correspondientes son:

$-2,4567$ $\sqrt{3} = 1,7320$ $-3 = -3,0000$

$\pi = 3,1415$ $-1,\overset{\frown}{234} = -1,2342$ $\frac{5}{3} = 1,6666$

Como los números reales negativos son menores que los reales positivos, se tiene que $-2,4567$; $-3,0000$ y $-1,2342$ son menores que $1,7320$; $3,1415$ y $1,6666$.

Para ordenar los decimales, se comparan las partes enteras. Si son iguales, se empieza a comparar decimal por decimal, de izquierda a derecha.

Entonces, el orden final de los seis números es:

$$-3,0000 < -2,4567 < -1,2342 < 1,6666 < 1,7320 < 3,1415$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

3. En la competencia automovilística Indy Car que se realiza en Estados Unidos, participan cuatro corredores. Para la primera carrera del año, que se lleva a cabo en un circuito callejero en la ciudad de San Petersburgo, Florida, los corredores obtuvieron los siguientes tiempos en la *pole position* (posición de salida).

Número	Corredor	Equipo	Tiempo
18	Carlos Huertas	Dale Coyne Racing	01:01,9716
2	Juan Pablo Montoya	Team Penske	01:00,8532
26	Carlos Muñoz	Andretti Autosport	01:01,4890
98	Gabriel Chaves	Bryan Herta Autosport	01:01,9705

Tabla 1

¿Cuál es el orden de salida los corredores, según sus tiempos en la *pole position*?

Solución:

Para resolver este problema, se comparan los tiempos que los corredores tardaron en dar su mejor vuelta. Estos fueron:

01:01,9716 01:00,8532 01:01,4890 01:01,9705

Como los cuatro corredores tardaron más de un minuto, basta comparar las expresiones decimales que representan los segundos, las décimas, las centésimas y las milésimas de segundo.

Así, el orden de los tiempos de menor a mayor es:

$$0,8532 < 1,4890 < 1,9705 < 1,9716$$

Luego, el orden de salida es: Montoya, Muñoz, Chaves y Huertas.

Ten en cuenta

Para comparar números decimales, se comparan las partes enteras de los números. Si son iguales, se comparan las cifras decimales de izquierda a derecha hasta que una de ellas sea menor o mayor que la otra.

6,7893 6,7892
6 = 6
7 = 7
8 = 8
9 = 9
3 < 2

Ten en cuenta

El tiempo de Carlos Huertas significa que su vuelta más rápida fue de 1 minuto, 01 segundos y que el decimal correspondiente a las décimas de segundo es 9, a centésimas, 7 y a milésimas, 1.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Determina si el número dado pertenece al conjunto numérico indicado.

a. $5 \rightarrow N$ b. $-\frac{5}{5} \rightarrow Q$

c. $-\frac{2}{3} \rightarrow N$ d. $3\pi \rightarrow I$

e. $\frac{16}{8} \rightarrow Z$ f. $\sqrt{2} \rightarrow I$

g. $\frac{3}{8} \rightarrow R$ h. $\frac{4}{5} \rightarrow Z$

i. $\sqrt{4} \rightarrow N$ j. $\frac{2}{5} \rightarrow Q$

k. $\frac{10}{5} \rightarrow Z$ l. $\frac{16}{8} \rightarrow N$

Actividades TIC

En el link:

www.sm.net/8smt01

Desarrolla los ejercicios desarrolldos con el valor absoluto de números reales

Actividades colaborativas

Forma grupos de 5 estudiantes y pida que expresen dos acciones relacionadas con el valor de la honestidad en la clase de matemáticas referente al orden en los números reales.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Presente a los estudiantes el conjunto de los números reales mediante diagramas de Venn, en el cual se muestre la contenencia de los otros conjuntos numéricos estudiados. Pida que mencionen ejemplos de números en cada uno de los conjuntos.

b. Recuerde a los estudiantes la necesidad de ampliar los diferentes conjuntos numéricos.

c. Cuente cómo se pasó de los naturales a los enteros y de estos a los racionales.

d. Recuerde cómo surgieron los números irracionales y cómo de esa forma se completa el conjunto de los números reales.

e. Muestre la ubicación de algunos números en la recta numérica y comente que a cada punto de la recta, se le asigna un número real y a cada número real le corresponde un punto en la recta.

Ampliación conceptual

Otras propiedades de los números reales son:

Ley de transitividad

- Si a, b $\in$ R, a < b y b < c entonces a < c.

Ley de monotonía para la suma

- • Si a, b, c $\in$ R, a < b entonces a + c < b + c.

Ley de monotonía para el producto

- Si a, b, c $\in$ R, a < b y c >0 entonces ac < bc, a < b y c < 0 entonces ac > bc.

Bloque de Álgebra y funciones

6 Números reales

Ten en cuenta

Las desigualdades son todas las expresiones en las que se involucran los símbolos $<, >, \leq, \geq$.

La desigualdad $a \leq b$, "a menor o igual que b", significa que $a < b$ o $a = b$.

De otro lado, $a \geq b$, "a mayor o igual que b", significa que $a > b$ o $a = b$.

Así, si $a \leq 5$, está la posibilidad de que suceda que $a < 5$ o que $a = 5$.

6.3 Propiedades de las relaciones de orden

Para a, b y c, números reales, se cumplen las siguientes propiedades.

Propiedad	Ejemplo
Propiedad 1 (transitiva) Si $a < b$ y $b < c$, entonces: $a < c$.	$-2 < 3$ y $3 < 5$, entonces $-2 < 5$.
Propiedad 2 Si $a < b$, entonces: $a + c < b + c$.	Si $e < \pi$, entonces $e + 3 < \pi + 3$.
Propiedad 3 Si $a < b$ y $c > 0$, entonces: $a \cdot c < b \cdot c$.	Si $-5 < 7$ y $9 > 0$, entonces: $(-5) \cdot (9) < (7) \cdot (9)$ y, por lo tanto, $-45 < 63$.
Propiedad 4 Si $a < b$ y $c < 0$, entonces: $a \cdot c > b \cdot c$.	Si $-5 < 7$ y $-6 < 0$, entonces: $(-5)\cdot(-6) > (7)\cdot(-6)$ y, por lo tanto, $30 > -42$.
Propiedad 5 Si $a < b$ y $c < d$, entonces: $a + c < b + d$.	Si $8 < 11$ y $-5 < 3$ entonces: $8 + (-5) < 11 + 3$ o $3 < 14$.
Propiedad 6 Si $a \cdot b < 0$, entonces: $a > 0$ y $b < 0$ $a < 0$ y $b > 0$	Si $-21 < 0$, existen estas dos opciones: $a = -7$ y $b = 3$, ya que $(-7)\cdot(3) = -21$. $a = 7$ y $b = -3$, porque $(7)\cdot(-3) = -21$.
Propiedad 7 Si $a \cdot b > 0$, entonces:: $a > 0$ y $b > 0$ $a < 0$ y $b < 0$	Si $55 > 0$, se tiene que : $5 > 0$ y $11 > 0$, ya que $(5)\cdot(11) = 55$. $-5 < 0$ y $-11 < 0$, ya que $(-5)\cdot(-11) = 55$
Propiedad 8 Si $a > b$, $a > 0$ y $b > 0$, entonces: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.	Como $13 < 17$ y, además, $13 > 0$ y $17 > 0$, entonces $\frac{1}{17} < \frac{1}{13}$.

Actividad resuelta

Ejercitación

4 Escribe cuál es la propiedad que se aplica en cada caso.

a. $-\sqrt[3]{5} < -\frac{4}{3}$ y $-\frac{4}{3} < -0,\widehat{3}$, entonces $-\sqrt[3]{5} < -0,\widehat{3}$.

b. $7,1234 < 9,1233$, entonces $7,1234 + (-1,55) < 9,1233 + (-1,55)$.

c. Si $-\sqrt{5} < -\sqrt{3}$, entonces $\left(-\sqrt{5}\right)(-5) < \left(-\sqrt{3}\right)(-5)$.

d. Si $\frac{7}{9} < \frac{4}{5}$ y $\frac{3}{9} < \frac{3}{5}$, entonces $\frac{7}{9} + \frac{3}{9} < \frac{4}{5} + \frac{3}{5}$.

e. Si $\frac{-3}{4} < \frac{-5}{7}$, entonces $\left(\frac{-3}{4}\right) \cdot (2) < \left(\frac{-5}{7}\right) \cdot (2)$; luego, $\frac{-6}{4} < \frac{-10}{7}$.

Solución:

a. Propiedad 1 (transitiva)
b. Propiedad 2
c. Propiedad 4
d. Propiedad 5
e. Propiedad 3

CULTURA del Buen Vivir

La honestidad

Una persona honesta sigue reglas y patrones de comportamiento que ponen en evidencia su sinceridad y transparencia al resolver situaciones cotidianas.

- Expresa dos acciones relacionadas con el valor de la honestidad en la clase de matemáticas.

Destreza con criterios de desempeño: Establecer relaciones de orden en un conjunto de números reales utilizando la recta numérica y la simbología matemática (=, <, ≤, >, ≥).

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

5 Encierra los conjuntos a los que pertenece cada número.

a.	$\frac{3}{5}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
b.	$-\sqrt{3}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
c.	$\frac{6}{1}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
d.	-9	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
e.	$\frac{-4}{4}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
f.	$\sqrt{2}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
g.	$-5,\widehat{124}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
h.	4	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
i.	0,331	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
j.	π	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$

6 Calcula el valor absoluto de los siguientes números.

a. $-\varphi$ b. $-1{,}234\,56$ c. $\frac{9}{5}$
d. 4.678 e. $-\sqrt[2]{5}$ f. 105

7 Expresa en forma decimal los siguientes números. Después, determina su orden de menor a mayor.

$\sqrt{3}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$1+\varphi$
-2	$\sqrt[3]{9}$	$\frac{11}{4}$	2,645 73

Razonamiento

8 Emplea los signos <, > o =, según corresponda.

a. $3 \square \frac{17}{2}$ b. $2 \square \sqrt{3}$
c. $4 \square \frac{12}{3}$ d. $\pi \square \frac{7}{2}$
e. $-\frac{\pi}{2} \square -\frac{2\pi}{4}$ f. $-\sqrt{7} \square -\sqrt{10}$

9 Halla los valores de x e y necesarios para que se cumpla la siguiente relación.

$$\sqrt{13} < \frac{x}{y} < \sqrt{14}$$

Comunicación

10 Aplica las propiedades de las relaciones de orden entre los números reales y completa las expresiones con los signos <, > o =, según corresponda.

a. Si $\sqrt{2} < 2 \Rightarrow \sqrt{2} + 5 \square 2 + 5$.
b. Si $-\sqrt{3} < 1 \Rightarrow -\sqrt{3} \cdot 3 \square 1 \cdot 3$.
c. Si $2 > \frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2} > \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \square 2$.
d. Si $-3 \cdot x > 0 \Rightarrow x \square 0$.
e. Si $a = 3$ y $b = 2 \Rightarrow \frac{1}{3} \square \frac{1}{2}$.
f. Si $9 \cdot z < 0 \Rightarrow z \square 0$.

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

11 En el pueblo Cube, en la pasada sequía, un río se encontraba a 90 cm por debajo del nivel de inundación (A). Para este invierno, un servidor público tomó la medida actual del río (B) y determinó cuánto aumentó. El cálculo que hizo fue: $d(A, B) = |-90-140|$. Según esto, ¿cuál es la altura del río actualmente, respecto al nivel de inundación anterior?

12 Un submarino se encuentra a 7 000 pies bajo el nivel del mar y un helicóptero se encuentra a 3 000 pies sobre el nivel del mar. Cuando están justo uno debajo del otro en una línea vertical, ¿cuál es la distancia que los separa?

13 La profesora le pide a sus estudiantes que escriban una lista de cuatro números reales que no sean naturales ni irracionales. Analiza las respuestas de Ruth y Martín. ¿En qué se equivocó cada uno? ¿Por qué?

Ruth: $\frac{5}{2}$, $\sqrt{2}$, $-\frac{56}{5}$, $-0{,}25$

Martín: $\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{5}$, $\sqrt{16}$, 4,31

5.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$\frac{3}{5}$			$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$
$-\sqrt{3}$				$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$\frac{6}{1}$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$
-9		$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$
$-\frac{4}{4}$		$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$
$\sqrt{2}$				$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
$-5,\widehat{124}$			$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$
4	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$
0,331			$\mathbb{Q}$		$\mathbb{R}$
π				$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$

6.a. 1,6180… **b.** 1,23456
c. 1,8 **d.** 4,678
e. 2,2360 **f.** 105

7. $-2{,}64$; -2; $-\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt[3]{9}$; $1+\varphi$; $\frac{11}{4}$

8. a. < **b.** > **c.** =
d. < **e.** = **f.** >

9. $x > 3{,}6y$ $x < 3{,}74y$

Comunicación

10.a. < **b.** < **c.** <
d. > **e.** < **f.** <

Resolución de problemas

11. La altura del río actualmente es 230 cm.

12. La distancia que los separa es de 10 000 pies.

13. Ruth: $\sqrt{2}$ es un número irracional.
Martin: $\sqrt{16}$ es un número natural.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

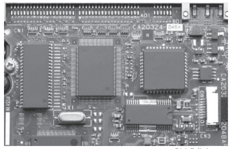
a. Presente a los y las estudiantes el conjunto de los números reales mediante el cual se muestre la contenencia de los conjuntos de los números que se encuentran en los extremos del intervalo. Pídales que analicen y den ejemplos de los tipos de intervalo en notación de conjunto.

b. Recuerde a los y las estudiantes la necesidad que ampliar los diferentes conjuntos de números reales. Cuénteles que las rectas y semirrecta contienen conjuntos de números reales que contienen elementos mayores, menores, mayores e iguales y menores e iguales.
Muestre la ubicación de algunos intervalos en la recta numérica y comente qué a cada intervalo de la recta se le asigna una recta o semirrecta real y a cada número real.

7 Intervalos y semirrectas

Explora

En una compañía encargada del encapsulado de circuitos integrados de silicio solo pueden admitir ciertas especificaciones en las dimensiones de estos. Admiten circuitos con espesor de 0,78 cm y de una tolerancia de 0,05 cm. Según esto, ¿qué rango de dimensiones para los circuitos permiten?



SM Ediciones

En la compañía electrónica utilizan integrados de 0,78 cm de espesor, pero admiten integrados que sean hasta 0,05 cm más gruesos o hasta 0,05 cm más delgados. Por lo tanto, la compañía admite circuitos cuyo espesor esté entre 0,73 cm y 0,83cm, es decir, circuitos que estén en el intervalo [0,73; 0,83].

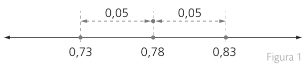


Figura 1

7.1 Intervalos

Los **intervalos** son subconjuntos de los números reales y están conformados por todos aquellos números que se ubican entre dos números llamados **extremos**.

Para a y $b \in \mathbb{R}$, donde a y b son los extremos de un intervalo, se tiene:

Tipo de intervalo	Descripción y ejemplo
Intervalo cerrado (Figura 2)	Es el conjunto de todos los números reales que se encuentran entre los dos números a y b, donde a y b pertenecen al conjunto. Así: $[a, b] = \left\{\frac{x}{a} \le x \le b\right\}$
Intervalo abierto (Figura 3)	Incluye a todos los números reales que se encuentran entre los dos números a y b, donde a y b no pertenecen al conjunto. Así: $(a, b) = \left\{\frac{x}{a} < x < b\right\}$
Intervalos semiabiertos (Figura 4 y Figura 5)	**Abierto a la derecha:** es el conjunto de todos los números reales que se encuentran entre los dos números a y b, donde a pertenece al conjunto y b no pertenece al conjunto. Así: $[a, b) = \left\{\frac{x}{a} \le x < b\right\}$
	Abierto a la izquierda: es el conjunto de todos los números reales que se encuentran entre los dos números a y b, donde a no pertenece al conjunto y b pertenece al conjunto. Así: $(a, b] = \left\{\frac{x}{a} < x \le b\right\}$

Tabla 1

Intervalo cerrado

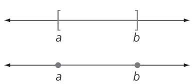


Figura 2

Intervalo abierto

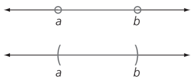


Figura 3

Intervalo abierto a la derecha

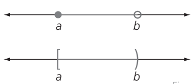


Figura 4

Intervalo abierto a la izquierda

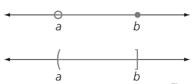


Figura 5

Ejemplo 1

Observa la descripción de cada intervalo.

- $[-3, 2] = \left\{\frac{x}{-3} \le x \le 2\right\}$ está formado por todos los números reales que son mayores o iguales que -3 y que son menores o iguales que 2.
- $[-4, 3) = \left\{\frac{x}{-4} \le x < 3\right\}$ está formado por todos los números reales que son mayores o iguales que -4 y menores que 3.

Destreza con criterios de desempeño: Establecer relaciones de orden en un conjunto de números reales utilizando la recta numérica y la simbología matemática (=, <, ≤, >, ≥).

7.2 Semirrectas y su representación gráfica

Las semirrectas son la representación gráfica de conjuntos de números reales que son mayores o iguales que un número dado y se les llaman intervalos infinitos por el uso del símbolo ∞. De manera general, para $a \in \mathbb{R}$.

Semirrecta abierta positiva	$(a, +\infty) = \left\{ \frac{x}{a} < x \right\}$	Es el conjunto de todos los números reales que son mayores que *a*.
Semirrecta cerrada positiva	$[a, +\infty) = \left\{ \frac{x}{a} \leq x \right\}$	Es el conjunto de todos los números reales que son mayores o iguales que *a*.
Semirrecta abierta negativa	$(-\infty, a) = \left\{ \frac{x}{x} < a \right\}$	Es el conjunto de todos los números reales que son menores que *a*.
Semirrecta cerrada negativa	$(-\infty, a] = \left\{ \frac{x}{x} \leq a \right\}$	Es el conjunto de todos los números reales que son menores o iguales que *a*.

Tabla 2

Ejemplo 2

$(-4, +\infty)$ es el conjunto de todos los números reales mayores que -4.

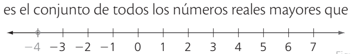


Figura 6

$[3, +\infty)$ es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que 3.

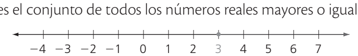


Figura 7

$(-\infty, 1]$ es el conjunto de todos los números reales menores o iguales que 1.

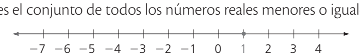


Figura 8

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Representa estas desigualdades: $|x| < 3$; $|x| < 4$ y $|x| > 2$.

Solución:

- $|x| < 3$ se puede escribir como $-3 < x < 3$; este es un intervalo abierto con extremos -3 y 3. Su representación gráfica es:

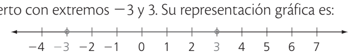


Figura 9

- $|x| < 4$ se puede escribir como $-4 \leqq x \leqq 4$; este es un intervalo cerrado con extremos -4 y 4. Su representación gráfica es:

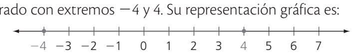


Figura 10

- $|x| > 2$ y $|x| > 2$ se puede escribir como $x < -2$ y $x > 2$ y $x \leqslant -2$ y $x \geqslant 2$. Su representación gráfica es:

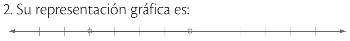


Figura 11

Ten en cuenta

El símbolo para representar el infinito (∞) lo utilizó por primera vez el matemático John Wallis en 1965. En los intervalos, los símbolos $+\infty$ y $-\infty$ se leen "más infinito" y "menos infinito", respectivamente. Ten en cuenta que ∞ no es un número.

CERO DISFRAZADO DE INFINITO

Ten en cuenta

La desigualdad con valor absoluto $|x| < a$ es el intervalo $(-a, a)$, es decir, $-a < x < a$. Su representación gráfica es:

Figura 12

Una desigualdad cuyo valor absoluto es $|x| > a$ es la unión de los intervalos $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, es decir, $x < -a$ y $x > a$. Su representación gráfica es:

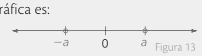


Figura 13

Actividades de refuezo y ampliación del conocimiento

1. Escribe cada una de las siguientes desigualdades en su notación de intervalo.

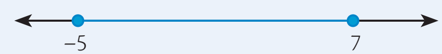
   a. $4 \leq x < 9$ **b.** $4 \geq x > -3$

   c. $x < 6$ **d.** $x > -9$

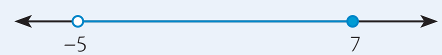
   e. $x < 0$ **f.** $3x > 6$

2. Escribe por comprensión y como intervalo, cada uno de los conjuntos que se representan en la figura.

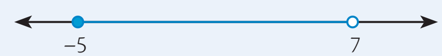
   a.



   b.



   c.



   d.

Actividades colaborativas

Forma grupos de trabajo y propón que expresen datos históricos, edades de personas, estaturas o rangos de temperaturas en intervalos.

Comunicación

2. a. $<$ b. -3 c. -1

d. 11 e. $<$

3. a. $\{7 < x < 19\}$

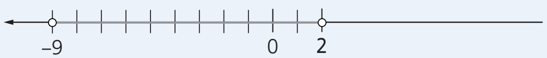
b. $\{-9 \leq x < 1\}$

c. $\{-10 < x < 13\}$

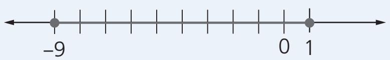
d. $\{-15 < x < -9\}$

e. $\{25 < x < 73\}$

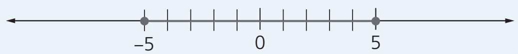
4. a. $(-9, 2)$



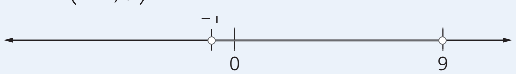
b. $[1, -9]$



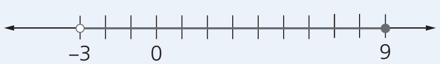
c. $[-5, 5]$



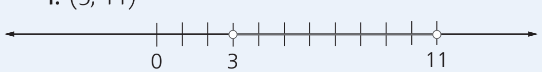
d. $(-1, 9)$



e. $(-3, 9]$



f. $(3, 11)$



Razonamiento

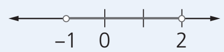
5. a. $[-2, 3]$ b. $(-4, 0)$

c. $[1, 4]$ d. $(-1, 3)$

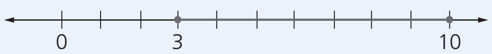
e. $[-4, 3)$ f. $(-2, 4]$

Comunicación

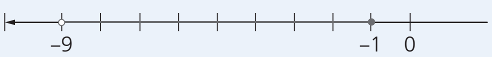
6. a. $(-1, 2)$



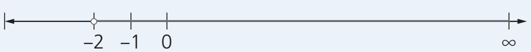
b. $[3, 10]$



c. $(-9, -1]$



d. $(-2, +\infty)$



Ejercitación

7. a. (0,15], (15, 30], (30, 45]. (45, 60]

b. Rojo 1

Verde 6

Amarillo 2

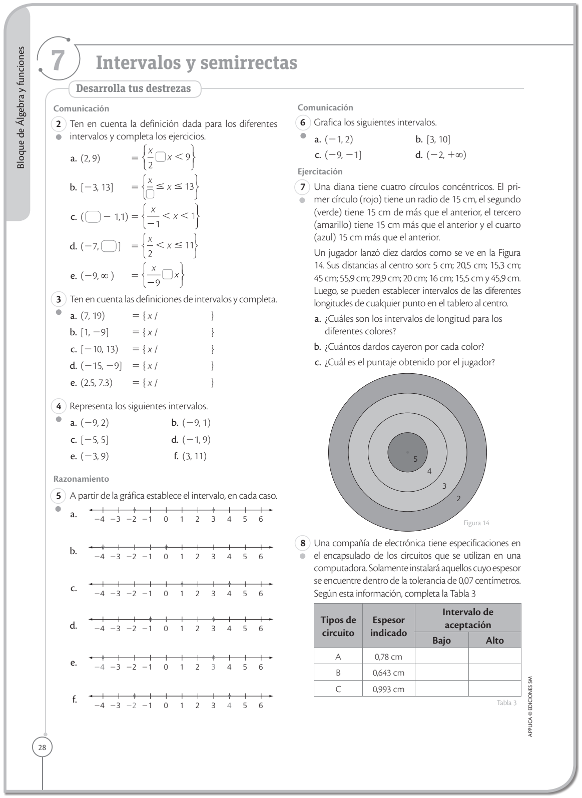
Azul 1

c. El jugador obtuvo 37 puntos

8. a. bajo 0,71 alto: 0,85

b. bajo 0,573 alto: 0,713

c. bajo 0,923 alto:1,063



Bloque de Álgebra y funciones

7 **Intervalos y semirrectas**

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Ten en cuenta la definición dada para los diferentes intervalos y completa los ejercicios.

a. $(2, 9) = \left\{\frac{x}{2}\square x < 9\right\}$

b. $[-3, 13] = \left\{\frac{x}{\square} \leq x \leq 13\right\}$

c. $(\square - 1{,}1) = \left\{\frac{x}{-1} < x < 1\right\}$

d. $(-7, \square] = \left\{\frac{x}{2} < x \leq 11\right\}$

e. $(-9, \infty) = \left\{\frac{x}{-9}\square x\right\}$

3 Ten en cuenta las definiciones de intervalos y completa.

a. $(7, 19) = \{x /\quad\}$

b. $[1, -9] = \{x /\quad\}$

c. $[-10, 13) = \{x /\quad\}$

d. $(-15, -9] = \{x /\quad\}$

e. $(2.5, 7.3) = \{x /\quad\}$

4 Represénta los siguientes intervalos.

a. $(-9, 2)$ b. $(-9, 1)$

c. $[-5, 5]$ d. $(-1, 9)$

e. $(-3, 9)$ f. $(3, 11)$

Razonamiento

5 A partir de la gráfica establece el intervalo, en cada caso.

a. b. c. d. e. f.

Comunicación

6 Grafica los siguientes intervalos.

a. $(-1, 2)$ b. $[3, 10]$

c. $(-9, -1]$ d. $(-2, +\infty)$

Ejercitación

7 Una diana tiene cuatro círculos concéntricos. El primer círculo (rojo) tiene un radio de 15 cm, el segundo (verde) tiene 15 cm de más que el anterior, el tercero (amarillo) tiene 15 cm más que el anterior y el cuarto (azul) 15 cm más que el anterior.

Un jugador lanzó diez dardos como se ve en la Figura 14. Sus distancias al centro son: 5 cm; 20,5 cm; 15,3 cm; 45 cm; 55,9 cm; 29,9 cm; 20 cm; 16 cm; 15,5 cm y 45,9 cm. Luego, se pueden establecer intervalos de las diferentes longitudes de cualquier punto en el tablero al centro.

a. ¿Cuáles son los intervalos de longitud para los diferentes colores?

b. ¿Cuántos dardos cayeron por cada color?

c. ¿Cuál es el puntaje obtenido por el jugador?

Figura 14

8 Una compañía de electrónica tiene especificaciones en el encapsulado de los circuitos que se utilizan en una computadora. Solamente instalará aquellos cuyo espesor se encuentre dentro de la tolerancia de 0,07 centímetros. Según esta información, completa la Tabla 3

Tipos de circuito	Espesor indicado	Intervalo de aceptación	
		Bajo	Alto
A	0,78 cm		
B	0,643 cm		
C	0,993 cm		

Tabla 3

28

Destreza con criterios de desempeño: Calcular expresiones numéricas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R.

Desarrolla tus destrezas

Resolución de problemas

9 El crecimiento en los seres humanos desde su nacimiento está asociado a su edad, peso y altura. En la siguiente tabla encontrarás la relación entre edad, altura y peso de un ser humano normal, desde su nacimiento hasta los cuatro años de edad. Para cada edad se encuentran tres valores, tanto en peso como en altura, que establecen un valor mínimo, un medio y un máximo.

Edad	Altura (normal en cm)			Peso (normal en kg)		
	Mínimo	Medio	Máximo	Mínimo	Medio	Máximo
Nacimiento	46,5	50,1	53,8	2,8	3,4	4,2
3 meses	55	60	65	4,55	5,75	6,95
6 meses	61,8	66,4	71	6,05	7,6	9,15
12 meses	69,7	74,3	79,9	7,65	9,75	11,85
18 meses	75,1	80,5	85,9	8,75	11,2	13,65
2 años	79,9	85,7	91,5	9,8	12,2	14,6
3 años	87,3	94,3	101,3	11,04	14,05	16,9
4 años	93,4	101,2	109	12,06	16	19,4

Tabla 4

a. ¿Qué significa que una niña de seis meses tenga una altura de 73 cm y un peso de 7 kg?

b. ¿Cuál sería el intervalo para la altura de un bebé de 18 meses?

c. ¿Cuál es el intervalo del peso para un niño de tres años?

10 Necesitamos clasificar la longitud de algunos colores producidos por una fábrica. Los colores tienen longitudes entre 10 cm y 16 cm. Establece tres intervalos que abarquen todas las posibles longitudes de los colores que la fábrica produce.

11 En una encuesta, a los estudiantes de un colegio de grado noveno se les preguntó acerca de su estatura. Los datos obtenidos son:

Edad	Altura	Edad	Altura	Edad	Altura
10	140 cm	13	150 cm	15	174 cm
16	160 cm	11	150 cm	16	175 cm
12	145 cm	13	170 cm	14	153 cm
15	158 cm	12	165 cm	14	168 cm
16	155 cm	15	165 cm	13	165 cm

Tabla 5

Para organizar los datos de la estatura, se establecieron los siguientes intervalos: [130, 140); [140, 150); [150, 160); [160, 170); [170, 180).

a. ¿Cuántos estudiantes hay en cada intervalo?

b. ¿Qué edades se hallan en cada intervalo?

c. ¿Por qué dos intervalos consecutivos tienen el mismo valor extremo, uno por derecha y el siguiente por izquierda?

12 La siguiente imagen, presentada por la Organización Mundial de la Salud (OMS) en el año 2007, muestra la curva de crecimiento, entre la edad en años y la altura (talla) en cm, para niños y adolescentes que tienen entre cinco y catorce años de edad.

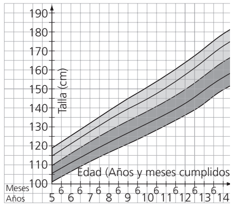


Figura 15

Los colores verde y rosado indican los valores a tener en cuenta para establecer los valores normales (verde) y los valores de alerta en la talla de un niño de estas edades.

a. Para un niño de nueve años y seis meses, ¿cuál es el intervalo de valores para el que su talla es normal?

b. ¿Qué puedes decir de un niño de doce años que tiene talla de 170 cm?

c. ¿Cuál es el intervalo de valores donde la talla es normal en un niño de catorce años y tres meses?

Resolución de problemas

9. **a.** La altura está por encima del promedio y el peso esta dentro del peso mínimo.

b. [75,1; 85,9]

c. [11,04; 16,9]

10. [10, 12), [12, 14), [14, 16)

11. **a.** [130, 140): 0 estudiantes

[140, 150): 2 estudiantes

[150, 160): 5 estudiantes

[160, 170): 5 estudiantes

[170, 180): 3 estudiantes

b. [130, 140): 0 estudiantes

[140, 150): 10 y 12 años

[150, 160): De 11 a 16 años

[160, 170): De 12 a 16 años

[170, 180): De 13 a 16 años

c. En un intervalo es el valor máximo y es abierto, en el siguiente es valor mínino y el intervalo es cerrado.

12. **a.** [130, 140)

b. Que su altura está por encima del promedio.

c. [155, 175)

UNIDAD 1

Evaluación formativa

Nombre:...

Grado:................. **Fecha:**.................

1. Dadas las siguientes proposiciones determine cuáles son verdaderas y cuáles son falsas.

A. El número $-\frac{3}{5}$ es racional. ( )

B. Al ubicar las fracciones $-\frac{3}{3}$, $-\frac{7}{3}$, y $\frac{4}{5}$ en la recta numérica, se observa que se encuentran ubicados entre los enteros −3 y −2; −1 y 0; 0 y 1, respectivamente. ( )

C. Al escribir la fracción $\frac{7}{20}$ como decimal se obtiene el número 0.53. ( )

D. Todos los números racionales tienen expresión decimal finita. ( )

2. Realice lo que se indica

- Subraya los números que son irracionales.

$\sqrt{5}$	−4	3,725539171186....	0,52
$\sqrt{49}$	$\sqrt{11}$	3,177777777....	$-\sqrt{15}$

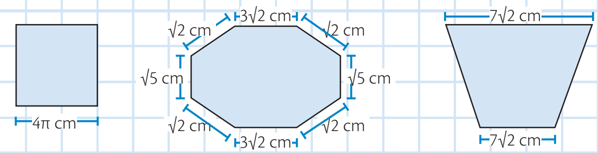
- Construye los números irracionales que se indican.

$\sqrt{7}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{5}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$

- Ubique en una recta numérica los siguientes números. Encierra aquellos que están:

Entre 2 y 3.			
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{8}$

3. Observe las siguientes figuras. Escribe las respuestas a los siguiente enunciados,



A. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado?

B. ¿Cuál es su área?

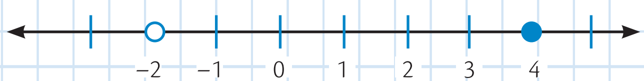
C. Escribe la suma que representa el perímetro del hexágono y resuélvela.

D. Teniendo en cuenta los datos que se dan en el trapecio, halla su altura.

4. Coloque el signo >, < o = según convenga en la siguientes cantidades.

A. −28,11... $\square$ $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{13}$ $\square$ 5,2223

5. Escribe la notación como conjuntos de la gráfica.



1. Dadas las siguientes proposiciones determine cuáles son verdaderas y cuáles son falsas.

A. El número $-\frac{3}{5}$ es racional. (V)

B. Al ubicar las fracciones $-\frac{3}{3}$, $-\frac{7}{3}$, y $\frac{4}{5}$ en la recta numérica, se observa que se encuentran ubicados entre los enteros −3 y −2; −1 y 0; 0 y 1, respectivamente. (F)

C. Al escribir la fracción $\frac{7}{20}$ como decimal se obtiene el número 0.53. (F)

D. Todos los números racionales tienen expresión decimal finita. (F)

2. Realice lo que se indica

- Subraya los números que son irracionales.

$\sqrt{5}$	−4	3,725539171186….	0,52
$\sqrt{49}$	$\sqrt{11}$	3,177777777….	$-\sqrt{15}$

- Construye los números irracionales que se indican.

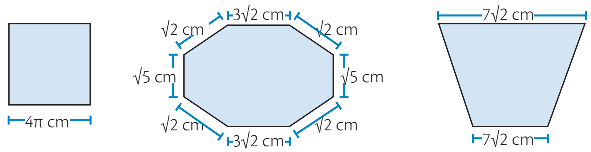
$\sqrt{7}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt{5}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$

Respuesta libre

- Ubique en una recta numérica los siguientes números. Encierra aquellos que están: $\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$

Entre 2 y 3.			
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{8}$

3. Observe las siguientes figuras. Escribe las respuestas a los siguiente enunciados,



A. ¿Cuál es el perímetro del cuadrado? $P = 16\pi$ cm

B. ¿Cuál es su área? $A = 16\pi^2$ cm^2

C. Escribe la suma que representa el perímetro del hexágono y resuélvela.

$10\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$

D. Teniendo en cuenta los datos que se dan en el trapecio, halla su altura.

$h = 3\sqrt{5}$

4. Coloca el signo >, < o = según convenga en la siguientes cantidades.

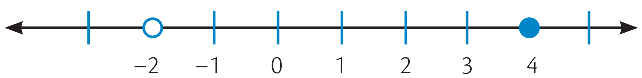
A. −28,11… ☐ $\sqrt{8}$

$-28,11\ldots < \sqrt{8}$

B. $\sqrt{13}$ ☐ 5,2223

$\sqrt{13} < 5,2223$

5. Escribe la notación como conjuntos de la gráfica.



$(-2, 4] = \{x / -2 < x < 4\}$

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.°	N.° de aciertos	N.° de desaciertos	Refuerzo sí / no
Reconocer a los números racionales como un número decimal y/o como una fracción.	1 y 2			
Reconocer el conjunto de los números racionales Q e identificar sus elementos.	3			
Reconocer el conjunto de los números irracionales e identificar sus elementos.	3 y 4			
Establecer relaciones de orden en un conjunto de números irracionales utilizando la recta numérica.	5			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Operaciones con números reales

Para tener éxito en álgebra, se debe entender como sumar, restar, multiplicar y dividir números Reales.

Dos números, en la recta numérica, que están a la misma distancia del cero pero en direcciones opuestas se denominan: Inversos aditivos, opuestos o simétricos uno del otro. Por ejemplo.

3 es el inverso aditivo de –3, y –3 es el inverso aditivo de 3

El número 0 (cero) es su propio inverso aditivo.

La suma de un número y su inverso aditivo es 0 (cero).

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Es importante revisar los conocimientos previos de los y las estudiantes sobre las propiedades de los números enteros, racionales e irracionales y sus operaciones.

b. Trabaje las operaciones en el conjunto de los números reales, mediante situaciones conocidas como el cálculo del perímetro y área de una figura, o la diferencia y razón entre longitudes las cuales están expresadas en números reales.

c. Es importante que se expresen cantidades irracionales para familiarizar a los y las estudiantes con este conjunto numérico; recuérdeles que tanto los racionales como los irracionales se pueden expresar con números decimales.

d. Haga énfasis en las propiedades que se cumplen en cada una de las operaciones, dando ejemplos de cada una de ellas. Indique que en el caso de la sustracción ésta, como en todos los conjuntos numéricos, se expresa como una adición entre el minuendo y el opuesto del sustraendo.

8 Operaciones con números reales

Explora

El cráter producido por un meteorito en la superficie de cierto planeta deja una cresta de $9\sqrt{3}$ m de altura, y presenta una profundidad máxima de $-20\sqrt{3}$ m, como se muestra en la Figura 1

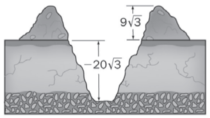


Figura 1

- ¿Qué operación permite calcular la distancia vertical entre la cresta y el punto más profundo del cráter?

Para calcular la distancia vertical entre la cresta y el punto más bajo del cráter, es necesario hallar la diferencia entre las longitudes dadas. Esto es:

$$\underbrace{9\sqrt{3}\text{ m}}_{\text{Minuendo}} - \left(\underbrace{-20\sqrt{3}\text{ m}}_{\text{Sustraendo}}\right) = 9\sqrt{3} + \underbrace{20\sqrt{3}}_{\text{Inverso aditivo del sustraendo}} = 29\sqrt{3}$$

Entonces, la distancia es de $29\sqrt{3}$ m.

En el anterior problema se observa que tanto los datos como la respuesta pertenecen a los números reales; es decir que las operaciones de tipo aditivo entre reales cumplen con la propiedad clausurativa. A continuación se estudian otras propiedades de las operaciones con números reales.

8.1 Adición y sustracción de números reales

Si a y b son dos números reales, la expresión $a + b$ corresponde a la **suma** de los sumandos y se llama **adición** a y b.

La **sustracción** o **resta** entre dos números reales es la expresión $a - b$. Esta operación es equivalente a la adición $a + (-b)$.

De forma general, para tres números reales (a, b y $c \in \mathbb{R}$) se cumplen estas propiedades:

Propiedad	Generalización	Explicación
Clausurativa	Si a y $b \in \mathbb{R}$, entonces $a + b \in \mathbb{R}$.	La suma de dos números reales es otro número real.
Conmutativa	$a + b = b + a$	No importa el orden en que sumen los dos números reales, pues la respuesta es igual.
Asociativa	$(a + b) + c = a + (b + c)$	Para sumar tres números reales, se pueden sumar dos y luego el tercero. No importa cómo se agrupen, pues la respuesta es igual.
Modulativa	Existe $0 \in \mathbb{R}$, tal que $a + 0 = a$.	Existe el número 0, tal que para todo número real a, la suma con 0 da como resultado el mismo número a.
Invertiva	Para todo número real a, existe $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.	Todo número real (a) tiene en el conjunto de los reales un número real llamado opuesto o inverso aditivo ($-a$). Al sumarlos da cero.

Tabla 1

Ejemplo 1

Un turista se encuentra en el punto A y se dirige hasta el punto B. Para ello tiene que desplazarse por diferentes trayectos cuyas distancias son: $40\sqrt{5}$ m, 20 m, $5\sqrt{5}$ m, $60\sqrt{3}$ m, 12 m y $12\sqrt{3}$ m, respectivamente.

- Así, la distancia total que recorre el turista está dada por la adición. Observa:

  $40\sqrt{5} + 20 + 5\sqrt{5} + 60\sqrt{3} + 12 + 12\sqrt{3} =$

  $\left(40\sqrt{5} + 5\sqrt{5}\right) + (20 + 12) + \left(60\sqrt{3} + 12\sqrt{3}\right) =$

  $45\sqrt{5} + 32 + 72\sqrt{3} = 257{,}33072$

  Aproximando por truncamiento a la décima, se obtiene: 257,33.

- Entonces, el turista debe recorrer aproximadamente 257,33 m de distancia total.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular adiciones y multiplicaciones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades en R (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).

8.2 Multiplicación y división de números reales

Si a y b son dos números reales, se llama multiplicación o producto a la expresión $a \cdot b$. Se utilizan expresiones alternas para indicar el producto; estas son:

$$a \cdot b = a \times b = (a)(b) = ab$$

La división o el cociente entre dos números reales es la expresión $a \div b$ o $\frac{a}{b}$. Este cociente se puede organizar de la forma $a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$.

De forma general, para tres números reales (a, b y $c \in \mathbb{R}$) se cumplen estas propiedades:

Propiedad	Generalización	Explicación
Clausurativa	$a \cdot b \in \mathbb{R}$	El producto de dos números reales es otro número real.
Conmutativa	$a \cdot b = b \cdot a$	El orden en el que se multipliquen dos números reales no altera el resultado.
Asociativa	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	Para multiplicar tres números reales, basta con multiplicar dos y luego multiplicarlos por el tercero, sin importa el orden en el que se agrupen.
Modulativa	Existe un elemento $1 \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$	Al multiplicar cualquier número real a por 1, el resultado es el mismo número a.
Invertiva	Para todo real a (a) existe a^{-1}, tal que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.	Todo número real (a) tiene en el conjunto de los reales un número real llamado inverso, tal que al multiplicarlo por él su producto es 1.
Distributiva de la multiplicación respecto a la adición	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	El producto de una suma por un número a es igual a la suma de los productos del número a por cada uno de los términos de la suma.

Tabla 2

Figura 2

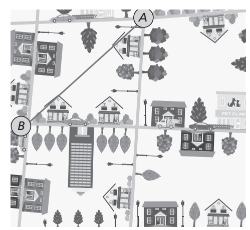


Figura 3

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Calcula la velocidad a la que viaja el sonido de una vuvuzela, si se sabe que la velocidad de propagación v es: $v = \frac{x}{t} = \frac{distancia}{tiempo}$. Ten en cuenta esto:

a. La distancia entre el punto A y B es de 27 metros (Figura 2) y el sonido tarda cuatro segundos en llegar de un punto al otro.

b. La distancia vertical es de 15 m y horizontal es de 9 m. Además, el sonido se demora cinco segundos en llegar de un punto al otro.

Solución:

a. En este caso, basta con reemplazar los datos en la fórmula inicial. Así, a velocidad v será: $v = \frac{x}{t} = \frac{27 \text{ metros}}{4 \text{ segundos}} = \frac{27}{4}$ m/s 5 6,75 m/s.

b. Como no se conoce la distancia que hay entre A y B (Figura 3), primero se calcula esta medida así: $\sqrt{15^2 + 9^2} = 3\sqrt{34}$ metros. Después se aplica la fórmula $v = \frac{x}{t} = \frac{3\sqrt{34} \text{ metros}}{5 \text{ segundos}} = \frac{3\sqrt{34}}{5}$ m/s 3,49857 m/s.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Proponga un ejemplo de cada unda de las propiedades de la adición de números reales.
   - **a.** Clausurativa
   - **b.** Conmutativa
   - **c.** Asociativa
   - **d.** Modulativa
   - **e.** Invertida

Actividades TIC

En el link:

http://www.genmagic.net/mates5/numeros_reales/mat4eso1_1c.swf

Analiza la información y resuelve los ejercicios propuestos

Actividades colaborativas

Proponga grupos de trabajo por afinidad y determine el largo de la cola de una cometa si está formada por trozos de tela de longitudes

√5 cm,12√7 cm y 13√(8) cm

Encuentra el área de un rectángulo de dimensiones

2√7 cm y 13√(8)

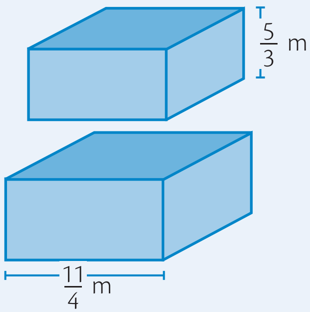
Libro del alumno

Actividades colaborativas

Pide a los estudiantes que en grupo resuelvan el siguiente problema.

Jaime compra un tanque en forma de cubo, para almacenar agua en su finca.

¿ Cuál tanque podría almacenar mayor cantidad de agua?



Ejercitación

2. a. $9\sqrt{3}$ b. $5\sqrt{7}$

c. $13\sqrt{11}$ d. $9\sqrt{11}$

e. -5

3. a. 70 b. $\frac{2}{3}$

c. $22\sqrt{11}$ d.

e. $\frac{4\pi}{15}$

Bloque de Álgebra y funciones

8 Operaciones con números reales

MatemaTICS

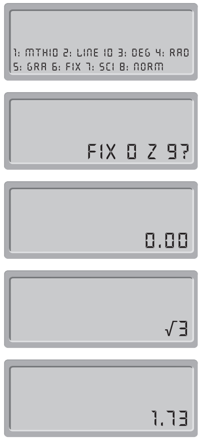
Programar la calculadora para aproximar decimales

Las calculadoras científicas se pueden programar para que los resultados se muestren con una aproximación por redondeo y con tantas cifras decimales como se necesite.

Ejemplo.

Programa la calculadora para que los resultados se aproximen por redondeo a dos cifras decimales.

1. En la opción Menú (MENU) se oprime Shift y Menú (SHIFT MENU) para ir a la zona de programación Set Up.
2. Aparecen en la pantalla varias opciones, entre ellas la opción Fix, que se encuentra precedida de un número. Se oprime la tecla con el número relacionado con la función Fix, que es el número 6: SHIFT MENU 6.
3. La calculadora da las opciones de 0 Z 9 para establecer cuántas cifras decimales se requieren para aproximar el número. Después, basta con oprimir la tecla que muestra el número que se desea, que en este caso es 2. Después, pulsa SHIFT MENU 6 2.
4. Entonces, para calcular $\sqrt{3}$, se digita la secuencia SHIFT x^2 3 EXE.
5. Finalmente, se oprime la tecla F↔D.



Ahora practica: programa la calculadora para que las respuestas se aproximen con cinco cifras decimales y calcula $6 \div 7$.

Desarrolla tus competencias

Ejercitación

2 Selecciona la suma o la diferencia en cada caso.

a. $2\sqrt{3} + 7\sqrt{3}$
b. $2\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$
c. $11\sqrt{11} + 2\sqrt{11}$
d. $11\sqrt{11} - 2\sqrt{11}$
e. $8\pi - 13\pi$

$9\sqrt{3}$	$3\sqrt{9}$	$9\sqrt{6}$
$5\sqrt{14}$	$7\sqrt{5}$	$5\sqrt{7}$
$11\sqrt{13}$	$13\sqrt{11}$	$13\sqrt{22}$
$11\sqrt{9}$	$9\sqrt{11}$	$9\sqrt{0}$
5π	21π	-5π

3 Selecciona el producto o el cociente en cada caso.

a. $7\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$
b. $2\sqrt{7} \div 3\sqrt{7}$
c. $11\sqrt{11} \times 2$
d. $\frac{4}{3} \times \frac{\pi}{5}$

$35\sqrt{2}$	35×4	70
$5\sqrt{14}$	$7\sqrt{5}$	$\frac{2}{3}$
$11\sqrt{13}$	$22\sqrt{11}$	$13\sqrt{22}$
$\frac{4}{3}$	$\frac{4\pi}{8}$	$\frac{4\pi}{15}$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular adiciones y multiplicaciones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades en R (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

4 Encuentra una expresión simplificada para cada uno de los siguientes cocientes.

a. $\sqrt{2} \div \frac{1}{2}$ b. $\frac{\sqrt{3}}{4} \div \frac{1}{4}$

c. $1 \div \sqrt{2}$ d. $\frac{2}{3} \div \sqrt{3}$

e. $\sqrt{5} \div \frac{2}{5}$ f. $\pi \div \frac{3}{4}$

Comunicación

5 Indica la propiedad que se debe usar en cada caso.

Ejercicio	Propiedad
$\frac{3}{5\pi} - \frac{3}{5\pi} = 0$	
$\sqrt{7} * \sqrt{5} * \sqrt{6} = (\sqrt{35}) * \sqrt{6} = \sqrt{210}$	
$\frac{7}{3} + 0 = \frac{7}{3}$	

Tabla 2

6 Completa la Tabla 3 con la fórmula de la velocidad de propagación del sonido, $v = \frac{x}{t}$; $t = \frac{x}{v}$; $x = tv$.

Velocidad (v)	Tiempo (t)	Distancia (d)
	10 seg.	$d = 50$ m
1,2 m/s	5 seg.	$d = ?$
2,5 m/s		$d = 40$
10 m/s	4 seg.	$d = 40$
	$\frac{3}{2}$ seg.	$d = 15$ m
	2 seg.	$d = 13$
2,5 m/s	2 seg.	$a = 5$

Tabla 3

Razonamiento

7 Calcula la distancia que recorre la rueda de una bicicleta si el plato de pedales da una vuelta. Ten en cuenta que el radio de la rueda y del plato son 50 cm y 15 cm, respectivamente, como se ve en la Figura 4.

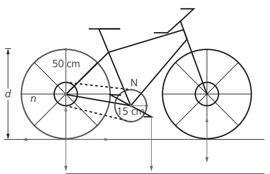


Figura 4

8 Calcula la distancia recorrida por un turista desde el punto A hasta el punto B, como se ve la Figura 5.

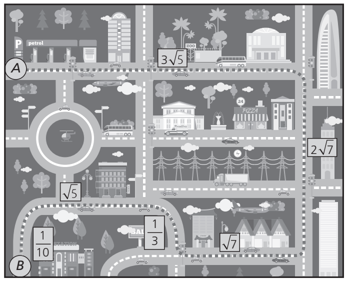


Figura 5

Resolución de problemas

9 Encuentra una expresión numérica para el área de cada figura y resuelve.

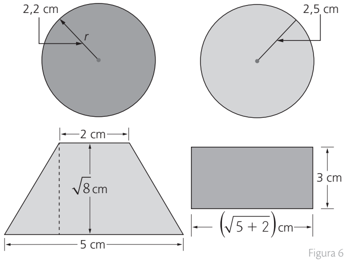


Figura 6

a. ¿Cuál es la figura con mayor área?

b. ¿Cuál es la figura con menor área?

c. Propón una figura cuya área sea aproximadamente igual a alguna de estas figuras.

10 La longitud de una circunferencia se expresa con un número irracional. Indica el valor que debe tener el radio de una circunferencia para que la longitud sea un número racional. Justifica tu respuesta.

11 Halla la arista de un cubo si se sabe que tiene una capacidad de 2 000 L. Utiliza las cuatro operaciones básicas y describe el procedimiento que seguiste.

12 Determina cuál es la medida del radio de un círculo si se conoce que la longitud de la circunferencia correspondiente mide 10π cm. Después, explica el procedimiento que utilizaste para hallar tu respuesta.

Ejercitación

4. a. $2\sqrt{2}$ b. $\sqrt{3}$ c. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d. $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ e. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ f. $\frac{4\pi}{3}$

Comunicación

5. a. Invertiva b.Asociativa c.Modulativa

6.

Velocidad (v)	Tiempo (t)	Distancia (d)
5 m/s	10seg	50 m
1,2 m/s	5seg	6 m
2,5 m/s	$a = 0{,}20$ $b = 16$	40
10 m/s	4 seg	40
10 m/s	$\frac{3}{2}$ seg	15 m
$\frac{13}{2}$ m/s	2 seg	13
2,5 m/s	2 seg	5

Razonamiento

7. $100\ \pi$

8. $3\sqrt{7} + 4\sqrt{5} + \frac{13}{30}$

Resolución de problemas

9. a. El círculo de radio 2,5.

b. El trapecio isósceles.

c. Respuesta libre

10. Respuesta libre

11. Respuesta libre

12. Respuesta libre

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Proponga ejemplos de potenciación de números naturales, enteros y racionales para recordar el concepto de potenciación.

b. Además del concepto recuérdeles las propiedades que se cumplen en esta operación, colocando especial énfasis en la notación $(a)^{-1}$ que representa el inverso multiplicativo de a. Pídales confirmar que $(a)^{-1} \cdot a = 1$.

Explique que para generalizar esta propiedad se emplea la notación $(a)^{-n}$, expresión que se puede escribir como $\frac{1}{(a)^n}$; propiedad es muy utilizada en la simplificación de expresiones fraccionarias.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Simplifica las expresiones.

a. $3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^1$

b. $\frac{3^8}{3^5}$

c. $2^0 \cdot 5^4 \cdot 2^3 \cdot 5^6$

d. $\frac{4^5}{4^{-2}}$

e. $6^5 \cdot 6^{-2}$

f. $\frac{5^6}{5^{-4}}$

h. $3^4 \cdot 2^4$

h. $\frac{6^4 \cdot 6^3}{6^5}$

9 Potencia de un número real

Explora

El cultivo de una bacteria Alpha (α) se duplica cada hora. En el laboratorio comienzan con tres bacterias; luego de una hora hay seis bacterias y, al cabo de dos, tres, y cuatro horas, hay 12, 24 y 48 bacterias, respectivamente.

- ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de cinco horas?
- Si hay 384 bacterias, ¿cuánto tiempo ha pasado?

El crecimiento de la bacteria Alpha se puede determinar a partir de la siguiente tabla:

Población	3	6	12	24	48	96	192	384	768
Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Se observa que la bacteria crece potencialmente en relación con el tiempo.

Al cabo de seis horas, la población de la bacteria Alpha es de 192. Cuando la población es de 384 han pasado siete horas.

Esta relación entre la población y el tiempo está determinada por una regla matemática que se puede representar así:

Cantidad de bacterias = $3 \cdot 2^t$

Ahí, 3 es la cantidad de bacterias inicial, el 2 indica que la cantidad se está duplicando y t corresponde al tiempo transcurrido.

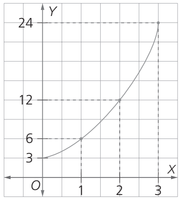


Figura 1

9.1 Propiedades de la potenciación de números reales

Si a es un número real y n, m son enteros positivos, la **potencia** es la expresión a^n.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_{n \text{ veces}}$$

La potenciación se puede considerar como una operación abreviada de una multiplicación reiterada con el mismo factor. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, la potenciación cumple las siguientes propiedades:

$a^0 = 1$, $a \neq 0$	$a^1 = a$	$a^m \cdot a^n = a^{(m+n)}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{(m-n)}$ $a \neq 0$
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$	$(a^m)^n = a^{(m*n)}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

Tabla 1

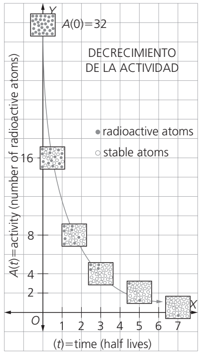


Figura 2

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. Las sustancias radioactivas se descomponen potencialmente con el tiempo.

- Por ejemplo, el isótopo de yodo se descompone cada ocho días a la mitad de su valor. Si el valor inicial es x, halla la parte del valor inicial después de 40 días.

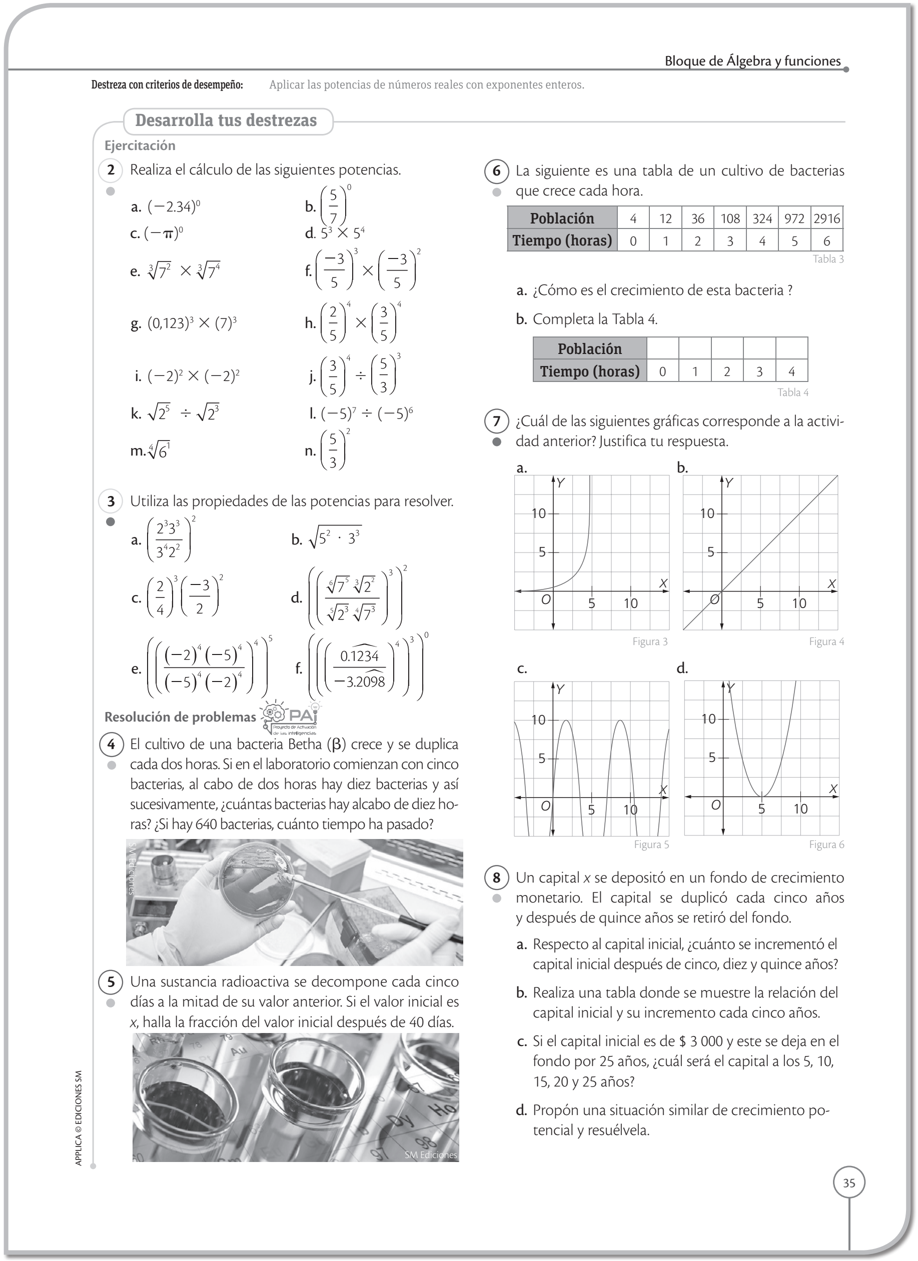
Solución:

a. Haz una tabla para relacionar la cantidad del isótopo y el tiempo transcurrido. Para el día cero, el isótopo tiene el 100%; luego de ocho días hay el 50% .

% isótopo yodo	100%	50%	25%	12,5%	6,25%	3,125%	1,562 5%
Tiempo (días)	0	8	16	24	32	40	48

Tabla 2

b. Después de 40 días solo queda el 3,125% del isótopo de yodo; el porcentaje **de isótopo** es $a * \left(\frac{1}{2}\right)^t$, donde a es la cantidad inicial del isótopo, $\frac{1}{2}$ es la relación de descomposición y t es el tiempo en días: $t = 8$.



Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar las potencias de números reales con exponentes enteros.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Realiza el cálculo de las siguientes potencias.

a. $(-2.34)^0$ b. $\left(\frac{5}{7}\right)^0$

c. $(-\pi)^0$ d. $5^3 \times 5^4$

e. $\sqrt[3]{7^2} \times \sqrt[3]{7^4}$ f. $\left(\frac{-3}{5}\right)^3 \times \left(\frac{-3}{5}\right)^2$

g. $(0{,}123)^3 \times (7)^3$ h. $\left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4$

i. $(-2)^2 \times (-2)^2$ j. $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \div \left(\frac{5}{3}\right)^3$

k. $\sqrt{2^5} \div \sqrt{2^3}$ l. $(-5)^7 \div (-5)^6$

m. $\sqrt[4]{6^1}$ n. $\left(\frac{5}{3}\right)^2$

3 Utiliza las propiedades de las potencias para resolver.

a. $\left(\frac{2^3 3^3}{3^4 2^2}\right)^2$ b. $\sqrt{5^2 \cdot 3^3}$

c. $\left(\frac{2}{4}\right)^3\left(\frac{-3}{2}\right)^2$ d. $\left(\left(\frac{\sqrt[6]{7^5}\,\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\,\sqrt[4]{7^3}}\right)^3\right)^2$

e. $\left(\left(\frac{(-2)^4(-5)^4}{(-5)^4(-2)^4}\right)^4\right)^5$ f. $\left(\left(\left(\frac{0.\widehat{1234}}{-3.\widehat{2098}}\right)^4\right)^3\right)^0$

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

4 El cultivo de una bacteria Betha (β) crece y se duplica cada dos horas. Si en el laboratorio comienzan con cinco bacterias, al cabo de dos horas hay diez bacterias y así sucesivamente, ¿cuántas bacterias hay alcabo de diez horas? ¿Si hay 640 bacterias, cuánto tiempo ha pasado?

5 Una sustancia radioactiva se decompone cada cinco días a la mitad de su valor anterior. Si el valor inicial es x, halla la fracción del valor inicial después de 40 días.

SM Ediciones

6 La siguiente es una tabla de un cultivo de bacterias que crece cada hora.

Población	4	12	36	108	324	972	2916
Tiempo (horas)	0	1	2	3	4	5	6

Tabla 3

a. ¿Cómo es el crecimiento de esta bacteria ?

b. Completa la Tabla 4.

Población					
Tiempo (horas)	0	1	2	3	4

Tabla 4

7 ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a la actividad anterior? Justifica tu respuesta.

a. Figura 3

b. Figura 4

c. Figura 5

d. Figura 6

8 Un capital x se depositó en un fondo de crecimiento monetario. El capital se duplicó cada cinco años y después de quince años se retiró del fondo.

a. Respecto al capital inicial, ¿cuánto se incrementó el capital inicial después de cinco, diez y quince años?

b. Realiza una tabla donde se muestre la relación del capital inicial y su incremento cada cinco años.

c. Si el capital inicial es de $ 3 000 y este se deja en el fondo por 25 años, ¿cuál será el capital a los 5, 10, 15, 20 y 25 años?

d. Propón una situación similar de crecimiento potencial y resuélvela.

Ejercitación

2. a. 1 b. 1 c. 1

d. 78 125 e. 49 f. $-\frac{243}{3\,125}$

g. 0,638 h. $\frac{1\,296}{390\,625}$ i. 16

j. $\frac{3^7}{5^7}$ l. -5 n. $\frac{25}{9}$

3. a. $\frac{4}{9}$ b. $15\sqrt{3}$ c. $\frac{9}{32}$

d. 1 e. 1 f. 1

Resolución de problemas

4. Al cabo de 10 horas hay 160 bacterias.

Si hay 640 bacterias han pasado 14 horas.

5. $\frac{x}{16}$

6.

Población	4	12	36	108	324
Tiempo	0	1	2	3	4

7. La respuesta es la a.

8. a. Cinco años $2x$ Diez años $4x$

Quince años $8x$

b.

Tiempo	5 años	10 años	15 años
Capital	$2x$	$4x$	$8x$

c. 5 años $ 6 000

10 años $ 12 000

15 años $ 24 000

20 años $ 48 000

25 años $ 96 000

d. Respuesta libre

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Expresión de un número real en notación científica

- Para expresar cantidades muy grandes en notación científica, se emplean potencias positivas de 10.

$$4\,000\,000 = 4 \times 10^5$$

$$34\,000\,000\,000 = 3{,}4 \times 10^{10}$$

- Para expresar cantidades muy pequeñas en notación científica, se emplean potencias negativas de 10.

$$0{,}0005 = 5 \times 10^{-4}$$

$$0{,}000000024 = 2{,}4 \times 10^{-8}$$

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Para el estudio de este tema los estudiantes deben manejar adecuadamente las propiedades de la potenciación de reales y sus propiedades.

b. Presente a los estudiantes situaciones en las cuales se emplee la notación científica. Lleve lecturas científicas que permitan la identificación de números en esta notación: distancias entre estrellas, la longitud de diámetros de algunos planetas; la velocidad de la luz, entre otros.

c. Haga énfasis en que deben expresar un producto entre un número decimal menor que diez y una potencia de diez.

d. Explique a los estudiantes que para realizar operaciones con potencias de base diez, es necesario aplicar la propiedad distributiva.

Bloque de Álgebra y funciones

10 Notación científica

Explora

Se estima que el glóbulo rojo humano tiene un diámetro de 0,006 5 mm. Por su parte, la distancia de la Tierra al Sol mide alrededor de 150 000 000 000 m.

- ¿Qué características tienen los números que representan las medidas?
- ¿Conoces una forma abreviada de escribir estos números?

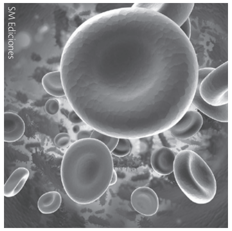


Figura 1

Mientras la medida del diámetro del glóbulo rojo (0,006 5 mm) corresponde a una medida muy pequeña, la medida de la distancia de la Tierra al Sol (150 000 000 000 m) es una medida muy grande.

El uso de estos números en su escritura extendida es muy complejo, debido a que en algunos casos se dificulta su lectura y en otros, su uso en las operaciones. Por ello, desde la antigüedad se dieron a la tarea de buscar maneras de representar estas y otras cantidades similares a partir de lo que hoy se conoce como notación científica.

La **notación científica** de un número real es su expresión como el producto de un número mayor o igual que 1 y menor que 10, por una potencia de 10. La forma general de un número escrito a partir de su notación científica es:

$$k \cdot 10^n \text{ donde } 1 \leq k < 10 \text{ y } n \in \mathbb{Z}$$

Además, n es negativo cuando corresponde a la expresión de una cantidad muy pequeña y n es positivo cuando se relaciona con una cantidad muy grande.

Aplicando la notación científica a la escritura del diámetro del glóbulo rojo y la distancia de la Tierra al Sol, se obtiene lo siguiente:

$$0{,}0065 \text{ mm} = 6{,}5 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$$

Hay tres lugares entre el lugar de la coma y el 6. Por ello, el exponente de la potencia es −3.

$$150\,000\,000\,000 \text{ m} = 1{,}5 \cdot 10^{10} \text{ m}$$

Hay diez lugares entre el final del número y el 1. Por ello, el exponente de la potencia es +10.

Ejemplo 1

La masa de la Tierra es aproximadamente de 5 970 000 000 000 000 000 000 000 kg. Para escribir este número usando la notación científica, se procede así:

- Se identifica cuál es la primera cifra mayor o igual a 1 y menor que 10, es decir, 5.
- Desde allí, se cuenta el número de lugares que hay hasta el final del número, que es 24. Este valor corresponde al valor del exponente del número 10.
- Se escribe la igualdad correspondiente como ve a continuación:

$$5\,970\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 597 \cdot 10^{22} \text{ kg.}$$

Ejemplo 2

Los números 7 000 000 y 0,000 000 035 en notación científica se escriben así:

$$7\,000\,000 = 7 \cdot 10^6$$

$$0{,}000\,000\,035 = 3{,}5 \cdot 10^{-8}$$

Para expresar cantidades grandes en notación científica, se emplean potencias positivas de 10, mientras que para expresar cantidades pequeñas, se emplean potencias negativas de 10.

Ejemplo 3

Una cienmillonésima de milímetro cuadrado puede escribirse como:

$$\frac{1}{100\,000\,000} \text{ mm}^2$$

Esta expresión equivale a 0,00000001 mm^2.

Dicha cantidad puede escribirse en forma más clara y corta con notación científica:

$$0{,}000\,000\,1 \text{ mm}^2 = 1 \cdot 10^{-8} \text{ mm}^2$$

Ten en cuenta

El primer intento de representar números demasiado grandes fue emprendido por el matemático y filósofo griego Arquímedes. Los describe en su obra *El contador de arena* del siglo III a. C. Él ideó un sistema de representación numérica para estimar cuántos granos de arena existían en el universo.

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar las potencias de números reales con exponentes enteros para la notación científica.

Actividades resueltas

Resolución de problemas

1. Si el espacio de un chip de computadora mide 0,000 002 52 m de ancho, 0,000 000 14 m de largo y 0,000 225 m de alto, ¿cuál es su volumen?

Solución:

Para calcular el volumen, se multiplican los valores de las tres dimensiones así:

a. Primero se expresan las medidas en notación científica.

- Ancho: 0,000 002 52 m $= 2{,}52 \cdot 10^{-6}$
- Largo: 0,000 000 14 m $= 1{,}4 \cdot 10^{-7}$
- Alto: 0,000 225 m $= 2{,}25 \cdot 10^{-4}$

b. Después, se multiplican los números de las cifras decimales.

$2{,}52 \cdot 1{,}4 \cdot 2{,}25 = 7{,}938$

c. Finalmente, se multiplican las potencias de 10.

$10^{-6} \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-4} = 10^{-17}$

El resultado es $\mathbf{7{,}938 \cdot 10^{-17}\ m^3}$.

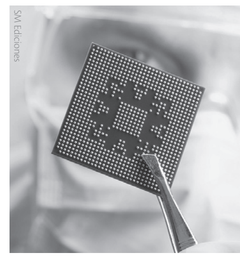


Figura 2

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Completa la Tabla 1.

Notación decimal	Notación científica
0,00000038	
53 000 000	
0,000000000 25	
0,000000079	
62 500 000 000	

Tabla 1

3. Calcula.

a. $(4 \cdot 10^{-10})(3 \cdot 10^{5})$

b. $\dfrac{2{,}829 \cdot 10^{-11}}{3{,}45 \cdot 10^{-4}}$

c. $5\,563{,}8 \cdot 104 + 39{,}1 \cdot 106 - 2{,}79 \cdot 107$

d. $\dfrac{(3{,}12 \cdot 10^{-5} + 7{,}03 \cdot 10^{-4}) \cdot 8{,}3 \cdot 10^{8}}{4{,}32 \cdot 10^{3}}$

4. Escribe en notación científica los siguientes datos.

a. La velocidad de la luz en el vacío es aproximadamente de 300 000 000 m/seg.

b. Un año luz es la longitud que recorre la luz en un año. Su valor es 9 460 000 000 000 km.

c. La distancia media de Saturno al Sol es de 141,8 millones de kilómetros.

d. La masa de un protón es:

0,000 000 000 000 000 000 000 000 00169 kg

e. El diámetro de un virus es 0, 000 000 026 7 m.

Razonamiento

5. Indica cuál de los siguientes números está escrito en el formato de notación científica.

a. $7{,}24 \cdot 10^{0{,}08}$ b. $0{,}724 \cdot 10^{7}$

c. $72{,}4 \cdot 10^{5}$ d. $7{,}24 \cdot 10^{6}$

Resolución de problemas

6. La luz viaja aproximadamente a $3 \cdot 10^{5}$ km por segundo. Si tarda cerca de $5 \cdot 10^{2}$ segundos en llegar a la Tierra, ¿cuál es la distancia aproximada, en notación científica, del Sol a la Tierra?

7. Un cabello humano tiene un grosor de menos de 0,1 mm. ¿Cuánto ocuparían, a lo ancho, un millón de cabellos puestos en fila, uno al lado del otro? Expresa el resultado primero en milímetros, usando la notación científica, y luego en la unidad adecuada.

8. La energía total recibida desde el Sol cada minuto es de $1{,}02 \cdot 10^{19}$ calorías. Si el área de la Tierra es de $5{,}1 \cdot 10^{18}$ centímetros, ¿cuál es la cantidad de energía que recibe por centímetro cuadrado en un minuto (la constante solar)?

9. La velocidad del sonido en el aire es de $3{,}31 \cdot 10^{4}$ centímetros por segundo. Calcula esa velocidad en centímetros por hora.

10. Una persona tiene 5 litros de sangre y hay aproximadamente 4 500 000 glóbulos rojos en cada milímetro cúbico. ¿Cuántos glóbulos rojos tiene una persona, aproximadamente? Expresa el valor en notación científica.

Resolución de problemas

1. a. $1{,}4 \cdot 10^{-7}$, $2{,}25 \cdot 10^{-4}$

b. 7,939

c. $7{,}938 \cdot 10^{-17}$

Ejercitación

2.

Notación decimal	Notación científica
0,00000038	$3{,}8 \cdot 10^{-7}$
5,3000000	$5{,}3 \cdot 10^{7}$
0,0000000025	$2{,}5 \cdot 10^{-9}$
0,000000079	$7{,}9 \cdot 10^{-8}$
6,2500000000	$6{,}25 \cdot 10^{10}$

3. a. $1.2 \cdot 10^{-4}$

b. $8{,}2 \cdot 10^{-8}$

c. $5{,}8248127 \cdot 10^{5}$

d. $1{,}41061574 \cdot 10^{2}$

4. a. $3 \cdot 10^{8}$ b. $9{,}46 \cdot 10^{12}$

c. $1{,}418 \cdot 10^{8}$ d. $1{,}69 \cdot 10^{-27}$

e. $2{,}67 \cdot 10^{-8}$

5. a. no b. no

c. no d. sí

Resolución de problemas

6. $1{,}5 \cdot 10^{7}$

7. $1 \cdot 10^{6}$ mm

8. $5{,}2 \cdot 10^{37}$

9. $1{,}19 \cdot 10^{8}$

10. $9 \cdot 10^{8}$

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Raices reales

El número de raices reales que tiene un número real depende del signo del radicando y si su índice es un número par o impar.

Índice	Radicando	Número de raíces reales
Impar	Cualquier número real	Una de igual signo que el radicando
Par	Positivo	Dos raíces opuestas
	Nulo	Una raíz nula
	Negativo	No existen raíces reales

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Comience por centrar la atención en el problema propuesto en el depósito de agua, en el cual se presentan aplicaciones de la radicación. Posteriormente recuérdeles la definición de esta operación y su relación con la potenciación.

b. Muestre a los estudiantes, la importancia de la descomposición de números en factores primos para calcular raíces y simplificar expresiones, como se observa en el ejemplo desarrollado en la página. Oriente ejercicios de refuerzo adicionales a los propuestos en la sección Actividades colaborativas.

11 Raíz de un número real

Explora

Un depósito de agua en forma de cubo tiene una capacidad de 125 cm^3.

- ¿Cuál es la longitud de la arista del depósito de agua?

Para calcular la longitud de la arista del depósito de agua, es necesario hallar un valor tal que elevado al cubo dé como resultado 125.

Si se busca por ensayo-error, se evidencia esto:

$$2^3 = 8 \qquad 3^3 = 27 \qquad 4^3 = 64 \qquad 5^3 = 125$$

Entonces, la respuesta es 5, porque es el valor que elevado al cubo da 125 o, dicho de otra manera, la raíz cúbica de 125 es igual a 5. Se puede escribir de estas dos maneras:

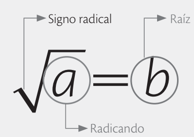
Como potencia con exponente fraccionario	Como expresión radical
$(125)^{\frac{1}{3}} = 5$	$\sqrt[3]{125} = 5$

Tabla 1

11.1 Raíz enésima

La **radicación** es una de las operaciones inversas de la potenciación y cumple que para un número natural *n*, si $b^n = a$, *b* es la raíz enésima de *a*.

Ten en cuenta



La radicación es una operación inversa de la potenciación, en donde se busca la base conociendo el exponente y la potencia.

Ejemplo 1

Según el valor del índice, las raíces se llaman cuadradas, cúbicas, cuartas, quintas, sextas... y, en general, raíces enésimas. Mira cómo se leen las siguientes raíces:

$\sqrt{3}$	Raíz cuadrada de 3.
$\sqrt[3]{125}$	Raíz cúbica de 125.
$\sqrt[3]{729}$	Raíz cuarta de 729.

11.2 Potencias con exponente fraccionario

Una **potencia de exponente racional** se puede expresar como un **radical** así:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Aquí: • El **índice del radical** equivale al **denominador** de la fracción.
• El **radicando** corresponde a la **base** elevada al **numerador**.

Ten en cuenta

Las potencias de exponente fraccionario cumplen las mismas propiedades que las potencias de exponente entero.

Ejemplo 2

Las potencias $5^{\frac{1}{3}}$ y $27^{0,25}$ se pueden escribir como expresiones radicales. Observa:

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \qquad 27^{0,25} = 27^{\frac{1}{4}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3}$$

Ejemplo 3

Esta relación es útil para encontrar, por ejemplo, el resultado de $\sqrt{2^{12}}$. Observa:

Se expresa el radical como potencia: $\sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}}$

Luego, se simplifica la fracción: $\sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}} = 2^6$

Por último, se resuelve la potencia: $\sqrt{2^{12}} = 2^{\frac{12}{2}} = 2^6 = 64$

TIC TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt02

Descubre una excelente herramienta para calcular raíces de números reales.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular raíces de números reales no negativos aplicando las propiedades en R.

11.3 Propiedades de las raíces de números reales

El **producto** y el **cociente de radicales** del mismo índice se pueden expresar como otro radical que tiene por índice al índice común y por radicando al producto o el cociente de los radicandos.

En general: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

Ten en cuenta

Para cualquier número real x y para un número entero positivo $n > 1$, se cumple esto:

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, \text{ si } n \text{ es par} \\ x, \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplo 4

Observa cómo se calcula el siguiente producto y cociente entre radicales reales.

$$\sqrt[5]{2x} \cdot \sqrt[5]{3y} = \sqrt[5]{2x \cdot 3y} = \sqrt[5]{6xy}$$

$$\frac{\sqrt[5]{6x}}{\sqrt[5]{3y}} = \sqrt[5]{\frac{6x}{3y}} = \sqrt[5]{\frac{2x}{y}}$$

La **potencia** de un radical es otro radical que tiene por índice el mismo índice y por radicando la potencia del radicando.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt{a}\right)^{m \cdot n}$$

Ten en cuenta

La raíz de una adición o sustracción no es la suma o resta de las raíces.

$$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Ejemplo 5

Para resolver $\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3$, se sigue este procedimiento:

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3 = \sqrt[3]{\left(x^2\right)^3} = \sqrt[3]{x^6} = x^{\frac{6}{3}} = x^2$$

La **raíz** de un radical es otro radical que tiene por índice el producto de los índices y por radicando el mismo valor.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

Ejemplo 6

Observa cómo se soluciona la raíz de otra raíz $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$. Se multiplican los índices y se obtiene una sola raíz; después, se extrae la raíz indicada. Observa:

$$\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$$

Ejemplo 7

Este es el procedimiento para extraer el máximo de los factores posibles de los radicales $\sqrt[3]{2000}$ y $\sqrt[3]{3125x^3}$.

Se descompone el radicando en factores primos y se expresan como potencia. Luego, se aplican las propiedades de los radicales.

- $\sqrt[3]{2000} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 2^4} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} = 5 \cdot 2\sqrt[3]{2}$
- $\sqrt[3]{3125x^3} = \sqrt[3]{5^5 x^3} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5^2 x^3} = \sqrt[3]{5^3} \cdot \sqrt[3]{5^2}\, \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{5^2} \cdot x$

En consecuencia: $\sqrt[3]{3125x^3} = 5x\sqrt[3]{25}$

Ten en cuenta

Si algún factor del radicando tiene por exponente un número mayor que el índice, se puede extraer afuera del radical dividiendo el exponente del radicando entre el índice.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Cerca de la superficie terrestre, el tiempo t que tarda un objeto en caer una distancia d está dado por $t = \frac{1}{4} d^{\frac{1}{4}}$, donde t se mide en segundos y d se mide en pies. Halla el tiempo que tardará un objeto en caer 100 pies.
2. La relación entre el radio r de una esfera y su área total A es $r = \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$. ¿Cúal es el radio de una esfera que tiene un área total de 64 unidades cuadradas?

Actividades TIC

En el link:

http://www.e-sm.net/8smt02

Descubre la información y utiliza esta herramienta para calcular raices

Actividades colaborativas

Forma grupos de 5 estudiantes y pida que resuelvan problemas que requieren la aplicación de las propiedades de los radicales por ejemplo:

Un microchip rectangular mide 9 $\sqrt{3}$m de largo y su diagonal mide $\sqrt{485}$m. ¿Cuál es el área del microchip?

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Radicales quivalentes

Dos o más radicales se dicen equivalentes si las fracciones de los exponentes de las potencias asociadas son equivalentes.

Dado un radical se pueden obtener infinitos radicales equivalentes, multiplicando o dividiendo el exponente del radicando y el índice de la raíz por un mismo número. Si se multiplica se llama amplificar y si se divide se llama simplificar el radical.

Un radical es irreducible, cuando la fracción de la potencia asociada es irreducible.

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Indique a los y las estudiantes cuando dos o más radicales son equivalentes, en relación al índice y las cantidades subradicales, preséntenles los ejemplos de la página del texto y propóngales que den ejemplos de radicales equivalentes.

b. Recuerde como se encuentra el mínimo común múltiplo de números fraccionario, además deben tomar en cuenta que los radicales sean irreducibles para completar el proceso de encontrar radicales equivalentes.

Actividades TIC

En el link:

http://www.e-sm.net/8smt02

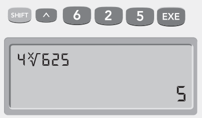
Descubre la información y utiliza esta herramienta para calcular raices.

Bloque de Álgebra y funciones

11 Raíz de un número real

Con calculadora

En las calculadoras, la tecla ^ se usa para calcular la raíz de cualquier número de índice x. Por ejemplo: $\sqrt[4]{625}$ sería 4.



Ejemplo 7

Este es el procedimiento que permite introducir un factor dentro de un radical.

Dada la expresión $2x\sqrt[5]{xy}$, para introducir al factor $2x$ en el radical, se escribe este factor dentro de la raíz, elevado al índice del radical. Se debe mantener el mismo índice en el resultado. Observa:

$$2x\sqrt[5]{xy} = \sqrt[5]{(2x)^5\,xy} = \sqrt[5]{32x^5xy} = \sqrt[5]{32x^6y}$$

11.4 Radicales equivalentes

Dos o más **radicales** son **equivalentes** si tienen la misma raíz.

Una forma de verificarlo es ver que los exponentes de las potencias asociadas sean equivalentes. Además, si se multiplican o dividen el **índice** y el **exponente** de un **radical** por un mismo **número natural**, se obtiene otro **radical equivalente**.

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[kn]{x^{km}}$$

Ten en cuenta

El número de raíces de un radical es:

- **Dos**, si el índice es par y el radicando es positivo.
- **Una**, si el índice es impar o el radicando es igual a 0.
- **Ninguna**, si el índice es par y el radicando es negativo.

Ejemplo 8

Las expresiones $3^{0,5}$, $\sqrt{3}$ y $27^{\frac{1}{6}}$, aparentemente distintas, son equivalentes. Observa:

$$3^{0,5} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$27^{\frac{1}{6}} = \left(3^3\right)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{3}{6}} = 3^{\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 9

Para saber si los radicales $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[6]{x^4}$ son equivalentes, se sigue este procedimiento:

1.° Los radicales se expresan como una potencia: $x^{\frac{2}{3}}, x^{\frac{4}{6}}$

2.° Se comprueba que las bases sean iguales.

3.° Se verifica que las fracciones de sus exponentes sean equivalentes: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Por lo tanto, los dos radicales son equivalentes.

Ten en cuenta

Un radical es irreducible cuando la fracción de la potencia asociada es irreductible.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor los radicales $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{2}$ y $\sqrt[10]{5}$.

Solución:

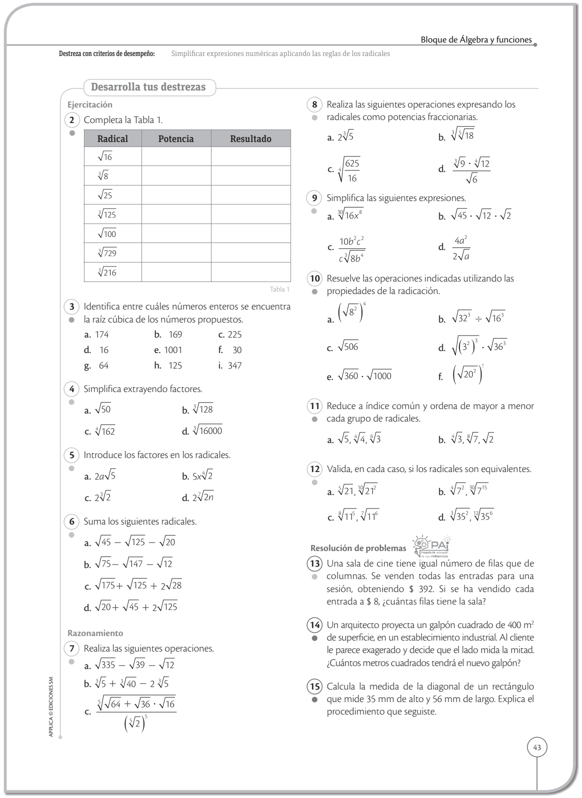
Se elige como índice común 10, esto es, el m.c.m. (2, 5, 10) = 10.

$$\sqrt{3} = \sqrt[5\cdot 2]{2^{1\cdot 2}} = \sqrt[10]{3^5} = \sqrt[10]{243};$$

$$\sqrt[5]{2} = \sqrt[5\cdot 2]{2^{1\cdot 2}} = \sqrt[10]{2^5} = \sqrt[10]{32};\quad \sqrt[10]{5}$$

Entonces: $\sqrt[10]{32} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[10]{243}$

Luego: $\sqrt[5]{2} < \sqrt[10]{5} < \sqrt{3}$


Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Simplificar expresiones numéricas aplicando las reglas de los radicales

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Completa la Tabla 1.

Radical	Potencia	Resultado
$\sqrt{16}$		
$\sqrt[3]{8}$		
$\sqrt{25}$		
$\sqrt[3]{125}$		
$\sqrt{100}$		
$\sqrt[3]{729}$		
$\sqrt[3]{216}$		

Tabla 1

3 Identifica entre cuáles números enteros se encuentra la raíz cúbica de los números propuestos.

a. 174 b. 169 c. 225
d. 16 e. 1001 f. 30
g. 64 h. 125 i. 347

4 Simplifica extrayendo factores.

a. $\sqrt{50}$ b. $\sqrt[3]{128}$
c. $\sqrt[4]{162}$ d. $\sqrt[3]{16000}$

5 Introduce los factores en los radicales.

a. $2a\sqrt{5}$ b. $5x\sqrt[4]{2}$
c. $2\sqrt[3]{2}$ d. $2\sqrt[7]{2n}$

6 Suma los siguientes radicales.

a. $\sqrt{45}-\sqrt{125}-\sqrt{20}$
b. $\sqrt{75}-\sqrt{147}-\sqrt{12}$
c. $\sqrt{175}+\sqrt{125}+2\sqrt{28}$
d. $\sqrt{20}+\sqrt{45}+2\sqrt{125}$

Razonamiento

7 Realiza las siguientes operaciones.

a. $\sqrt{335}-\sqrt{39}-\sqrt{12}$
b. $\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{40}-2\sqrt[3]{5}$
c. $\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt{64}+\sqrt{36}\cdot\sqrt{16}}}{\left(\sqrt[5]{2}\right)^5}$

8 Realiza las siguientes operaciones expresando los radicales como potencias fraccionarias.

a. $2\sqrt[3]{5}$ b. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{18}}$
c. $\sqrt[4]{\dfrac{625}{16}}$ d. $\dfrac{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[4]{12}}{\sqrt{6}}$

9 Simplifica las siguientes expresiones.

a. $\sqrt[30]{16x^8}$ b. $\sqrt{45}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{2}$
c. $\dfrac{10b^2c^2}{c\sqrt[3]{8b^4}}$ d. $\dfrac{4a^2}{2\sqrt{a}}$

10 Resuelve las operaciones indicadas utilizando las propiedades de la radicación.

a. $\left(\sqrt{8^2}\right)^4$ b. $\sqrt{32^3}\div\sqrt{16^3}$
c. $\sqrt{506}$ d. $\sqrt{\left(3^2\right)^3}\cdot\sqrt{36^3}$
e. $\sqrt{360}\cdot\sqrt{1000}$ f. $\left(\sqrt{20^2}\right)$

11 Reduce a índice común y ordena de mayor a menor cada grupo de radicales.

a. $\sqrt{5}, \sqrt[4]{4}, \sqrt[6]{3}$ b. $\sqrt[4]{3}, \sqrt[8]{7}, \sqrt{2}$

12 Valida, en cada caso, si los radicales son equivalentes.

a. $\sqrt[5]{21}, \sqrt[10]{21^2}$ b. $\sqrt[4]{7^2}, \sqrt[30]{7^{15}}$
c. $\sqrt[8]{11^5}, \sqrt[7]{11^6}$ d. $\sqrt[3]{35^2}, \sqrt[12]{35^6}$

Resolución de problemas

13 Una sala de cine tiene igual número de filas que de columnas. Se venden todas las entradas para una sesión, obteniendo \$ 392. Si se ha vendido cada entrada a \$ 8, ¿cuántas filas tiene la sala?

14 Un arquitecto proyecta un galpón cuadrado de 400 m^2 de superficie, en un establecimiento industrial. Al cliente le parece exagerado y decide que el lado mida la mitad. ¿Cuántos metros cuadrados tendrá el nuevo galpón?

15 Calcula la medida de la diagonal de un rectángulo que mide 35 mm de alto y 56 mm de largo. Explica el procedimiento que seguiste.

APLICA © EDICIONES SM

43

Ejercitación

2.

Radical	Potencia	Resultado
$\sqrt{16}$	$16^{\frac{1}{2}}$	4
$\sqrt[3]{8}$	$8^{\frac{1}{3}}$	2
$\sqrt{25}$	$25^{\frac{1}{2}}$	5
$\sqrt[3]{125}$	$125^{\frac{1}{3}}$	5
$\sqrt{100}$	$100^{\frac{1}{2}}$	10
$\sqrt[3]{729}$	$729^{\frac{1}{3}}$	9
$\sqrt[3]{216}$	$216^{\frac{1}{3}}$	6

3. **a.** Entre 5 y 6 **b.** Entre 5 y 6
c. Entre 6 y 7 **d.** Entre 2 y 3
e. Entre 10 y 11 **f.** Entre 3 y 4
g. 4 **h.** 5 **i.** Entre 7 y 8

4. **a.** $5\sqrt{2}$ **b.** $4\sqrt[3]{2}$
c. $3\sqrt[4]{2}$ **d.** $20\sqrt[3]{2}$

5. **a.** $\sqrt{20a}$ **b.** $\sqrt{1250x^4}$
c. $\sqrt[3]{16}$ **d.** $\sqrt[7]{256n}$

6. **a.** $-4\sqrt{5}$ **b.** $-4\sqrt{3}$
c. $9\sqrt{5}+5\sqrt{5}$ **d.** $15\sqrt{5}$

Razonamiento

7. **a.** $\sqrt{335}-\sqrt{39}-2\sqrt{3}$ **b.** $\sqrt[3]{5}$
c. 1

8. **a.** $2(5)^{\frac{1}{3}}$ **b.** 18^{15}
c. $\dfrac{5}{2}$ **d.** $243^{\frac{1}{12}}$

9. **a.** $\sqrt[15]{4x^2}$ **b.** $6\sqrt{30}$
c. $5c\sqrt[3]{b^2}$ **d.** $2a\sqrt{a}$

10. **a.** 4 096 **b.** $2\sqrt{2}$
c. $506^{\frac{1}{2}}$ **d.** 5 832
e. 600 **f.** 20

11. **a.** $\sqrt[12]{15625}, \sqrt[12]{729}, \sqrt[12]{64}$ **b.** $\sqrt[8]{16}, \sqrt[8]{9}, \sqrt[8]{7}$

12. **a.** Son equivalentes. **b.** No son equivalentes.
c. No son equivalentes. **d.** No son equivalentes.

Resolución de problemas

13. La sala de cine tiene 7 filas y 8 columnas.

14. El nuevo galpón tendrá una superficie de 100 m^2.

15. La diagonal mide 66 cm. Procedimiento Teorema de Pitágoras.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Cuando una fracción tiene radicales en el denominador siempre es posible expresarla como una fracción equivalente sin radicales en él.

Para la expresión radical:

$$\frac{34}{\sqrt{5m}}$$

Halla una expresión equivalente cuyo denominador no tenga radicales.

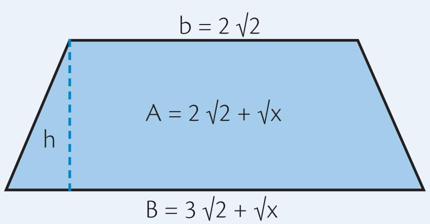
Para eliminar el radical en el denominador de la expresión $\frac{34}{\sqrt{5m}}$, se amplifica la fracción por $\sqrt{5m}$, así

$$\frac{34}{\sqrt{5m}} \cdot \frac{\sqrt{5m}}{\sqrt{5m}} = \frac{34\sqrt{5m}}{\sqrt{5m}}$$

De esta manera, se elimina el radical de índice 2 en el denominador y se obtiene $\frac{34\sqrt{5m}}{\sqrt{5m}}$ que es una expresión equivalente a $\frac{34}{\sqrt{5m}}$.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. En la figura, se observa con base mayor B, base menor b y área A ¿Que expresión determina la altura h del trapecio?



Bloque de Álgebra y funciones

12 Racionalización de denominadores

Explora

El área de un terreno rectangular es de $20\sqrt{2}$ m² y la longitud de uno de sus lados se representa con la expresión $\sqrt{32}$.

Figura 1

- ¿Cuál es la medida de la longitud del otro lado?

Para calcular la medida de uno de los lados del rectángulo, cuando se conoce el área y la medida del otro lado, basta con dividir el área entre la medida conocida. En este caso, se debe dividir $20\sqrt{2}$ m² entre $\sqrt{32}$.

En esta división podemos ver que el denominador es $\sqrt{32}$, un número irracional. Para poder resolver esta fracción lo mejor es buscar una fracción equivalente cuyo denominador sea un número racional. Este procedimiento se conoce como racionalización de denominadores.

Racionalizar una fracción con radicales consiste en conseguir una fracción equivalente donde su denominador sea racional. Si el denominador es un monomio de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ con $m < n$ y $u > o$, entonces en la fracción se multiplica tanto el numerador y el denominador por el factor $\sqrt[n]{a^{n-m}}$.

Por lo tanto, para calcular la altura del cuadrado se procede así:

$$\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{32}} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{32}} \cdot \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{32}} = \frac{20\sqrt{2 \cdot 32}}{32} =$$

$$\frac{20\sqrt{64}}{32} = \frac{20 \cdot 8}{32} \cdot \frac{160}{32} = 5$$

Se concluye que el terreno mide 5 m de alto.

Ten en cuenta

La expresión por la cual se multiplica otra para eliminar el radical se llama **"el conjugado de"**. Por ejemplo, el conjugado de es $\sqrt[3]{5}$ y el $\sqrt[3]{5^2}$ conjugado de $\sqrt{3} + 1$ es $\sqrt{3} - 1$

Ejemplo 1

La expresión $\frac{2x^2}{\sqrt[3]{9}}$ se puede escribir sin raíces en el denominador. Para esto, es necesario multiplicar el numerador y el denominador por el factor $\sqrt[3]{3}$, que reemplaza la raíz del denominador por un número entero. Observa:

$$\frac{6x^2}{\sqrt[3]{9}} = \frac{6x^2}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{6x^2}{\sqrt[3]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{6x^2 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2 \cdot 3}} = \frac{6x^2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{6x^2\sqrt[3]{3}}{3} = 2x^2\sqrt[3]{3}$$

Si el denominador es un binomio con radicales de índice 2, en la fracción se multiplica tanto el numerador como el denominador por el conjugado del denominador.

Ejemplo 2

Para racionalizar la expresión $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado de $\sqrt{5} - \sqrt{3}$, esto es $\sqrt{5} + \sqrt{3}$. Entonces:

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)}$$

$$\frac{3\sqrt{10} + 3\sqrt{6}}{\sqrt{25} + \sqrt{15} - \sqrt{15} - \sqrt{9}} = \frac{3\sqrt{10} + 3\sqrt{6}}{5 - 3} = \frac{3\sqrt{10} + 3\sqrt{6}}{2}$$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular raíces cuadradas de números reales no negativos y raíces cúbicas de números reales, aplicando las propiedades en R.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Racionaliza el numerador y el denominador de la expresión $\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{7}-3}$.

Solución:

Primero se racionaliza el numerador y después el denominador.

$$\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}=\frac{\left(5-\sqrt{2}\right)\left(5+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}-3\right)\left(5+\sqrt{2}\right)}=\frac{25+5\sqrt{2}-5\sqrt{2}-\sqrt{4}}{5\sqrt{2}+\sqrt{4}-15-3\sqrt{2}}$$

$$=\frac{25-2}{2\sqrt{2}+2-15}=\frac{23}{2\sqrt{2}-13}$$

$$\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}=\frac{\left(5-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+3\right)}{\left(\sqrt{2}-3\right)\left(\sqrt{2}+3\right)}=\frac{5\sqrt{2}+15-\sqrt{4}-3\sqrt{2}}{\sqrt{4}+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}-9}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}+15-2}{2-9}=\frac{2\sqrt{2}+13}{-7}$$

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla el conjugado de cada expresión.

a. $\sqrt[3]{x^3y^2}$ b. $\sqrt[3]{(x-5)^2}$.

c. $\sqrt{2x}+\sqrt{3}$ d. $\sqrt{xy}-3z$

3 Racionaliza el denominador de las siguientes expresiones y simplifica.

a. $\frac{1}{\sqrt[3]{2xy}}$ b. $\frac{6a}{\sqrt[3]{2a^2}}$

c. $\frac{3a^2}{\sqrt[4]{1-2a^2}}$ d. $\frac{2-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}}$

e. $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ f. $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

4 Racionaliza el numerador de cada expresión y simplifica.

a. $\frac{\sqrt{4x}}{3}$ b. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{xa}}$

c. $\frac{\sqrt{x+3}-3}{x}$ d. $\frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h}$

Razonamiento

5 Explica por qué las siguientes expresiones son equivalentes.

a. $\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ b. $\frac{\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

6 Justifica cada paso del siguiente procedimiento.

$$\frac{\sqrt{2-a}}{4-a^2}=\frac{\sqrt{2-a}\,\sqrt{2-a}}{\left(4-a^2\right)\sqrt{2-a}}=$$

$$\frac{2-a}{(2-a)(2+a)\sqrt{2-a}}$$

7 Encuentra una expresión equivalente con radicales, del mismo u otro índice, para cada caso.

a. $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2}}$ b. $\frac{\sqrt{2y}}{\sqrt[3]{27}}$

c. $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a^2}}$ d. $\sqrt[3]{\frac{9a^2}{b^6}}$

8 Halla el error, si lo hay, en el siguiente procedimiento.

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=\frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Resolución de problemas

9 El área de un rectángulo es $3\sqrt{3}$ cm² y su base mide $\sqrt{12}$ cm. Resuelve.

a. Calcula la medida de la altura del rectángulo.

b. Explica, paso a paso, el procedimiento que seguiste para llegar a tu respuesta.

Ejercitación

1. $\frac{2\sqrt{2}+13}{-7}$

2. a. $\sqrt[3]{xy^2}$ b. $\sqrt[3]{(x-5)}$

c. $\sqrt{2x}-\sqrt{3}$ d. $\sqrt{xy}+3z$

3. a. $\frac{\sqrt[3]{2xy^2}}{2xy}$ b. $\frac{3\sqrt[3]{2a^2}}{a}$

c. $-\frac{3a^2\sqrt[4]{-2a^2+1}}{2a^2-1}$ d. $\frac{2\sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}}$

e. $\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{15}\right)$ f. $\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{a-b}$

4. a. $\frac{4x}{6\sqrt{x}}$ b. $\frac{a}{a\sqrt{x}}$

c. $\frac{x-6}{x\sqrt{x+3}+3x}$

d. $\frac{h^2-2hx}{h\sqrt{x^2+h^2+1}+h\sqrt{x^2+1}}$

Razonamiento

5. a. Respuesta libre

b. Respuesta libre

6. Respuesta libre

7. a. $\frac{\sqrt[4]{4x}}{2}$ b. $\frac{\sqrt{2y}}{3}$

c. 1 d. $\frac{\sqrt{3ab}}{b^2}$

8. Se racionaliza con el conjugado, la respuesta correcta es 1.

9. a. $\frac{3}{2}$

b. Se divide el área entre la base

UNIDAD 1

Evaluación sumativa

Nombre:..

Grado:................ **Fecha:**................

1. Simplifica la expresión e indica la respuesta correcta.

$$\left|\,\left|4-\sqrt{25}\right|-(-3)^2+\sqrt[3]{-1}\,\right|$$

A. 7 B. 9

C. 11 D. 19

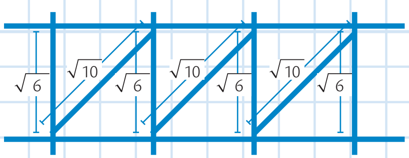
2. Resuelve las operaciones, aproxima el resultado a las centésimas e indica la respuesta correcta.

$$\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}-\frac{2}{3}$$

A. 2,57 B. 2,55

C. 2,32 D. 2,56

3. La reja de una ventana presenta incrustaciones de varillas en cobre, con las longitudes que se indican. Una expresión irracional para la longitud total de los segmentos de cobre es:



A. $12+4\sqrt{6}+3\sqrt{10}$ B. $12+4\sqrt{6}+3\sqrt{10}$

C. $12+4\sqrt{6}+3\sqrt{10}$ D. $12+4\sqrt{6}+3\sqrt{10}$

4. El resultado de la expresión $4,\widehat{79}-8,45\text{-}1,22\widehat{24}-\sqrt{\frac{121}{169}}$ es:

A. 5,7259

B. −3,7259

C. 3,7259

D. −5,7259

5. El resultado de $\sqrt{\left(\frac{39}{112}+\frac{3}{6}+\frac{5}{7}\right)-\frac{21}{4}+\left(\sqrt{3}\right)^4\left(\sqrt{3}\right)^{-2}}$ es:

A. −1

B. 1

C. −0,5

D. 0,5

6. En notación científica las cantidades 42 000 000 000 y 0,000000423 son:

A. $-4,2\times10^{7}$ y $4,23\times10^{-10}$

B. $4,2\times10^{-10}$ y $4,23\times10^{7}$

C. $4,2\times10^{10}$ y $4,23\times10^{-7}$

D. $4,2\times10^{-7}$ y $4,23\times10^{10}$

7. En notación usual las cantidades $4{,}5 \times 10^{-3}$ y $9{,}61 \times 10^{5}$ son:

A. 0,04 5 y 9 610 000

B. 0,004 5 y 961 000

C. 0,004 5 y 96 100

D. 0,004 5 y 9 610 000

8. La medida de la diagonal de un rectángulo que mide 12 cm de ancho y 16 cm de largo:

A. 18

B. 20

C. 22

D. 24

9. La medida de la altura del rectángulo cuya área de es $3\sqrt{3}$ cm^2 y su base mide $\sqrt{12}$ cm es:

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

10. Las potencias y $27^{\frac{1}{3}}$ y $9^{\frac{1}{2}}$ se pueden escribir como

A. $\sqrt{27}$ $\sqrt[3]{9}$

B. $\sqrt{9}$ 27

C. $\sqrt[3]{27}$ $\sqrt{9}$

D. $\sqrt{27}$ 9

11. El radical equivalente a $\sqrt[10]{5} \,.\, 5\sqrt{3} \,.\, \sqrt[5]{2}$ es:

A. $\sqrt[10]{30}$

B. $\sqrt[10]{243}$

C. $\sqrt[10]{525}$

D. $\sqrt[10]{342}$

UNIDAD 2 Evaluación diagnóstica

Nombre:...

Grado:................. **Fecha:**.................

1. Un jugador pierde las $\frac{2}{3}$ partes de las $\frac{4}{5}$ partes de 360 000 ¿Cuál es su perdida?

   A. 12900　　B. 19200

   C. 192000　　D. 9600

2. El resultado $\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{6}{7}-\frac{2}{7}\right)$ es:

   A. $-\frac{14}{28}$　　B. $\frac{14}{28}$

   C. $-\frac{57}{56}$　　D. $\frac{57}{56}$

3. Al resolver $3+\left\{\frac{3}{5}+\frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}-\frac{7}{2}\right)-2+\frac{1}{3}\right\}$

   A. $\frac{409}{70}$　　B. $-\frac{49}{60}$

   C. $\frac{109}{60}$　　D. $\frac{69}{60}$

4. Un garrafón tiene una capacidad de $\frac{28}{5}$ de litro. Si el garrafón está totalmente lleno, ¿Cuántos vasos de un $\frac{1}{4}$ de litro se pueden llenar?

5. Complete cada igualdad.

   A. $\frac{4}{3}\cdot\frac{\square}{\square}=\frac{10}{9}$

   B. $\frac{9}{15}\div\frac{\square}{\square}=\frac{36}{45}$

   C. $\frac{\square}{\square}\div\frac{1}{2}=\frac{16}{3}$

   D. $\frac{13}{6}\cdot\frac{\square}{\square}=\frac{39}{12}$

6. Determine el valor de verdad de cada igualdad y marca la casilla correspondiente.

	V	F
a. $\left(-\frac{3}{4}\right)^3=-\frac{27}{64}$		
b. $\left(-\frac{2}{5}\right)^5=-\frac{10}{25}$		
c. $\sqrt{\frac{121}{144}}=-\frac{11}{12}$		
d. $\left(-\frac{1}{4}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^5$		
e. $\sqrt[4]{\left(\frac{5}{4}\right)^4}=\frac{5}{4}$		
f. $\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{6}{9}\right)^3}=1$		

7. Reemplace en la operación las letras por sus valores correspondientes. Luego calcule los resultados.

   $p=-7\ ;\ q=-10$

   $2p\cdot(q+p)$

8. Complete.
   Exprese como una sola potencia.

   A. $2^5\cdot 2^4\cdot 2^6\cdot 2=$

   B. $[(-7)^3]^5=$

   C. $(-10)^4\cdot(-2)^4\cdot 5^4=$

   D. $a^8\div a^3=$

   E. $(-5)^6\div(-5)^3\cdot(-5)=$

   F. $a^5\cdot b^5\cdot c^5=$

Propósito de la unidad

Bloque de álgebra y funciones

El estudio de expresiones algebraicas incluye el uso de símbolos para denotar incógnitas junto con las operaciones entre conjuntos de números ha permitido desarrollar conceptos y demostrar relaciones y propiedades geométricas y algebraicas.

Gracias al desarrollo del lenguaje algebraico, hoy en día, es posible comunicar ideas y conceptos universales, expresando las propiedades de algunos de los conjuntos numéricos vistos.

El aprendizaje significativo requiere de la participación activa del sujeto que aprende, guiado por los docentes que planifican, diseñan, implementan, orientan, coordinan y evalúan. Esa participación de nuestros estudiantes es activa, no sólo en cuanto a lo manifiesto (medir, dibujar, graficar, discutir, preguntar, exponer, dialogar, argumentar, criticar...) sino también, en cuanto a las conductas interiorizadas (las cognitivas): comparar, diferenciar, relacionar, analizar, sintetizar, calcular, estimar, definir, explicar, deducir, inferir, concluir y demostrar

Tampoco se pueden resolver problemas sin el dominio hábil de los procedimientos de cálculo, pero de éstos, los estudiantes deben conocer también las relaciones entre ellos y sus propiedades, y comprender los fundamentos de las reglas algebraicas que están utilizando. En toda lección de matemática, en la que se realicen cálculos algebraicos es en la resolución de problemas, los alumnos ponen en juego los saberes adquiridosen las exprersiones algebráicas

Evaluaciones

Diagnóstica

La evaluación diagnóstica, además de ayudar a generar en los estudiantes curiosidad acerca de los temas que se estudiarán, permite anticipar o predecir los conceptos en los que se puede encontrar alguna dificultad. En este caso, los resultados le servirán al docente para planificar las clases y proponer la metodología más conveniente para el proceso de enseñanza–aprendizaje.

Para iniciar el estudio de esta unidad se hace necesario el manejo de operaciones con números enteros y fraccionarios, ya que al realizar cálculos con las distintas operaciones con números racionales, irracionales y reales, los estudiantes deben dominar estas destrezas en las operaciones algebraicas.

Formativa

Es muy importante que analice los avances o las dificultades que tuvieron los estudiantes al desarrollar cada actividad. Qué aprendizajes nuevos tuvieron. Esto, además de darle pistas del desarrollo de los estudiantes, le permitirá motivar procesos de metacognición muy valiosos para el aprendizaje.

La evaluación formativa contempla una serie de ejercicios y problemas que permitan verificar si desarrollaron las destrezas planteadas como: emplear las operaciones con polinomios de grado ≤ 2 en la solución de ejercicios numéricos y algebraicos. Expresar polinomios como la suma y resta de polinomios.

Sumativa

La función principal de esta evaluación es identificar lo que los estudiantes aprendieron durante el desarrollo de la unidad correspondiente. Esto, además de permitir analizar cuáles son las dificultades y las fortalezas del proceso de enseñanza y aprendizaje, servirá como evidencia de que alcanzaron los logros de aprendizaje que permitirán desarrollar con fluidez los conceptos de la unidad siguiente

Se presentan una serie de problemas que permiten evaluar los logros alcanzados al inicio de la unidad y los posteriores como: resolver problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales, solucionar expresiones numéricas y algebraicas con productos notables.

Aplicar las propiedades algebraicas de las operaciones y las reglas de los radicales en el cálculo de ejercicios numéricos y algebraicos con operaciones combinadas.

Respuestas

Evaluación diagnóstica

1. C
2. C
3. $\frac{49}{60}$
4. $\frac{112}{5}$
5. A. $\frac{30}{36}$ B. $\frac{36}{75}$ C. $\frac{16}{6}$ D. $\frac{3}{2}$
6. A. V; B. F; C. F; D. F; E. V; F. V
7. 238
8. a. 2^{16}; b. -7^{15}; c. $(-2)^8 5^8$; d. a^5; e. $(-5)^4$; f. $(abc)^5$

Esquema conceptual

Conocimientos de la unidad

- Bloque de álgebra y funciones
  - Polinomios
    - Expresiones algebraicas
    - Tipos de expresiones algebraicas
    - Valor numérico de una expresión algebraica
  - Polinomios
    - Monomios
    - Monomios semejantes
    - Polinomios
      - Reducción de términos semejantes en un polinomio
  - Adición y sustracción de polinomios
    - Adición de polinomios
    - Sustracción de polinomios
  - Multiplicación de polinomios
    - Multiplicación de monomios
    - Multiplicación de monomio por polinomio
    - Multiplicación de polinomio por polinomio

Cultura del Buen Vivir

■ **Valor:** La comunicación

Una manera de mantener buenas relaciones en todos los ámbitos de la vida es con una comunicación efectiva, que invite al entendimiento y la conciliación.

- Productos notables
  - Cuadrado de un binomio
  - Producto de la suma por la diferencia de dos términos
  - Producto de la forma (x + a)(x + b)
  - Cubo de un binomio
- División de polinomios
  - División entre un monomio
  - División entre polinomios
- Teorema del residuo y teorema del factor
  - Teorema del residuo
  - Teorema del factor
- Regla de Ruffini
- Raíces de un polinomio
  - Número de raíces de un polinomio
  - Cálculo de las raíces enteras de un polinomio
- Cocientes notables
  - Generalidades de los cocientes notables

Compromiso a lograr

Mediante el desarrollo de la unidad empleará las relaciones de orden, las propiedades algebraicas de las operaciones en R y expresiones algebraicas, para afrontar operaciones y productos notables con soluciones de diferentes campos numéricos, y resolver problemas de la vida real, seleccionando la forma de cálculo apropiada e interpretando y juzgando las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema; analiza la necesidad del uso de la tecnología.

Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica	
Unidad 2: polinomios	
Objetivos generales del área	**Objetivos del área por subnivel**
OG.M.1. – OG.M.6.	O.M.4.2.
Objetivos de subnivel	**Valores**
OI.4.1. – OI.4.12.	• La comunicación (I.2.),
Criterios de evaluación	**Indicadores de evaluación**
CE.M.4.2.	I.M.4.2.1. – I.M.4.2.2.
Objetivos de la unidad	
• Emplear las operaciones con polinomios de grado ≤ 2 en la solución de ejercicios numéricos y algebraicos. • Expresar polinomios como la multiplicación de polinomios. • Solucionar expresiones numéricas y algebraicas con productos notables.	

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Álgebra y funciones	• Calcular expresiones numéricas y algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R • Definir y reconocer los elementos de un polinomio. • Operar con polinomios en ejercicios numéricos y algebraicos.	• Es importante que les explique a los estudiantes que las expresiones algebraicas son todas aquellas en las cuales aparece uno o más términos desconocidos. Luego pídales que traduzcan al lenguaje algebraico expresiones sencillas. • Defina términos semejantes y la forma de simplificarlos en un polinomio. Es importante que les diga que la parte literal de los términos deben ser iguales. • Recuerde inicialmente a los estudiantes, las propiedades de la potenciación de los números enteros, ya que éstas se requerirán para realizar productos entre las variables de la parte literal de los monomios. • Posteriormente, recuérdeles en qué consiste la propiedad distributiva de la adición con respecto al producto para aplicarla en la multiplicación de polinomios.	• Emplea las operaciones con polinomios de grado ≤2 en la solución de ejercicios numéricos y algebraicos. • Expresa polinomios como la multiplicación de polinomios.	**Actividad:** resuelve problemas que conducen a la aplicación de las operaciones de números reales en expresiones algebraicas.

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Álgebra y funciones	• Aplicar las propiedades algebraicas de los números enteros y racionales en la suma de polinomios. • Calcular expresiones numéricas y algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R. • Reconocer y calcular productos notables e identificar factores de expresiones algebraicas. • Calcular divisiones con términos algebraicos aplicando propiedades en R (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).	• Proponga a los y las estudiantes que representen algunos productos notables con el material concreto. • Conviene recordarles a sus estudiantes las propiedades de la potenciación que se van a aplicar en la división de polinomios. También se sugiere recordarles el proceso de división entre números reales y la relación que hay entre los términos de una división. • Después del trabajo con la división entre polinomios , hágales notar que los dos términos que tienen la variable en segundo o tercer grado se reducen a uno solo, que corresponde a la suma o resta de ellos y que la aplicación del factoreo de binomios se simplifican con los denominadores de cada caso de generalización propuesta en el mismo.	• Resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales • Soluciona expresiones numéricas y algebraicas con productos notables • Aplica las propiedades algebraicas de las operaciones y las reglas de los radicales en el cálculo de ejercicios numéricos y algebraicos con operaciones combinadas, atiende correctamente la jerarquía de las operaciones.	**Técnica:** observación. **Instrumento:** registro descriptivo.

Recursos: Materiales del medio, Tic, Texto Guía, Cuaderno de trabajo

Bibliografía: Mason, J., Burton, L. (1992), Stacey Pensar matemáticamente Madrid: Ediciones/Labor

Libro del alumno

Ampliación conceptual

En general, una expresión algebraica es la combinación de variables y números reales mediante las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Consta de términos separados por signos + o –, cuyo grado absoluto es la suma de los exponentes de todos los factores literales, y cuyo grado relativo con respecto a una variable es el exponente de la misma.

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Es importante que les explique a los y las estudiantes que las expresiones algebraicas son todas aquellas en las cuales aparece uno o más términos desconocidos.

b. Luego pida que traduzcan a lenguaje algebraico expresiones sencillas como: el doble de un número, un número más cinco; tres veces un número más ocho, etc.

c. Analicen con el grupo, la expresión que se da en la situación planteada en el problema; solicite identificar la parte literal y el coeficiente de cada término.

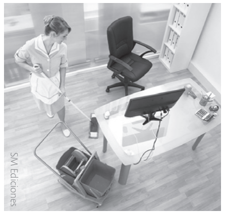
d. Indique que todo coeficiente tiene un signo (+ o –) y que el término independiente recibe este nombre porque las variables de la parte literal tienen exponente cero, y por las propiedades de la potenciación, esas potencias son iguales a uno.

Bloque de Álgebra y funciones

1 Expresiones algebraicas

Explora

Una empresa de aseo tiene varias tarifas. En una oficina cobra a $ 35 la hora y en un hotel cobra a $ 10 más la hora.



- ¿Cuáles serían las expresiones que se obtienen de esta situación?

Para moldear la situación, determinaremos a t como el tiempo en horas del servicio prestado, pues esto nos permite traducir la situación de la siguiente manera:

Prestación de servicio en oficina	Prestación de servicio en hotel
$35 \cdot t$	$35 \cdot t + 10 \cdot t$

Teniendo en cuenta las expresiones, podemos averiguar cuánto dinero debe cobrar la empresa según las horas de servicio prestado.

Una **expresión algebraica** es una combinación de cantidades numéricas y literales, relacionadas por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación. Las letras reciben el nombre de **variables**.

Ejemplo 1

Las siguientes expresiones son algebraicas:

$$2x^3 + 5xy \qquad \sqrt{a - 3ab} \qquad \frac{\sqrt{m+n} - 4}{(m+3)^2 - \sqrt{m}}$$

1.1 Tipos de expresiones algebraicas

Las expresiones algebraicas se clasifican según las operaciones que intervienen. Así:

- **Expresiones algebraicas enteras**: en ellas intervienen las operaciones básicas y los exponentes de las variables son números enteros positivos.

Ejemplo 2

Estas son expresiones algebraicas enteras: $6x - 58z$, $\frac{2x-1}{-2}$ y $2x^2 - 4xy^2 + 6y^3$.

- **Expresiones algebraicas racionales:** tienen algunas variables en el denominador.

Ejemplo 3

Estas son expresiones algebraicas racionales: $2a^{-5} + 7$ y $5x + \frac{3}{y}$.

- **Expresiones algebraicas irracionales:** contienen expresiones radicales en sus términos o variables con exponente racional no entero.

Ejemplo 4

Estas son expresiones algebraicas irracionales: $5m + 8\sqrt{a}$ y $-\frac{1}{3}y^2 - z^{\frac{1}{5}}$.

1.2 Valor numérico de una expresión algebraica

El **valor numérico** de una expresión algebraica es el resultado que se obtiene de sustituir las letras de la expresión algebraica por números determinados y aplicar las operaciones indicadas en la expresión.

Ejemplo 5

El volumen de una esfera se representa por la expresión algebraica $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Calcular el volumen de la esfera cuando el radio es 5, significa determinar el valor numérico cuando $r = 5$. Así: $\frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{4\pi(125)}{3} = \frac{500\pi}{3}$.

Ten en cuenta

Cada término consta de:

$-4x^2$: Signo, Coeficiente, Variable, Exponente

Ten en cuenta

La igualdad entre dos expresiones algebraicas se llama **ecuación algebraica**.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular expresiones numéricas y algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R.

Actividad resuelta

Ejercitación

1. Calcula el valor numérico de $\dfrac{\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{4b^2}{a^2}}{\dfrac{a^2}{8b}} + ab + \dfrac{a}{b}$, para $a = 4$ y $b = 2$.

Solución

- Se sustituyen las variables por los valores dados, es decir, por $a = 4$ y $b = 2$. Después, se aplican las operaciones correspondientes.

$$\frac{\frac{4^2}{2^2}+\frac{4\cdot 2^2}{4^2}}{\frac{4^2}{8\cdot 2}} + 4\cdot 2 + \frac{4}{2} = \frac{\frac{16}{4}+\frac{16}{16}}{\frac{16}{16}} + 8 + \frac{4}{2} = \frac{4+1}{1} + 8 + 2$$

$= 5 + 8 + 2 = 15$

Ten en cuenta

Para calcular el valor numérico se siguen estos pasos:

1. Se efectúa toda operación que se encuentre entre paréntesis.
2. Se efectúan todas las operaciones de multiplicación o división en el orden que se presenten de izquierda a derecha.
3. Se efectúan las sumas y las restas en el orden de izquierda a derecha.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2. Escribe las expresiones algebraicas correspondientes a cada uno de los enunciados:

Enunciado	Expresión algebraica
a. El 20% de un número.	
b. El área de un triángulo de 9 cm de altura y base desconocida.	
c. El doble de la edad que tendré dentro de seis años.	
d. El área de un rectángulo del que se sabe que su base es la mitad de su altura.	
e. La diferencia de los cuadrados de dos números.	
f. El producto de dos números pares consecutivos.	

Tabla 1

Razonamiento

3. Determina el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas, sabiendo que $x = -2$, $y = 3$ y $z = 4$.

a. $3x^2y - 2xy^2$

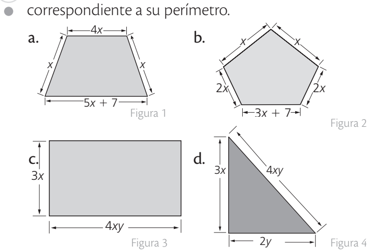
b. $-\frac{1}{2}x^3y^2 + 3x^2z^2$

c. $x^2(y - 2) - y(x + 2) + 3y^3$

d. $\frac{2}{3}x^3y^2z - 5x^2y^3z^2 + 10$

e. $\frac{3}{4}xy^2z^3 - x^2y^3z^2 + x^3y^2z^3 - \frac{1}{2}$

4. Observa las figuras y plantea la expresión algebraica correspondiente a su perímetro.



Resolución de problemas

5. Luz tiene dos años más que Lucas. Si x representa la edad actual de Lucas, ¿cuál es la expresión algebraica para la suma de las edades de ambos dentro de un año?

6. Si y es el número de carros que hay en un estacionamiento y x el número de motos, ¿cuál es la expresión algebraica que indica el número de ruedas que hay en total?

7. La energía potencial almacenada por un cuerpo ubicado a cierta altura sobre el suelo, está dada por la expresión $Ep = mgh$, donde m es la masa, g es la gravedad ($g = 9{,}8$) y h la altura.

- Según esta información, completa la Tabla 2

Ep				
m	0,2 kg	0,5 kg	0,75 kg	0,8 kg
h	1,5 m	2 m	0,8 m	1,2 m

Tabla 2

Ejercitación

1. 15

Comunicación

2. a. $0{,}2x$ b. $a = \frac{9x}{2}$

c. $2x + 6$ d. $a = x \cdot 2x$

e. $x^2 - y^2$ f. $x(x + 2)$

Razonamiento

3. a. 72 b. 228

c. 81 d. 58 138

e. $-\frac{12\,097}{2}$

4. a. $11x + 7$ b. $9x + 7$

c. $6x + 8xy$ d. $3x + 4xy + 2y$

Resolución de problemas

5. $(x + 1) + (x + 3)$

6. $4y + 2x$

7.

Ep	2,94	9,8	5,88	9,408
m	0,2 kg	0,5 kg	0,75 kg	0,8 kg
h	1,5m	2m	0,8 m	1,2m

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Las expresiones algebraicas se clasifican según el número de términos, así:

Expresiones algebraicas	Número de términos	Ejemplo
Monomio	1	$-\frac{3}{4}m^2n^3$
Binomio	2	$\frac{x^2}{3} - 5y$
Trinomio	3	$25a^2 - 10ab + b^2$
Polinomio	Dos o más términos	$x^2 + 3xy - 5x + \frac{1}{2}$

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Retome lo explicado en el tema de expresiones algebraicas mostrándoles una expresión de cada una de las clases de dichas expresiones: monomios, binomios, trinomios y polinomios.

b. Presente un ejemplo muy sencillo de monomios semejantes como: 2x , 4x , 5x ,… y pregunte qué tienen en común. Luego realice una actividad similar cambiando la parte literal.

c. Defina términos semejantes y la forma de simplificarlos en un polinomio. Es importante que les deje claro a los y las estudiantes que la parte literal de los términos debe ser igual, es decir que expresiones como: $2x^2y$ y $7xy^2$ no son semejantes; el material concreto, específicamente las fichas algebraicas, ayudan a las y los estudiantes a visualizar esta diferencia.

2 Polinomios

Explora

Observa las dimensiones de las siguientes figuras geométricas.

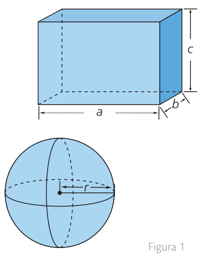


Figura 1

- ¿Cuál es el volumen del paralelepípedo y el área de la circunferencia máxima de la esfera?

Ten en cuenta

El grado de un monomio con respecto a una variable o grado relativo es el exponente de la variable. Por ejemplo, en el monomio $27ab^3$, el grado relativo a la variable b es 3 y con respecto a la variable a es 1.

2.1 Monomios

Para el paralelepípedo y la esfera de la Figura 1, se tiene lo siguiente:

Volumen $= abc$ Área $= 4\pi r^2$

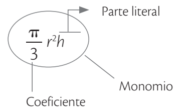
Las fórmulas abc y $4\pi r^2$ forman parte de las expresiones algebraicas más sencillas, llamadas monomios.

Un **monomio** es una expresión algebraica que consta de un solo término, formado por el producto de números reales y las potencias de exponente natural de una o más variables.

Elementos de un monomio

Un monomio está formado por:

- Un **coeficiente**, que es la parte numérica.
- Una **parte literal**, constituida por variables y sus exponentes naturales



El **grado absoluto** de un monomio corresponde a la suma de todos los exponentes de las variables.

Si dos o más monomios tienen el mismo grado absoluto, son **homogéneos**. Por el contrario, si los monomios tienen diferente grado absoluto, se denominan **heterogéneos**.

Ejemplo 1

Al analizar si las expresiones $-\frac{7}{5}x^3y^4$, $\sqrt{11}\,a^{-3}b$ y $\frac{4}{m^2}$ son monomios, se concluye:

- $-\frac{7}{5}x^3y^4$ es un monomio, porque tiene dos variables, x, y, el coeficiente, $-\frac{7}{5}$ es un número real y los exponentes, 3 y 4, son números positivos.
- $\sqrt{11}a^{-3}b$ no es un monomio, ya que el exponente de la variable a es un entero negativo.
- $\frac{4}{m^2}$ no es un monomio, porque $\frac{4}{m^2}$ es igual a $4m^{-2}$ y, entonces, el exponente de m es un entero negativo.

Ejemplo 2

El grado absoluto de $-3ab^2$ es 3 y el de $5x^3y^2$ es 5. Luego, se concluye que los monomios $-3ab^2$ y $5x^3y^2$ son heterogéneos, ya que los grados absolutos de ambos monomios son diferentes.

2.2 Monomios semejantes

Si los monomios tienen la misma parte literal, se dice que son **monomios semejantes**. Por lo tanto, dos monomios semejantes solo se diferencian en el coeficiente.

Ejemplo 3

$3ax^4y^5$, $2ax^4y^5$, $2ax^4y^5$, $-\frac{7}{5}ax^4y^5$ son monomios semejantes. Por su parte, axy^3, $3a^2x^4y^5$, $-2bx^4$ no son semejantes a los anteriores.

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer los elementos de un polinomio

2.3 Polinomios

Un **polinomio** es una expresión algebraica formada por la suma entre varios monomios no semejantes.

Los monomios que conforman un polinomio se denominan **términos** del polinomio.

Términos

$$11x^3y - 7xy^2 + 5x - 13$$

Polinomio

El **grado absoluto** de un polinomio es el mayor de los grados de los términos que contiene el polinomio.

Grado del monomio

$$\underbrace{11x^3y}_{3+1=4} - \underbrace{7xy^2}_{1+2=3} + \underbrace{5x}_{1} - \underbrace{13}_{0}$$ es de grado 4.

Un polinomio recibe un nombre según la cantidad de términos que tiene. Así, si el polinomio tiene dos o tres términos, se le denomina **binomio** o **trinomio**, respectivamente. Cuando un polinomio tiene más de tres términos, se le denomina simplemente **polinomio**.

Ejemplo 4

Estos son ejemplos de binomios, trinomios y polinomios:

- binomios: $x^2 + 9$ y $162 - 2x$
- trinomios: $8m^2 + 26m - 24$ y $3a^2 + 8a + 5$
- polinomios: $2x^5y^2 + 3x^4y - 2x^3 - 2$ y $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$

2.4 Reducción de términos semejantes en un polinomio

Los **términos semejantes** en un polinomio son los monomios que tienen su parte literal exactamente igual, es decir, son monomios semejantes.

Por ejemplo, $2a^3b^4$ y $27b^4a^3$ son términos semejantes.

Reducir términos semejantes en un polinomio significa agrupar en un solo monomio a los que sean semejantes. Para ello, se efectúa la suma algebraica de sus coeficientes y se escribe la misma parte literal.

Ejemplo 5

En el polinomio $2x^3y^4 + 3x^2y - 5xy + 3y^4x^3 + 4xy$, los términos $2x^3y^4$ y $3y^4x^3$ son semejantes, al igual que los términos $-5xy$ y $4xy$.

Después, se reducen los términos semejantes de la siguiente manera:

$2x^3y^4 + 3y^4x^3 = 5x^3y^4$

$-5xy + 4xy = -xy$

Finalmente, el polinomio reducido queda así: $5x^3y^4 + 3x^2y - xy$.

Ten en cuenta

El término independiente de un polinomio es el término de grado 0 en el polinomio, es decir, la constante.

Ten en cuenta

El grado relativo de un polinomio con respecto a una variable es el mayor exponente que tiene la variable en el polinomio.

Así, en $-3ab + 4a^3$, el grado relativo del polinomio con respecto a a es 3.

Ten en cuenta

Un **polinomio** se llama **ordenado** si los términos que lo conforman están escritos de mayor a menor grado o viceversa.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Identifica el coeficiente, la parte literal y el grado de cada término algebraico.

a. $54n^3m^4$

b. $-60\ m^2p$

c. X

d. $\frac{3}{4}\ xy^2$

Actividades TIC

Ingresa a ese link:

http://ns.wqimg.com/401407_634875274996755000.swf

Busca la unidad uno reducción de términos semejantes y resuelve los problemas propuestos

1. Grado absoluto 6.

Ejercitación

2.

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado absoluto
$-2x^3y^2$	-2	x^3y^2	5
$-a^3bz^4$	-1	a^3bz^4	8
πm^4n^6	1	m^4n^6	10
$\frac{5}{3}x^2y^5z^3$	$\frac{5}{3}$	$x^2y^5z^3$	10
$0{,}5\ a^4b^5c$	0,5	a^4b^5c	10

3. a. 3 Trinomio b. 2 Binomio
c. 5 Polinomios d. 3 Trinomio
e. 4 Polinomio

Razonamiento

4. a. Homogéneos b. Heterogéneos
c. Heterogéneos d. Homogéneos
e. Heterogéneos f. Homogéneos

5. a. Respuesta libre b. Respuesta libre
c. Respuesta libre d. Respuesta libre
e. Respuesta libre f. Respuesta libre

6 .

Cantidad de variables	Variables
1	x
2	xy
3	p, q, r
1	m
4	$a, b, c, d.$

7. a. -3 b. -1 c. 1 d. -8

8. a. $-x - 33$ b. $3y^2 - 16y + 10$

Bloque de Álgebra y funciones

2 Polinomios

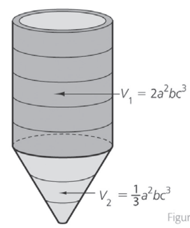


Figura 1

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Dado el sólido de la Figura 1, calcula su volumen total.

Solución

El volumen total V del sólido de la Figura 1 se calcula de esta manera:

$$V = 2a^2bc^3 + \frac{1}{3}a^2bc^3$$

Como los términos $2a^2bc^3$ y $\frac{1}{3}a^2bc^3$ son semejantes, entonces el volumen del sólido se puede expresar como un único término algebraico. Así:

$$V = 2a^2bc^3 + \frac{1}{3}a^2bc^3 = \left(2 + \frac{1}{3}\right)a^2bc^3 = \frac{7}{3}a^2bc^3$$

Este resultado es un monomio de coeficiente $\frac{7}{3}$ y de parte literal a^2bc^3; su grado absoluto es 6, mientras que el grado relativo con respecto a c es 3.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Completa la Tabla 1

Monomio	Coeficiente	Parte literal	Grado absoluto
$-2x^3y^2$			
$-a^3bz^4$			
πm^4n^6			
$\frac{5}{3}x^2y^5z^3$			
$0{,}5a^4b^5c$			

Tabla 1

3 Determina cuántos términos tiene cada polinomio. Luego, establece si es binomio, trinomio o polinomio.

a. $5m^2n - 3\,mn + 8$

b. $26x^3y^2 - 7x^2y$

c. $a^6b^5 + a^5b^4 - 2a^4b^5 + 4a^3b^4 - a^2b^5$

d. $p^2q - pq^2 - 1$

e. $\frac{1}{2}y^2x^4 - \frac{3}{5}x^3y^3 + \frac{1}{3}y^4x^2 - \frac{5}{6}$

4 Determina si los siguientes monomios son homogéneos o heterogéneos.

a. $7a^2b^3$ y $-2x^2y^3$ b. $-3m^6n^4p$ y $3x^7y^5$

c. $11p^3q^2r$ y $11pq^2r^4$ d. $\sqrt{3}\,h^3r^2$ y $\sqrt{3}\,rh^4$

e. $\frac{1}{3}x^2y^4$ y $\frac{4}{3}xy^3$ f. $-\frac{4}{5}s^3t$ y $\frac{6}{5}s^2t^2$

5 Escribe un monomio semejante a cada monomio.

a. $-11abc$ b. $13x^4y^5$

c. $5p^2q^4$ d. $27m^7n^3$

e. $12m^3n^2$ f. $-8\,z^5n^4$

6 Determina cuántas y cuáles variables diferentes tiene cada polinomio.

a. $5x^3 - 2x^2 + x - 7$

b. $3x^4y + 6x^3y^2 - 8x^2y^2 + 5xy^4$

c. $5pq^4 + 3p^2q^3 - 7p^3q^2 + r$

d. $-7m^5 + \frac{1}{2}m^4 - m^3 + \frac{1}{3}m^2 - 1$

e. $\frac{2}{3}a^4b^3c^2 + \frac{1}{4}a^3b^4c^4 - 2d$

7 Dado el polinomio $7y^4 - 3y^3 - y^2 + y - 8$, indica lo siguiente.

a. El coeficiente del segundo término.

b. El coeficiente del tercer término.

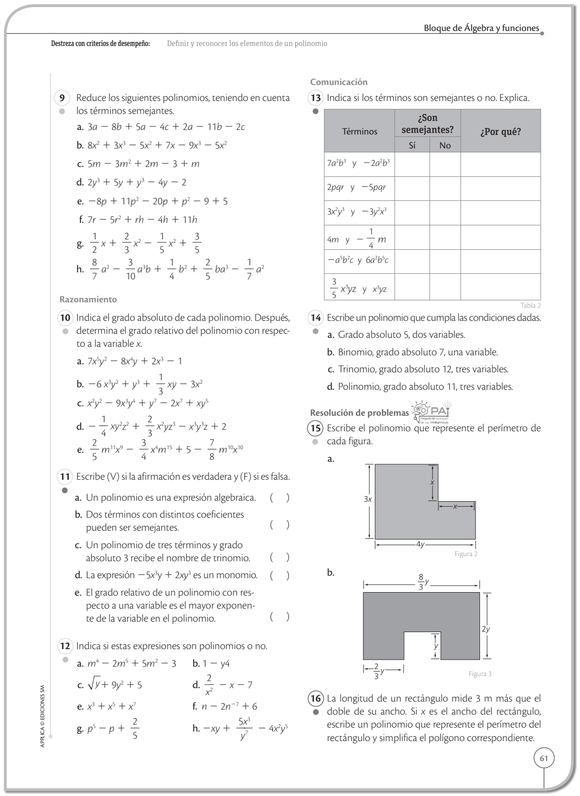
c. El exponente de la variable en el cuarto término.

d. El término independiente.

8 Suprime los signos de agrupación y reduce los términos semejantes.

a. $2x - 3\{x + 2[x - (x + 5)] + 1\}$

b. $3y^2 - 2\{y - y[y + 4(y - 3)] - 5\}$



Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer los elementos de un polinomio

9 Reduce los siguientes polinomios, teniendo en cuenta los términos semejantes.

a. $3a - 8b + 5a - 4c + 2a - 11b - 2c$

b. $8x^2 + 3x^3 - 5x^2 + 7x - 9x^3 - 5x^2$

c. $5m - 3m^2 + 2m - 3 + m$

d. $2y^3 + 5y + y^3 - 4y - 2$

e. $-8p + 11p^2 - 20p + p^2 - 9 + 5$

f. $7r - 5r^2 + rh - 4h + 11h$

g. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{3}{5}$

h. $\frac{8}{7}a^2 - \frac{3}{10}a^3b + \frac{1}{4}b^2 + \frac{2}{5}ba^3 - \frac{1}{7}a^2$

Razonamiento

10 Indica el grado absoluto de cada polinomio. Después, determina el grado relativo del polinomio con respecto a la variable x.

a. $7x^5y^2 - 8x^4y + 2x^3 - 1$

b. $-6x^3y^2 + y^3 + \frac{1}{3}xy - 3x^2$

c. $x^2y^2 - 9x^3y^4 + y^7 - 2x^7 + xy^5$

d. $-\frac{1}{4}xy^2z^2 + \frac{2}{3}x^2yz^3 - x^3y^3z + 2$

e. $\frac{2}{5}m^{11}x^9 - \frac{3}{4}x^4m^{15} + 5 - \frac{7}{8}m^{10}x^{10}$

11 Escribe (V) si la afirmación es verdadera y (F) si es falsa.

a. Un polinomio es una expresión algebraica. ( )

b. Dos términos con distintos coeficientes pueden ser semejantes. ( )

c. Un polinomio de tres términos y grado absoluto 3 recibe el nombre de trinomio. ( )

d. La expresión $-5x^3y + 2xy^3$ es un monomio. ( )

e. El grado relativo de un polinomio con respecto a una variable es el mayor exponente de la variable en el polinomio. ( )

12 Indica si estas expresiones son polinomios o no.

a. $m^4 - 2m^5 + 5m^2 - 3$ b. $1 - y4$

c. $\sqrt{y} + 9y^2 + 5$ d. $\frac{2}{x^2} - x - 7$

e. $x^3 + x^5 + x^7$ f. $n - 2n^{-7} + 6$

g. $p^5 - p + \frac{2}{5}$ h. $-xy + \frac{5x^3}{y^7} - 4x^2y^5$

Comunicación

13 Indica si los términos son semejantes o no. Explica.

Términos	¿Son semejantes? Sí	No	¿Por qué?
$7a^2b^3$ y $-2a^2b^3$			
$2pqr$ y $-5pqr$			
$3x^2y^3$ y $-3y^2x^3$			
$4m$ y $-\frac{1}{4}m$			
$-a^5b^2c$ y $6a^2b^5c$			
$\frac{3}{5}x^3yz$ y x^3yz			

Tabla 2

14 Escribe un polinomio que cumpla las condiciones dadas.

a. Grado absoluto 5, dos variables.

b. Binomio, grado absoluto 7, una variable.

c. Trinomio, grado absoluto 12, tres variables.

d. Polinomio, grado absoluto 11, tres variables.

Resolución de problemas

15 Escribe el polinomio que represente el perímetro de cada figura.

a.

Figura 2

b.

Figura 3

16 La longitud de un rectángulo mide 3 m más que el doble de su ancho. Si x es el ancho del rectángulo, escribe un polinomio que represente el perímetro del rectángulo y simplifica el polígono correspondiente.

61

APPLICA © EDICIONES SM

9. a. $10a - 19b - 6c$

b. $-6x^3 - 2x^2 + 7x$

c. $-3m^2 + 8m - 3$

d. $3y^3 + y - 2$

e. $12p^2 - 28p - 4$

f. $hr^2 - 5r^2 + 7h + 7r$

g. $\frac{14x^2 + 15x + 18}{30}$

h. $\frac{3a^3b}{10} + \frac{2a^3b}{5} + \frac{b^2}{4} + a^2$

Razonamiento

10.

	Grado absoluto	Grado relativo de x
a.	7	5
b.	5	3
c.	7	7
d.	7	7
e.	20	10

11. a. V b. V

c. V d. F e. V

12. a. Sí es polinomio

b. Sí es polinomio

c. Sí es polinomio

d. Sí es polinomio

e. Sí es polinomio

f. Sí es polinomio

g. Sí es polinomio

h. Sí es polinomio

Comunicación

13.

Sí	No	¿Por qué?
x		Tiene las mismas letras y los mismos exponentes.
x		Tiene las mismas letras y los mismos exponentes.
	x	Tiene las mismas letras y diferentes exponentes.
x		Tiene las mismas letras y los mismos exponentes.
	x	Tiene las mismas letras y diferentes exponentes.
x		Tiene las mismas letras y los mismos exponentes.

14. a. Respuesta libre

b. Respuesta libre

c. Respuesta libre

d. Respuesta libre

Resolución de problemas

15. a. $7x + 7y$

b. $\frac{34y}{3}$

16. $p = 2x + 2(2x + 3)$

$p = 6x + 6$

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Recuérdeles la propiedad distributiva de los números enteros, ya que esta propiedad es fundamental para reducir términos semejantes. Por ejemplo: $3x + 7x = (3 + 7)x = 10x$. En el caso de la sustracción, es importante que tengan en cuenta que el signo menos (–) de la operación afecta todos los signos que estén precedidos por él. Defina polinomio opuesto y dé algunos polinomios para que escriban el opuesto

b. Comience por aclararles que el proceso de la propiedad distributiva, en general, es un proceso implícito que se realiza mentalmente, pero hay que tenerlo en cuenta especialmente cuando las expresiones están precedidas de signo menos (-). Es importante que realicen las adiciones y sustracciones tanto en forma vertical como en forma horizontal como se ilustra en las páginas del libro. Recuérdeles que es importante operar adecuadamente los signos de los coeficientes de cada término y que no deben confundir el signo negativo de un número con el de la operación sustracción.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Organiza los polinomios en columna. Luego, encuentra cada suma.

   a. $(6x - 5x^2y + 7x^3) + (2x + 2x^2y + x^3)$

   b. $(4x + 2x^2y + 5x^3) + (-2y + 8x^3 + 6x^2y)$

   c. $(5a + 8a^2b + 4a^3) + (2a + 4a^2b + 6a^3)$

   d. $(7mn^2 - 5m^3 - 15n^3) + (2n^3 - 2m^2n + 9m^3)$

Bloque de Álgebra y funciones

3 Adición y sustracción de polinomios

Explora

El perímetro de una figura geométrica se calcula sumando las medidas de todos sus lados.

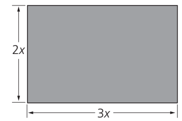


Figura 1

- Según lo anterior, ¿cuál es el perímetro del rectángulo de la Figura 1?

Ten en cuenta

Para sumar dos polinomios, se suman los coeficientes de los términos del mismo grado.

3.1 Adición de polinomios

Para hallar el perímetro del rectángulo, sumamos la longitud de todos sus lados así:

$$P = 3x + 2x + 3x + 2x$$

En este polinomio los términos son semejantes, luego se pueden reducir a un solo término algebraico, adicionando sus coeficientes y escribiendo la misma parte literal.

$$P: (3 + 2 + 3 + 2)x = 10x$$

Para **sumar polinomios**, se suman entre sí los monomios semejantes. Si los monomios no son semejantes, la suma se deja indicada.

Los polinomios se pueden adicionar como se explica a continuación:

En forma horizontal	En forma vertical
• Se ordenan los polinomios en forma ascendente o descendente con respecto a una misma variable y se indica la operación. • Se eliminan paréntesis y se reducen los términos semejantes.	• Se ordenan los polinomios y se escriben uno debajo del otro, tal que los términos semejantes queden en la misma columna. • Se reducen términos semejantes y se obtiene la suma.

Tabla 1

Ejemplo 1

Observa cómo se aplican los dos procesos en la siguiente suma de polinomios:

$$(2x^3 + 5x + 3 + 2x^2) + (4x - 3x^2 + x^3 - 5)$$

En forma horizontal	En forma vertical
$(2x^3 + 2x^2 + 5x + 3) + (x^3 - 3x^2 + 4x - 5)$ $= 2x^3 + x^3 + 2x^2 - 3x^2 + 5x + 4x + 3 - 5$ $= 3x^3 - x^2 + 9x - 2$	$2x^3 + 2x^2 + 5x + 3$ $x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ $3x^3 - x^2 + 9x - 2$

Tabla 2

Ejemplo 2

Para hallar la expresión algebraica que representa el perímetro de la Figura 2. se puede proceder así:

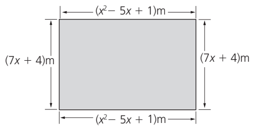


Figura 2

En forma horizontal	En forma vertical
$P = (x^2 - 5x + 1) + (7x + 4) +$ $(x^2 - 5x + 1) + (7x + 4)$ $P = x^2 + x^2 - 5x - 5x + 7x + 7x + 4 + 4$ $P = 2x^2 + 4x + 10$	$x^2 - 5x + 1$ $7x + 4$ $x^2 - 5x + 1$ $7x + 4$ $2x^2 + 4x + 10$

Tabla 3

Ejemplo 3

Al adicionar $8xy + x^2 - 6y^2$ y la expresión $x^2 - 3y^2 + 6xy$ se puede proceder de las siguientes maneras:

En forma horizontal	En forma vertical
$A_T = 8xy + x^2 - 6y^2 + 6xy + x^2 - 3y^2$ $= 14xy + 2x^2 - 9y^2$	$8xy + x^2 - 6y^2$ $6xy + x^2 - 3y^2$ $14xy + 2x^2 - 9y^2$

Tabla 4

Destreza con criterios de desempeño: Operar con polinomios en ejercicios numéricos y algebraicos.

3.2 Sustracción de polinomios

Para **sustraer polinomios**, se restan los coeficientes de los términos semejantes y se deja indicada la sustracción de los términos no semejantes.

Al hacer las sustracciones de polinomios, se utiliza el **polinomio opuesto**.

Ejemplo 4

El polinomio opuesto de otro polinomio se halla estableciendo el opuesto de los coeficientes de sus términos. Luego, el opuesto del polinomio $\frac{1}{2}xy^3 - 3x^2y + 2$ es $-\frac{1}{2}xy^3 + 3x^2y - 2$, ya que los opuestos de los coeficientes $\frac{1}{2}$, -3 y 2 son: $-\frac{1}{2}$, 3 y -2, respectivamente.

Ejemplo 5

Para restar $x^3 + 3x^2 - 5x + 7$ menos $2x^3 - 4x^2 + 5$, aplicando el concepto de polinomio opuesto, se siguen los procedimientos que se muestran a continuación.

Horizontalmente:

1. Se identifican tanto el minuendo como el sustraendo.

   Minuendo: $(x^3 + 3x^2 - 5x + 7)$ Sustraendo: $2x^3 - 4x^2 + 5$

2. Se escribe el minuendo con su propio signo y, a continuación, el polinomio opuesto del sustraendo.

$$(x^3 + 3x^2 - 5x + 7) - (2x^3 - 4x^2 + 5)$$
$$= x^3 + 3x^2 - 5x + 7 - 2x^3 + 4x^2 - 5$$

3. Se reducen los términos semejantes.

$$x^3 - 2x^3 + 4x^2 + 3x^2 - 5x - 5 + 7 = -x^3 + 7x^2 - 5x + 2$$

Verticalmente:

1. Después de identificar el minuendo y el sustraendo, se busca el polinomio opuesto del sustraendo.
2. Se ubican los términos del minuendo y, debajo, los términos del opuesto del sustraendo, teniendo en cuenta que cada término quede en la misma columna que su semejante.
3. Cuando hay términos que no tienen semejantes en el otro polinomio, se deja el espacio o se suma 0.

$$\begin{array}{r} x^3 + 3x^2 - 5x + 7 \\ -2x^3 + 4x^2 + 0 - 5 \\ \hline -x^3 + 7x^2 - 5x + 2 \end{array}$$

Ejemplo 6

Para restar $x^2y - 2xy + 1$ de $-3x^2y + \frac{1}{2}$, se procede de la siguiente manera:

$$\left(-3x^2y + \frac{1}{2}\right) - (x^2y - 2xy + 1) = -3x^2y + \frac{1}{2} - x^2y + 2xy - 1 =$$
$$-3x^2y - x^2y + \frac{1}{2} - 1 + 2xy = -4x^2y - \frac{1}{2} + 2xy =$$
$$-4x^2y + 2xy - \frac{1}{2}$$

Ten en cuenta

Para identificar si dos polinomios son **opuestos**, se verifica si sus coeficientes de igual grado son opuestos.

Ten en cuenta

Para sumar o restar dos polinomios, basta con sumar o restar los términos de igual grado. Ambas operaciones cumplen las siguientes propiedades:

- Asociativa: $[P(x) + Q(x)] + R(x) = P(x) + [Q(x) + R(x)]$
- Conmutativa: $P(x) + Q(x) = Q(x) + P(x)$
- Existe elemento neutro, llamado también polinomio nulo.
- Cada polinomio tiene un opuesto.

Ten en cuenta

Los polinomios se suelen denotar por una letra mayúscula, seguida entre paréntesis de las variables que contiene.

$P(x) = 3x^2 - 2x + 5$

$Q(x, y) = 2x^3 - xy + 3$

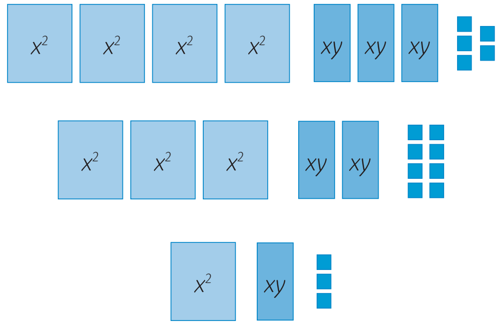
Ampliación conceptual

El polinomio opuesto o inverso aditivo de otro polinomio P(x) es aquel cuyos términos son los respectivos opuestos de los términos de P(x).

Al utilizar material concreto en la sustracción:

$$(4x^2 - 3xy - 5) - (3x^2 - 2xy - 8)$$

La diferencia es: $x^2 - xy + 3$



Actividades TIC

Ingresa a ese link:

http://ns.wqimg.com/401407_634875274996755000.swf

Busca la unidad, dos suma y resta de polinomios y resuelve los problemas propuestos

Actividades colaborativas

En grupos resolver:

a. $(7x^2 - 6xy + 5y^2) - (4x^2 + 7xy - 4y^2)$

b. $(4y^2 - 12y + 12) - (6y^2 + 11y + 8)$

Ejercitación

1. $3a^2 + 7b^2$

2. a. $-4x - 7$ b. $2mn - 9m^2$
   c. $-5y^2 + y + 3$ d. $6ab^2 - 4a^2b$

Ejercitación

3. a. $5x^2 - 10x - 17$
   b. $-5ab + 10a^2 + 5b$
   c. $12m^3n^3 - 30m^2n^2 + 3mn$
   d. $\frac{1}{10m^3} - \frac{37}{7m^2}$
   e. $-6x^3y^2 - \frac{8}{3}x^3y^2 - 7x^2y^3 - \frac{29}{4}$
   f. $-\frac{2}{7}a^4b^3 - 5a^4b^3 + 8a^3b^4 - \frac{1}{3}a^3b^4$

4. a. $-2x^2 - 10x - 11$
   b. $31a^2b - ab + 3$
   c. $12m^3n^3 - 30m^2n^2 + 3mn$
   d. $7x - 3y + 6z$ e. $-6ab^2 + \frac{28}{3a^2b} - \frac{2}{5ab}$
   f. $\frac{2}{3}x^5y^4 - \frac{1}{9}x^4y^5$

Razonamiento

5. a. $11x^2y$ b. $-13m^3n^2$
   c. $a^5 + a^4 - 20a^3 + 7a^2 + a^2 - 20$
   d. $\frac{1}{2}x + \frac{6}{5}y - \frac{23}{18}z + \frac{1}{2}$
   e. $m^2 + 9a - 2b - 25m + 15$
   f. $16m^2 - 25m + 85$
   g. $-9a + 3b$ h. $\frac{14}{3}x^2 - 3a + 2b + \frac{7}{2}x$
   i. $-7a + b - 5$

6. a. $2m^3 - 4m^2 - 8m + 8$
   b. $x + 12x^2y - 9xy^2$
   c. $\frac{a^2}{3} + a$
   d. $\frac{222y^3 - 280y - 63}{42}$

Bloque de Álgebra y funciones

3 Adición y sustracción de polinomios

Actividad resuelta

Ejercitación

1. Determina el área de la parte sombreada de la Figura 3, considerando que el área del cuadrado está dada por la expresión $(8a^2 + 6b^2)$ y el área del sector circular es $(5a^2 - b^2)$.

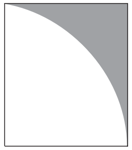


Figura 3

Solución

Para determinar el área sombreada, se resta al área del cuadrado el área del sector circular.

Por lo tanto, el área sombreada es:

$A_{sombreada} = (8a^2 + 6b^2) - (5a^2 - b^2)$
$= 8a^2 + 6b^2 - 5a^2 + b^2$
$= 8a^2 - 5a^2 + 6b^2 + b^2$
$= 3a^2 + 7b^2$

Entonces, el área de la parte sombreada es $3a^2 + 7b^2$.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2. Escribe el opuesto de cada polinomio.
   a. $4x + 7$ b. $-2mn + 9m^2$
   c. $5y^2 - y - 3$ d. $-6ab^2 + 4a^2b$

3. Haz las siguientes sumas.
   a. $(5x^2 - 7x - 8) + (-3x - 9)$
   b. $(4a^2 + 2ab + 5b) + (6a^2 - 7ab)$
   c. $(-15mn^2 + 6m^2n - 9m) + (-13m^2n - 2m + 3)$
   d. $\left(\frac{1}{2}m^3 - \frac{2}{3}m^2\right) + \left(-\frac{2}{5}m^3 + \frac{1}{6}m^2\right)$
   e. $(-6x^3y^2 + 7x^2y^3 - 9) + \left(-\frac{8}{3}x^3y^2 + \frac{7}{4}\right)$
   f. $\left(8a^3b^4 - \frac{2}{7}a^4b^3\right) + \left(-5a^4b^3 - \frac{1}{3}a^3b^4\right)$

4. Haz las siguientes sustracciones.
   a. $(6x^2 - 3x - 7) - (8x^2 + 7x + 4)$
   b. $(24a^2b - 6ab - 5) - (-7a^2b - 5ab - 8)$
   c. $(3mn - 6m^2n^2 + 2m^3n^3) - (24m^2n^2 - 10m^3n^3)$
   d. $(9x - 7y + 9z) - (3z - 4y + 2x)$
   e. $(-6ab^2 + 8a^2b) - \left(\frac{2}{5}ab - \frac{4}{3}a^2b\right)$
   f. $\left(\frac{3}{2}x^5y^4 - \frac{2}{3}x^4y^5\right) - \left(\frac{5}{6}x^5y^4 - \frac{7}{9}x^4y^5\right)$

Razonamiento

5. Realiza estas operaciones.
   a. De $3x^2y$, restar $-8x^2y$.
   b. Restar $-2m^3n^2$ de $-15m^3n^2$.
   c. De $a^5 - 9a^3 + 6a^2 - 20$, restar $-a^4 + 11a^3 - a^2$.
   d. De $\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}y - \frac{7}{9}z$, restar $-\frac{3}{5}y + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$
   e. De la suma de $a + b - 5$ con $8a - 3b + 12$, restar $2a - 6b + 21$.
   f. De la suma de $8m^2 + 5$ con $-2 + 7m^2$, restar la suma de $20m - 8$ con $-m^2 + 5m$.
   g. Restar la suma de $2a + b$ con $a - 3b$, de la suma de $-7a + 2b$ con $a - b$.
   h. Restar $\frac{8}{3}x - \frac{1}{6}x^2$ de la adición de $x + 5x^2$ con $\frac{5}{2}x - \frac{1}{3}x^2$.
   i. De la diferencia entre $3a - 2b$ y $2a - b$, restar la suma de $8a - b$ con $5 - b$.

6. Escribe el polinomio que hace falta en cada operación.
   a. $(-8m^3 + 4m^2 - 3) + \square = -6m^3 - 8m + 5$
   b. $(3x^2y - 4xy^2 - 7x) - \square = -9x^2y + 5xy^2 - 8x$
   c. $\left(\frac{1}{6}a^2 - \frac{3}{2}a\right) + \square = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a$
   d. $\left(\frac{5}{7}y^3 - \frac{1}{3}y + 2\right) - \square = 6y^3 - 7y + \frac{1}{2}$

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar las propiedades algebraicas de los números enteros y racionales en la suma de polinomios

Ejercitación

7 Considera los siguientes polinomios.

$P(x) = 3x^3 - 5x^2 + x - 1$

$Q(x) = 2x^4 + x^3 - 2x + 4$

$R(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x$

Resuelve.

a. $P(x) + Q(x)$ b. $P(x) - R(x)$

c. $P(x) - Q(x) + R(x)$ d. $P(x) + Q(x) + R(x)$

8 Determina el perímetro de las figuras.

a.

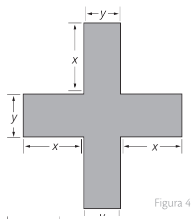


Figura 4

b.

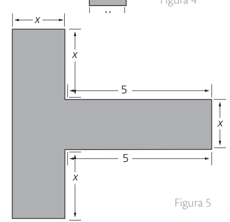


Figura 5

c.

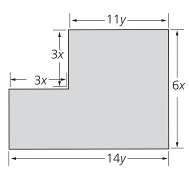
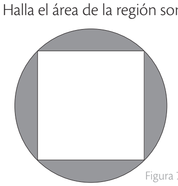


Figura 6

9 Halla el área de la región sombreada de la Figura 7.



Área del círculo: $4x^2y$

Área del cuadrado: $\frac{3}{2}x^2y$

Figura 7

Razonamiento

10 Completa los términos de la operación.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5a^2 & + & \square & + & 7b^2 & - & 30 \\ & & 5ab & - & \square & + & \square \\ \square & + & ab & - & 36b^2 & & \\ \hline -21a^2 & - & 8ab & + & 2b^2 & + & 15 \end{array}$$

11 Escribe (V) si la afirmación es verdadera y (F) si es falsa.

a. El opuesto del polinomio $-7xy + 11y$ es el polinomio $7xy - 11y$. ( )

b. $3x^4 - 2x = x^3$. ( )

c. Al restar $28xy^2$ de $35xy^2$, se obtiene $-7xy^2$. ( )

d. En la adición de polinomios se utiliza el polinomio opuesto. ( )

12 Halla dos polinomios cuya suma sea cada uno de los siguientes polinomios.

a. $2y - 5$ b. $3m^2 + 2n - 6$

c. $-5x^3 - 6x^2$ 1 $7x$ d. $-\frac{9}{2}a^3b^2 - \frac{9}{2}a^2b^3$

Resolución de problemas

13 ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo, si se sabe que el lado mayor excede en a al lado menor x?

14 Un club vacacional está distribuido por zonas. La zona de deportes tienen un área de $(15mn - 5m)$, la zona verde un área de $(7mn + 10m)$ y la zona de vivienda un área de $(5mn + 3m)$. Calcula el área total del club.

15 El perímetro del triángulo es $5m^2 + 8m + 6$. Encuentra el polinomio que representa la medida del tercer lado.

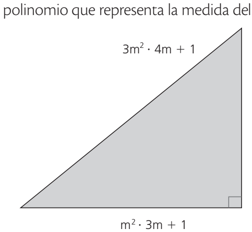


Figura 8

16 Alexandra llenó con $15y - 4$ galones de gasolina el tanque de su carro, al iniciar la semana. Gastó $7y - 3$ galones entre el lunes y el viernes y $3y + 1$ el fin de semana. ¿Cuántos galones le quedan todavía en el tanque?

Ejercitación

7. a. $2x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x + 3$

b. $x^3 - 8x^2 + 8x - 1$

c. $-2x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 4x - 5$

d. $2x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 8x + 3$

8. a. $8x + 4y$

b. $8x + 10$

c. $15x + 25y$

9. $\frac{5}{2}x^2y$

Razonamiento

10.

$$\begin{array}{rcrcrr} 5a^2 & + & -4ab & + & 7b^2 & -30 \\ & - & 5ab & - & 31b^2 & +45 \\ -26a^2 & + & ab & - & 36b^2 & \\ \hline -21a^2 & - & 8ab & + & 2b^2 & +15 \end{array}$$

11. a. F b. F c. F d. F

12. a. Respuesta libre

b. Respuesta libre

c. Respuesta libre

d. Respuesta libre

Resolución de problemas

13. $2x + 2(x + a)$

14. $26mn + 8m$

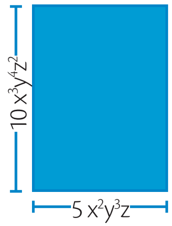
15. $m^2 + m + 4$

16. $5y - 2$

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Las dimensiones de la alfombra rectangular se representa por monomios.



El área de la alfombra se determina mediante una multiplicación de monomios.

$$\text{Área} = (5\,x^2y^3z)\,(10\,x^3y^4z^2)$$

El producto de los dos monomios se obtiene multiplicando los coeficientes entre si y las partes literales entre si.

Por tanto: $(5\,x^2y^3z)\,(10\,x^3y^4z^2) = (50x^5y^7z^2)$ Área

Recomendaciones para desarrollar la lección

Recuérdeles inicialmente a los y las estudiantes, las propiedades de la potenciación de los números enteros, ya que éstas se requerirán para realizar productos entre las variables de la parte literal de los monomios. Posteriormente, recuérdeles en qué consiste la propiedad distributiva de la adición con respecto al producto para aplicarla en la multiplicación de polinomios. La multiplicación de polinomios también se puede trabajar desde lo concreto. Utilice las fichas algebraicas construidas en el módulo anterior.

4 Multiplicación de polinomios

Explora

En una fábrica de cortinas, uno de los modelos está diseñado de manera que el largo de la cortina debe ser igual al triple del ancho.

- ¿Cuál es la expresión que muestra el área de este modelo de cortina?

Para calcular el área de la cortina, se debe multiplicar su ancho por su largo. Si se determina que el ancho corresponde a la variable x, entonces el largo será $3x$; por lo tanto, la expresión del área es $A = x \cdot 3x$.

La multiplicación se resuelve de la siguiente manera:

1. Se multiplican los coeficientes de los términos: $1 \cdot 3 = 3$
2. Se multiplica la parte literal de los términos: $x \cdot x = x^2$
3. Se expresa el área de la cortina: $3x^2$

En general, al **multiplicar dos expresiones algebraicas,** se aplica la propiedad de las potencias de igual base y la ley de los coeficientes.

4.1 Multiplicación de monomios

La **multiplicación de monomios** se realiza multiplicando los coeficientes de las expresiones algebraicas y aplicando la propiedad de las potencias de igual base.

Ejemplo 1

Observa los productos de las siguientes multiplicaciones de monomios.

a. $(4ab^2c^3)\,(5a^3) = 20a^4\,b^2\,c^3$ **b.** $(-5x^2y^4z)\,(5z^3) = -25x^2y^4z^4$

Ejemplo 2

Mira la manera de relacionar cada multiplicación de monomios con su producto.

a. $(m^4\,nz^5)(nz^2)$ **b.** $(2m^3\,y^4)(-5my^4)$ **c.** $\left(\frac{3}{2}a^2\right)\left(-\frac{4}{5}a^4\right)$

(**b.**) $-10m^4\,y^8$ (**a.**) $m^4\,n^2\,z^7$ (**c.**) $-\frac{6}{5}a^6$

4.2 Multiplicación de monomio por polinomio

Para multiplicar un monomio por un polinomio, se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio. Es importante aplicar las reglas de multiplicación de signos. Al final, si resultan términos semejantes, se reducen.

Ejemplo 3

Efectúa la multiplicación $(5a^3\,b + 6ab^2 - 4a^2)\left(-\frac{2}{5}ab\right)$.

$$5a^3\,b \cdot \left(-\frac{2}{5}ab\right) + 6ab^2 \cdot \left(-\frac{2}{5}ab\right) \underset{a^3\,b}{-4a^2} \cdot \left(-\frac{2}{5}ab\right) = -2a^4\,b^2 - \frac{12}{5}\,a^2\,b^3 + \frac{8}{5}$$

Ejemplo 4

Observa otra forma de realizar la multiplicación de un monomio por un polinomio.

$$\begin{array}{r} \frac{2}{7}\,x^3\,y^2 - \frac{4}{9}\,x^2y + \frac{7}{8}\,xy \\ -\frac{2}{9}x^2y \\ \hline -\frac{4}{63}\,x^5\,y^3 - \frac{8}{81}\,x^4\,y^2 - \frac{14}{72}\,x^3\,y^2 \end{array}$$

Ten en cuenta

Propiedad distributiva

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Ten en cuenta

La propiedad de potencias de igual base establece que, al multiplicar potencias de la misma base, se deja la base y se suman exponentes.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Ten en cuenta

El signo $-$ delante de un paréntesis cambia el signo de todos los términos dentro del paréntesis.

$-(2x^2 - 3x + 1) =$

$-2x^2 + 3x - 1$

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar las propiedades algebraicas de los números enteros y racionales en la multiplicación de términos.

4.3 Multiplicación de polinomio por polinomio

La **multiplicación de polinomios** se basa en la **propiedad distributiva**. Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada uno de los términos del multiplicando por todos los términos del multiplicador y luego se suman los resultados.

Ejemplo 5

Observa cada uno de los pasos para multiplicar.

$$\begin{array}{rl} 3x^2y - 2xy + 3y & \\ xy + 2y & \\ \hline 3x^3y^2 - 2x^2y^2 + 3xy^2 & \longrightarrow \text{Se multiplica por } xy \\ 6x^2y^2 - 4xy^2 + 6y^2 & \longrightarrow \text{Se multiplica por } 2y \\ \hline 3x^3y^2 + 4x^2y^2 - xy^2 + 6y^2 & \longrightarrow \text{Se adiciona} \end{array}$$

Ejemplo 6

Observa cómo se realizó esta multiplicación.

$$\begin{array}{r} 8a^2b - 4b + 6c \\ 2ab + c \\ \hline 16a^3b^2 - 8ab^2 + 12abc \qquad\qquad \\ + 8a^2bc - 4bc + 6c^2 \\ \hline 16a^3b^2 - 8ab^2 + 12abc + a^2bc - 4bc + 6c^2 \end{array}$$

Ejemplo 7

Observa la forma de multiplicar los polinomios que se muestra a continuación.

$(m^2 + n^3 + z^4)(p^2 - q^3) =$

$(m^2 \cdot p^2) + (n^3 \cdot p^2) + (z^4 \cdot p^2) - (m^2 \cdot q^3) - (n^3 \cdot q^3) - (z^4 \cdot q^3) =$

$m^2 p^2 + n^3 p^2 + z^4 p^2 - m^2 q^3 - n^3 q^3 - z^4 q^3$

Ten en cuenta

Propiedad distributiva

Al multiplicar un polinomio por una expresión algebraica, se multiplica el polinomio por cada uno de los términos que se encuentran en el paréntesis.

$$x^2(y^3 + 4a^4) =$$
$$x^2 \cdot y^3 + x^2 \cdot 4a^4 =$$
$$x^2 y^3 + 4x^2 a^4$$

Ten en cuenta

La elección de las letras x y y para denotar variables se debe a una duda que tuvo el editor de los escritos de Descartes, ya que ante la gran cantidad de ecuaciones de su libro *Geometrie*, le preguntó si podía utilizar letras poco frecuentes en francés y escogió las últimas letras del alfabeto.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Halla la superficie de la Figura 1

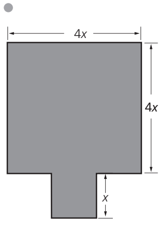


Figura 1

Solución:

La figura se puede descomponer en dos cuadrados, uno de $4x$ de lado y otro de lado x.

Entonces, la superficie de la figura de la izquierda se obtiene al resolver la siguiente expresión:

$$(4x)(4x) + (x)(x)$$

Se resuelve la expresión y se obtiene esto:

$$(4x)(4x) + (x)(x)$$
$$16x^2 + x^2$$
$$17x^2$$

Por lo tanto, la superficie de la Figura 1 se representa con la expresión $17x^2$.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Halla el producto de los polinomios.

a. (a + b) (2a + b)

b. (a + b)(a^2 + 1)

c. 5a^3 (a + a^2 +ab +ab^2)

d. 3xy^2 (2x + 3xy +6x^2 + y^2)

Actividades TIC

En el link:

www.sm.net/8smt01

Desarrolla los ejercicios de multiplicación de polinomios

Actividades colaborativas

En grupos resolver:

Hallen el producto de los polinomios.

a . (a + b) (2a + b)

b . (a - b) (a^2 + 1)

c . (2a + b) (a^2 – b^2 – ab)

d. (a - b) (a^2 – b^2 – ab)

Ejercitación

2. a. $-42x^7$ b. $18y^{17}$

c. $3y^3$ d. $-2x^4$

e. $-6x^5y^2$ f. $4x^2y^2$

3. a. $6x^5y^2z^6$ b. $3x^{13}y^2z^6$

c. $12x^{11}y^7z^6$ d. $-2x^2y^5z^2$

e. $-x^4y^4z^4$ f. $7x^6y^6z^5$

Razonamiento

4. a. $9x^6y^4z + x^3y^6z^2$

b. $3x^4y^3z + x^2z^5$

c. $-3x^3y^3z - 3y^3z^4$

d. $4x^9y^2 - 2x^6y^9z^2$

e. $6x^7y^7 - 2xy^8$

f. $-16x^4y^3 - 4xy^4$

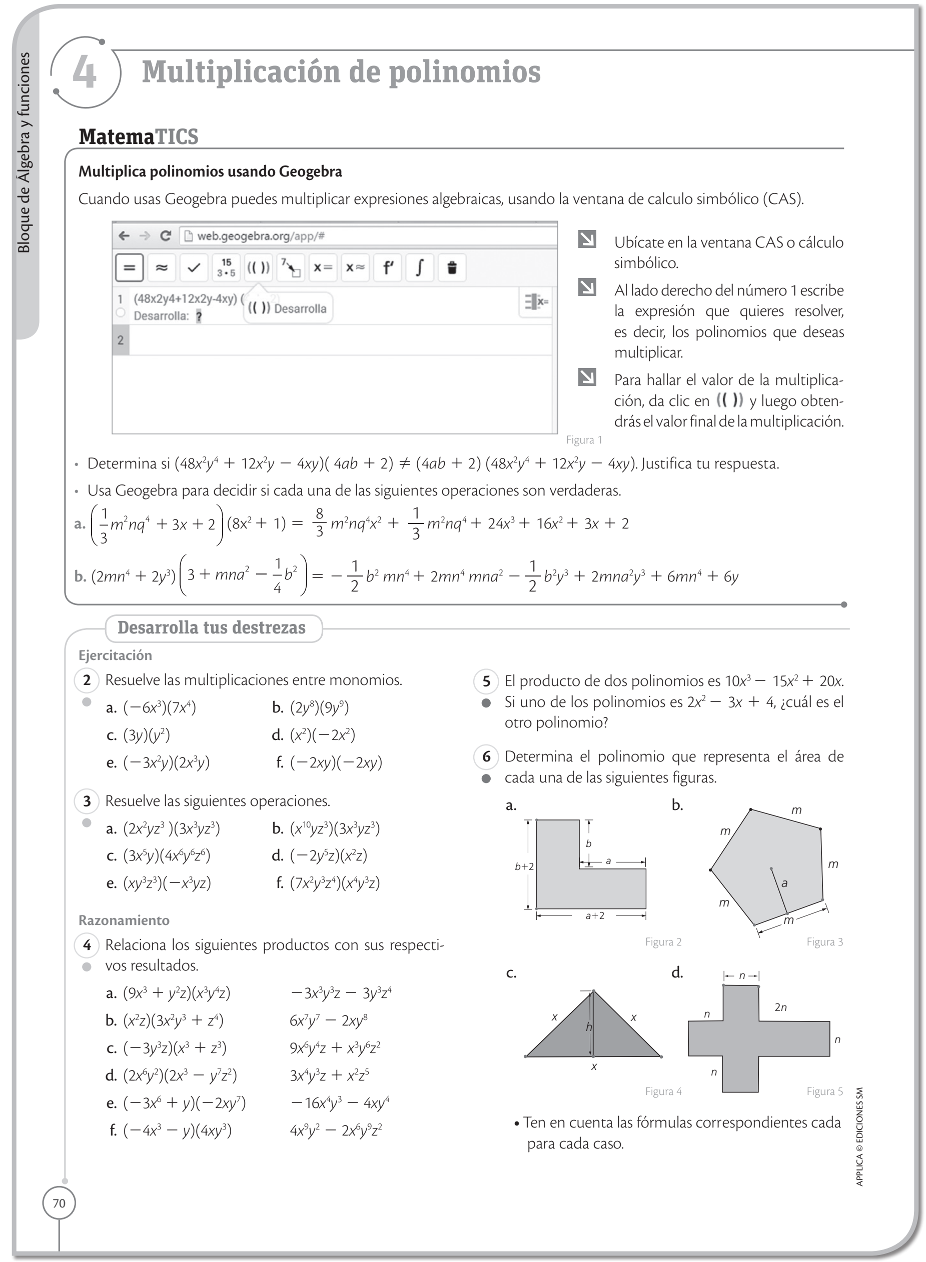
5. $5x$

6. a. $b(a+2) + a(b+2)$

b. $\frac{5(am)}{2}$

c. $\frac{xh}{2}$

d. $4n^2 + 2n^2$



Bloque de Álgebra y funciones

4 Multiplicación de polinomios

MatemaTICS

Multiplica polinomios usando Geogebra

Cuando usas Geogebra puedes multiplicar expresiones algebraicas, usando la ventana de calculo simbólico (CAS).

Figura 1

- Ubícate en la ventana CAS o cálculo simbólico.
- Al lado derecho del número 1 escribe la expresión que quieres resolver, es decir, los polinomios que deseas multiplicar.
- Para hallar el valor de la multiplicación, da clic en (( )) y luego obtendrás el valor final de la multiplicación.

- Determina si $(48x^2y^4 + 12x^2y - 4xy)(4ab + 2) \neq (4ab + 2)(48x^2y^4 + 12x^2y - 4xy)$. Justifica tu respuesta.
- Usa Geogebra para decidir si cada una de las siguientes operaciones son verdaderas.

a. $\left(\frac{1}{3}m^2nq^4 + 3x + 2\right)(8x^2 + 1) = \frac{8}{3}m^2nq^4x^2 + \frac{1}{3}m^2nq^4 + 24x^3 + 16x^2 + 3x + 2$

b. $(2mn^4 + 2y^3)\left(3 + mna^2 - \frac{1}{4}b^2\right) = -\frac{1}{2}b^2mn^4 + 2mn^4mna^2 - \frac{1}{2}b^2y^3 + 2mna^2y^3 + 6mn^4 + 6y$

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve las multiplicaciones entre monomios.

a. $(-6x^3)(7x^4)$ b. $(2y^8)(9y^9)$

c. $(3y)(y^2)$ d. $(x^2)(-2x^2)$

e. $(-3x^2y)(2x^3y)$ f. $(-2xy)(-2xy)$

3 Resuelve las siguientes operaciones.

a. $(2x^2yz^3)(3x^3yz^3)$ b. $(x^{10}yz^3)(3x^3yz^3)$

c. $(3x^5y)(4x^6y^6z^6)$ d. $(-2y^5z)(x^2z)$

e. $(xy^3z^3)(-x^3yz)$ f. $(7x^2y^3z^4)(x^4y^3z)$

Razonamiento

4 Relaciona los siguientes productos con sus respectivos resultados.

a. $(9x^3 + y^2z)(x^3y^4z)$	$-3x^3y^3z - 3y^3z^4$
b. $(x^2z)(3x^2y^3 + z^4)$	$6x^7y^7 - 2xy^8$
c. $(-3y^3z)(x^3 + z^3)$	$9x^6y^4z + x^3y^6z^2$
d. $(2x^6y^2)(2x^3 - y^7z^2)$	$3x^4y^3z + x^2z^5$
e. $(-3x^6 + y)(-2xy^7)$	$-16x^4y^3 - 4xy^4$
f. $(-4x^3 - y)(4xy^3)$	$4x^9y^2 - 2x^6y^9z^2$

5 El producto de dos polinomios es $10x^3 - 15x^2 + 20x$. Si uno de los polinomios es $2x^2 - 3x + 4$, ¿cuál es el otro polinomio?

6 Determina el polinomio que representa el área de cada una de las siguientes figuras.

Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

- Ten en cuenta las fórmulas correspondientes cada para cada caso.

70

APPLICA © EDICIONES SM

Destreza con criterios de desempeño: Calcular expresiones numéricas y algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R.

7 Indica si el resultado de las siguientes operaciones es correcto (C) o incorrecto (I).

a. $(7x+6)(2x)=14x+6x^2$ ( )
b. $x(3x^3+2y^2)=3x^4+2xy^2$ ( )
c. $(2x-1)(2x+1)=4x^2+1$ ( )
d. $5xy^3(x^4+2y^5)=5xy^3+10xy^8$ ( )
e. $(x+1)(x+1)=x^2+1$ ( )
f. $3xy(3x^2-7y^2)=9x^3y-21xy^3$ ( )
g. $x^3(x^2+y^3)=x^6+x^3y^3$ ( )

Comunicación

8 Identifica el error que se cometió en las multiplicaciones.

a.
$$\begin{array}{r} 5x^2+6x-4 \\ 3x-2 \\ \hline -10x^2-12x+8 \\ 15x^3+18x^2+12x \\ \hline 15x^3+8x^2+0x+8 \end{array}$$

b.
$$\begin{array}{r} 3x^3 \quad -8x+4 \\ 2x^2+5x-1 \\ \hline -3x^3 \quad +8x-4 \\ 15x^4 \quad -40x^2+20x \\ 6x^5 \quad -16x^3+8x^2 \\ \hline 6x^5+15x^4-13x^3-32x^2+28x-4 \end{array}$$

c.
$$\begin{array}{r} 2x^3y^2-5xy \\ -3x^2y \\ \hline -6x^5y^3 \\ 15x^3y^2 \\ \hline 9x^2y \end{array}$$

9 Completa las siguientes operaciones con el polinomio les hace falta.

a. $(-x+5)\square=-3x^2+15x$
b. $\square(-x+5)=9x^2+9x$
c. $(3x)\square=12x^2-18x$
d. $(-3x^3)(x^2-3)=\square$
e. $\square(4x^3y-5xy^3)=16x^5y^3-20xy^3x^2y^2$
f. $(9x)(3x^2+5x-3)=\square$
g. $(5x^2)\square=10x^5+25x^4-15x^2$
h. $(x^3+3)\square=xy^2x^3-3x^3y+3xy^2-9y$

Razonamiento

10 Al multiplicar dos binomios, se obtiene como resultado el polinomio $6xy^4x^2-6x^2y^2+15xy^4-15y^2$.

- Si uno de los binomios es $3xy^4-3y^2$, determina cuál es el otro binomio.

11 Relaciona cada figura geométrica con el polinomio que representa su área.

a. $5x^2$

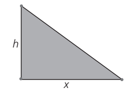


Figura 6

b. x^2

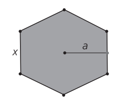


Figura 7

c. $\frac{6ax}{2}$

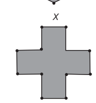


Figura 8

d. $\frac{xh}{2}$

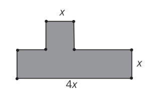


Figura 9

e. $5x^2$

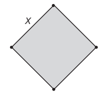


Figura 10

Resolución de problemas

12 Un lado de un rectángulo se representa con el polinomio $x+3$ y el otro lado, con el polinomio $3x+1$. A partir de esta información, determina:

a. El área del rectángulo en términos de x.
b. El área del rectángulo si $x=2$ cm.

13 Se tiene un cuadrado de lado x. Responde.

a. ¿Cuál es la expresión del área en función de x?
b. ¿Cuál es el área si $x=3$ cm?

14 Se cuenta con un prisma rectangular como el de la Figura 11. Resuelve.

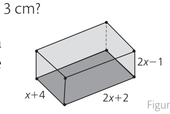


Figura 11

a. Halla el polinomio que representa el área de la base.
b. Determina un polinomio que represente el volumen del prisma rectangular.

7. a. I b. C c. I
d. I e. C f. C
g. I

Comunicación

8. a. El resultado de multiplicar $3x$ por -4 es $-12x$ por tanto el resultado de la multiplicación es $15x^3+8x^2-24x+8$

b. La suma de $-3x^3$ y $-16x^3$ es $-19x^3$.

c. Se debe multiplicar $2x^3y^2-5xy$ por $-3x^2y$.

9. a. $3x$
b. $-9x-54-\frac{270}{x-5}$
c. $4x-6$
d. $-3x^5+9x^3$
e. $4x^2y^2$
f. $27x^3+45x^2-27x$
g. $2x^3+5x^2-3$
h. xy^2-3y

10. $2x^2+5$

11. a. Figura 8 b. Figura 10
c. Figura 7 d. Figura 6
e. Figura 9

Resolución de problemas

12. a. $3x^2+10x+3$
b. Área □= 35cm²

13. a. x^2 b. 9 cm²

14. a. $2x^2+10x+8$

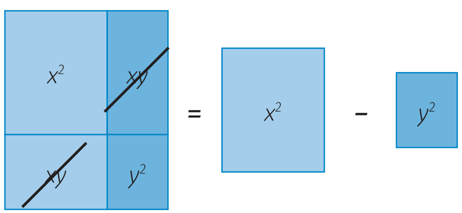
Libro del alumno

Ampliación conceptual

Productos notables con material concreto

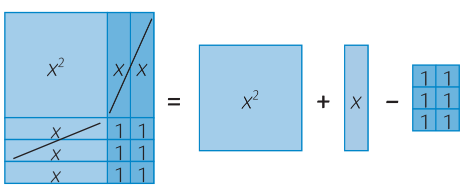
- Dados los polinomios, debes formar cuadrados o rectángulos con el apoyo del resto de fichas, solo con lados congruentes.
- Aplica la ley de signos para colocar las fichas.
- Para plantear el resultado, no cuentes la base ni la altura, aplica las reglas de la suma, las fichas sobrantes son respueta.

Como al operar $(x + y)(x - y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$ utilizando las fichas se tiene:



$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

Al operar $(x + 3)(x - 2) = x^2 + x(3 - 2) - 6 = x^2 + x - 6$, y utilizando las fichas se tiene:



$(x + 3)(x - 2) = x^2 + x - 6,$

5 Productos notables

Explora

Una finca está parcelada tal como muestra la Figura 1. En cada región sembraron diferentes productos.

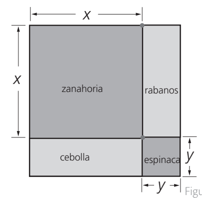


Figura 1

- ¿Qué área corresponde al cultivo de espinacas?
- ¿Cuál es la expresión que permite determinar el área total de la finca?

TIC TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

Encontrarás algunos ejercicios relacionados con los productos notables. Estos te ayudarán a evaluar tu grado de comprensión acerca del tema.

www.e-sm.net/8smt03

App

Productos notables

Abre la aplicación *MathSteps*, escribe expresiones algebraicas y realiza cálculos sencillos. Compara tus soluciones con las dadas por la aplicación.

Para calcular el área del terreno destinado al cultivo de espinacas, es necesario hallar el valor del cuadrado pequeño que está en la parte inferior de la Figura 2

Observa que cada lado tiene una longitud representada por la variable y; por lo tanto, el área será igual a y^2.

En cuanto a la expresión para determinar el área total de la finca, se puede calcular el área de cada una de las secciones y sumarlas. Entonces:

$A1 = x \cdot x \quad A2 = (x)(y) = xy \quad A3 = (x)(y) = xy \quad A4 = (y \cdot y) = y^2$

Luego, el área de la finca se calcula sumando $x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

Sin embargo, este resultado también se puede calcular encontrando primero la expresión que corresponde al lado de la finca y elevándola al cuadrado. Observa:

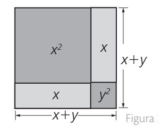


Figura 2

$(x + y)^2 =$

$(x + y)(x + y) =$

$x^2 + 2xy + y^2$

Esto corresponde a un producto notable.

Los **productos notables** son regularidades que se pueden calcular sin necesidad de aplicar el algoritmo de la multiplicación.

5.1 Cuadrado de un binomio

El **cuadrado de un binomio** es igual al cuadrado del primer término más (o menos) el doble del primer término por el segundo, más el segundo término al cuadrado.

Cuadrado de la suma de dos términos	Cuadrado de la resta de dos términos
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$	$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

Tabla 1

Ejemplo 1

Observa la solución del producto notable $(m + n)^2$.

- Se eleva el primer término al cuadrado: m^2
- Se halla el doble del primer término por el segundo: $2mn$
- Se eleva el segundo término al cuadrado: n^2
- Por último, se suman las expresiones obtenidas: $m^2 + 2mn + n^2$

5.2 Producto de la suma por la diferencia de dos términos

El **producto de la suma por la diferencia de dos términos** es equivalente a la diferencia entre el cuadrado del primer término y el cuadrado del segundo término.

Ejemplo 2

Efectúa el producto notable $(2a - 4b)(2a + 4b)$.

- Se eleva el primer término al cuadrado: $(2a)^2 = 4a^2$
- Se eleva el segundo término al cuadrado: $(4b)^2 = 16b^2$
- Se unen los dos términos mediante el signo de diferencia: $4a^2 - 16b^2$

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer y calcular productos notables e identificar factores de expresiones algebraicas.

5.3 Producto de la forma $(x + a)(x + b)$

El **producto de la forma** $(x + a)(x + b)$ es equivalente al cuadrado del término común, más el producto de dicho término por la suma de los no comunes, más el producto de los términos no comunes.

Ejemplo 3

Calcula, el producto notable $(x + 7)(x + 6)$.

- Se calcula el primer término elevado al cuadrado: x^2
- Se calcula el producto del primer término por la suma de los términos no comunes: $x(7 + 6)$
- Se halla el producto de los segundo términos de los binomios: $(7)(6)$
- Se establece la igualdad correspondiente: $(x + 7)(x + 6) = x^2 + 13x + 42$

5.4 Cubo de un binomio

El **cubo de un binomio** es equivalente al cubo del primer término, más (o menos) el triple producto del cuadrado del primer término por el segundo, más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo término, más (o menos) el cubo del segundo término.

Cubo de la suma de dos términos	Cubo de la diferencia de dos términos
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Tabla 2

Ejemplo 4

Observa cómo se determina el cubo del binomio $(a + b)$.

- Se halla el primer término elevado al cubo: a^3
- Se calcula el triple del cuadrado del primer término por el segundo: $3a^2b$
- Se busca el triple del primer término por el segundo al cuadrado: $3ab^2$
- Se expresa el segundo término elevado al cubo: b^3

Por lo tanto, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Ejemplo 5

Analiza cómo se halla el resultado de $(2m - n)^3$.

- Se halla el primer término elevado al cubo: $(2m)^3 = 8m^3$
- Se calcula el triple del cuadrado del primer término por el segundo: $3(2m)^2n = 12m^2n$
- Se multiplica el triple del primer término por el segundo elevado al cuadrado: $3(2m)(n)^2 = 6mn^2$
- Se eleva el segundo término al cubo: n^3

Por lo tanto, el resultado es $8m^3 - 12m^2n + 6mn^2 - n^3$.

Observa que cuando se trata de un binomio por diferencia, todos los signos se intercalan empezando por uno positivo.

Ten en cuenta

El volumen del cubo de arista $x + y$ se calcula desarrollando la expresión $(x + y)^3$.

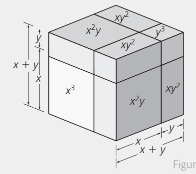


Figura 3

Sin embargo, se puede expresar en términos de los volúmenes más pequeños, como se observa en la Figura 4.

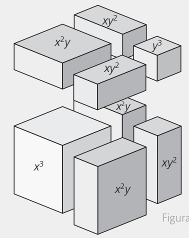


Figura 4

Ten en cuenta

En resumen, el producto de la forma $(x + a)(x + b)$ se resuelve así:

$(x + a)(x + b) =$
$x^2 + x(a + b) + ab$

Para calcular el cubo de un binomio, se realiza lo siguiente:

$(a + b)^3 =$
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

También se puede realizar así:

$(a - b)^3 =$
$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Proponga a los y las estudiantes que representen algunos productos notables con el material concreto.

b. Después del trabajo con el material concreto, hágales notar de que los dos términos que tienen la variable en primer grado se reducen a uno solo, que corresponde a la suma de ellos, y que el término independiente es el producto de los términos independientes de cada factor. Además, debe advertirles que el producto de dos binomios de primer grado es un polinomio de segundo grado.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Resuelve las siguientes expresiones aplicando productos notables.

a. $(a + 4)^2 =$

b. $(n - 10)^2 =$

c. $(a + 2)(a - 2) =$

d. $(9m - n)(9m + n) =$

e. $(m - 7n)^3 =$

f. $(3x - 5y)^2 =$

g. $(y - 7)(y - 2) =$

h. $(x^2 - 3y)(x^2 + 3y) =$

Actividades TIC

En el link:

www.sm.net/8smt013

Desarrolla los ejercicios de productos notables de polinomios.

1. $(2m + 3)^3$

Ejercitación

2. a. $16x^2 - 40xy + 25y^2$

b. $9x^2 + 12xy + 4y^2$

c. $4x^2 + 12xy + 9y^2$

d. $144v^2 + 168vz + 49z^2$

e. $\frac{1}{64}a^2 - \frac{3}{16}ab + \frac{9}{16}b^2$

f. $\frac{16}{25}j^2 - \frac{7}{5}aj + \frac{49}{64}a^2$

3. a. $81 + 72m + 16m^2$

b. $x^{20} + 10x^{10}y^2 + 25y^4$

c. $4x^2 + 12xz + 9z^2$

d. $16m^{10} + 40m^5n^3 + 25n^6$

e. $\frac{1}{4}w^2 - \frac{1}{2}wy + \frac{1}{4}y^2$

4. a. $x^2 - y^2$ b. $4a^2 - 1$

c. $1 - 9a^2x^2$ d. $a^2 - b^2$

e. $a^2 - x^2$ f. $m^2 - n^2$

g. $\frac{1}{16}m^2 - \frac{4}{25}n^2$

5

x	$(2a + n)$
$(2a - n)$	$4a^2 - n^2$
$(2a + n)$	$(2a + n)^2$

x	$(x + y)$
$(x + y)$	$x^2 + 2xy + y^2$
$(x + y)^2$	$(x + y)^3$

6. a. $x^2 + x - 6$

b. $4a^2 + a - 30$

c. $-3ab + a^2 - 3b + a$

d. $-a^2 + 1$

e. $9a^2b^2 - 15abx + 6ab - 10x$

f. $\frac{2mn}{63} + \frac{m^2}{81} - \frac{2n}{21} - \frac{m}{27}$

7. a. $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$

b. $a^3 - 12a^2 + 48a - 64$

c. $m^3 - \frac{6m^2}{7} + \frac{12m}{49} - \frac{8}{343}$

d. $m^3 + \frac{15m^2}{4} + \frac{75m^2}{16} + \frac{125}{64}$

e. $\frac{8}{27} + \frac{4x}{3} + 2x^2 + x^3$

f. $n^3 + \frac{6n^2}{7} + \frac{12n}{49} + \frac{8}{343}$

Razonamiento

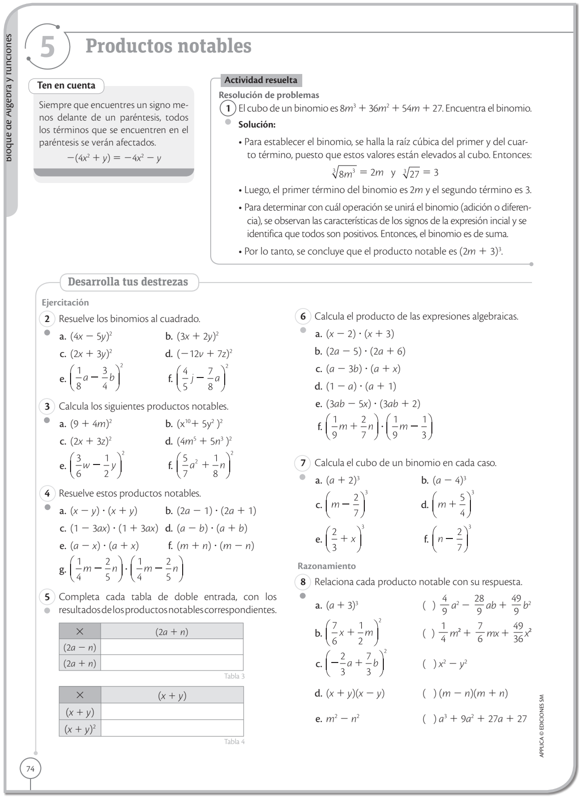
8. a. $a^3 + 9a^2 + 27a + 27$

b. $\frac{1}{4}m^2 + \frac{7}{6}mx + \frac{49}{36}x^2$

c. $\frac{4}{9}a^2 - \frac{28}{9}ab + \frac{49}{9}b^2$

d. $x^2 - y^2$

e. $(m - n)(m + n)$



Bloque de Álgebra y funciones

5 Productos notables

Ten en cuenta

Siempre que encuentres un signo menos delante de un paréntesis, todos los términos que se encuentren en el paréntesis se verán afectados.

$-(4x^2 + y) = -4x^2 - y$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 El cubo de un binomio es $8m^3 + 36m^2 + 54m + 27$. Encuentra el binomio.

Solución:

- Para establecer el binomio, se halla la raíz cúbica del primer y del cuarto término, puesto que estos valores están elevados al cubo. Entonces: $\sqrt[3]{8m^3} = 2m$ y $\sqrt[3]{27} = 3$
- Luego, el primer término del binomio es $2m$ y el segundo término es 3.
- Para determinar con cuál operación se unirá el binomio (adición o diferencia), se observan las características de los signos de la expresión incial y se identifica que todos son positivos. Entonces, el binomio es de suma.
- Por lo tanto, se concluye que el producto notable es $(2m + 3)^3$.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve los binomios al cuadrado.

a. $(4x - 5y)^2$ b. $(3x + 2y)^2$
c. $(2x + 3y)^2$ d. $(-12v + 7z)^2$
e. $\left(\frac{1}{8}a - \frac{3}{4}b\right)^2$ f. $\left(\frac{4}{5}j - \frac{7}{8}a\right)^2$

3 Calcula los siguientes productos notables.

a. $(9 + 4m)^2$ b. $(x^{10} + 5y^2)^2$
c. $(2x + 3z)^2$ d. $(4m^5 + 5n^3)^2$
e. $\left(\frac{3}{6}w - \frac{1}{2}y\right)^2$ f. $\left(\frac{5}{7}a^2 + \frac{1}{8}n\right)^2$

4 Resuelve estos productos notables.

a. $(x - y)\cdot(x + y)$ b. $(2a - 1)\cdot(2a + 1)$
c. $(1 - 3ax)\cdot(1 + 3ax)$ d. $(a - b)\cdot(a + b)$
e. $(a - x)\cdot(a + x)$ f. $(m + n)\cdot(m - n)$
g. $\left(\frac{1}{4}m - \frac{2}{5}n\right)\cdot\left(\frac{1}{4}m - \frac{2}{5}n\right)$

5 Completa cada tabla de doble entrada, con los resultados de los productos notables correspondientes.

$\times$	$(2a + n)$
$(2a - n)$	
$(2a + n)$	

Tabla 3

$\times$	$(x + y)$
$(x + y)$	
$(x + y)^2$	

Tabla 4

6 Calcula el producto de las expresiones algebraicas.

a. $(x - 2)\cdot(x + 3)$
b. $(2a - 5)\cdot(2a + 6)$
c. $(a - 3b)\cdot(a + x)$
d. $(1 - a)\cdot(a + 1)$
e. $(3ab - 5x)\cdot(3ab + 2)$
f. $\left(\frac{1}{9}m + \frac{2}{7}n\right)\cdot\left(\frac{1}{9}m - \frac{1}{3}\right)$

7 Calcula el cubo de un binomio en cada caso.

a. $(a + 2)^3$ b. $(a - 4)^3$
c. $\left(m - \frac{2}{7}\right)^3$ d. $\left(m + \frac{5}{4}\right)^3$
e. $\left(\frac{2}{3} + x\right)^3$ f. $\left(n - \frac{2}{7}\right)^3$

Razonamiento

8 Relaciona cada producto notable con su respuesta.

a. $(a + 3)^3$ ( ) $\frac{4}{9}a^2 - \frac{28}{9}ab + \frac{49}{9}b^2$
b. $\left(\frac{7}{6}x + \frac{1}{2}m\right)^2$ ( ) $\frac{1}{4}m^2 + \frac{7}{6}mx + \frac{49}{36}x^2$
c. $\left(-\frac{2}{3}a + \frac{7}{3}b\right)^2$ ( ) $x^2 - y^2$
d. $(x + y)(x - y)$ ( ) $(m - n)(m + n)$
e. $m^2 - n^2$ ( ) $a^3 + 9a^2 + 27a + 27$

74

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer y calcular productos notables e identificar factores de expresiones algebraicas.

9 Explica el error que se cometió en el desarrollo de cada producto notable.

a. $(1 - 4ax)^3$
$= 1 - 3a^2x + 12ax^2 + 16a^3x^3$

b. $((x + y) + 1)((x - y) - 1)$
$= x^2 - y^2 - 2y + 1$

c. $(5x^3 + 6m^4)^2$
$= 25x^5 - 60x^3m^4 - 36m^8$

10 Determina, en cada caso, si la afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Explica tus respuestas.

a. Para hallar el cubo de un binomio, el primer y segundo término se elevan al cuadrado. ( )

b. En el cuadrado de un binomio, todos los términos se elevan al cuadrado. ( )

c. Al multiplicar la suma por la diferencia de un mismo binomio, su resultado es el primer término elevado al cuadrado, menos el segundo término elevado al cuadrado. ( )

d. El producto de la forma $(x + a)(x + b)$ es equivalente al cuadrado del término común más el producto de los no comunes. ( )

Comunicación

11 Explica con tus palabras cómo se desarrolla el siguiente producto notable.

$[(2x - 1)^2 - 1^2]$

12 Explica con tus palabras cómo se desarrolla el siguiente producto notable.

$(y - 1)^3 (y + 1)^3$

13 Explica con tus palabras cómo se desarrolla el siguiente producto notable.

$[(a + b)(a - b)][2 - (a + b)][2 + (a + b)]$

14 Indica el producto notable que aplica en cada caso.

a. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

b. $(v + w)(v - w) = v^2 - w^2$

c. $(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$

d. $(a + b)(a + c) = a^2 + ab + ac + bc$

15 Para cada una de las siguientes figuras obtén una expresión simplificada para el área, aplicando la teoría de los productos notables.

a.

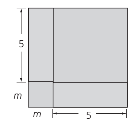


Figura 5

b.

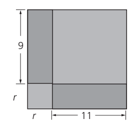


Figura 6

Resolución de problemas

16 Un apartaestudio de forma cuadrada mide $2x + 3y$ de lado, como se muestra en la Figura 7. ¿Cuál es el área total del apartaestudio?

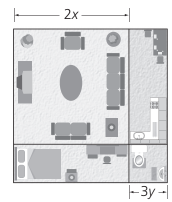


Figura 7

17 Un carpintero necesita hacer una puerta para una alacena en una cocina. Si se sabe que las medidas de la puerta son $(3x + 9)$ y $(3x - 9)$, respectivamente. ¿Cuál es el área de la puerta?

18 Miguel compró una nueva CPU para su computadora. Si cuenta con espacio de $100x^2 + 24x - 8$ y se sabe que las medidas de la CPU son $(10x + 3)$ y $(10x - 1)$, ¿podrá instalarla en este espacio?

19 Se requiere hallar el área de una tableta cuyas dimensiones son $(3x + 4)$ y $(3x + 1)$. ¿Cuál es la expresión que representa la superficie de la tableta?

20 El nuevo televisor de la compañía tiene las siguientes dimensiones: $\left(\frac{1}{2}x + 4\right)\left(\frac{1}{2}x - 8\right)$. ¿Cuál es el área que ocupa el televisor?

9. a. $1 - 12ax + 48a^2x^2 - 64a^3x^3$

b. $x^2 - y^2 - 2y - 1$

c. $25x^6 + 60x^3m^4 + 36m^8$

10. a. F b. F c. V d. F

Comunicación

11. Respuesta libre

12. Respuesta libre

Comunicación

13. Respuesta libre

14. a. Cubo de la suma de un binomio.

b. Suma por la diferencia de dos cantidades.

c. Cuadrado de la suma de dos cantidades.

d. Producto de la forma $(x + a)(x + b)$.

15. a. $(m + 5)^2$

b. $(r + 9)(r + 11)$

Resolución de problemas

16. $(2x+3y)^2$

17. $9x^2 - 81$

18. $(10x^2 + 20)(10x^2 - 4)$

19. $\frac{x^2}{4} - 2x - 5$

20. $\frac{x^2}{4} - 2x - 32$

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Para dividir dos monomios se halla el cociente de los coeficientes del dividendo y del divisor, aplicando la ley de los signos, y a la parte literal se le aplica la propiedad para dividir potencias de igual base.

El ancho del retrato se calcula efectuado una división de monomios

$$\frac{28\,x^3\,y^4\,z^3}{7\,x^2\,yz} = \frac{28}{7}\,x^{3-2}\,y^{4-1}\,z^{3-1} = \underbrace{4}_{\text{Cociente de coeficientes}}\,\underbrace{xy^3z^2}_{\text{Cociente de la parte literal}}$$

Para dividir expresiones algebraicas se aplican las propiedades de los exponentes

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Halla el cociente.

a. $(8a^3b^2) \div (2ab) =$

b. $(24x^3y^4z) \div (3x^2yz) =$

c. $(4x^5 + 8x^4 - 12\,x^3) \div (4x^2) =$

d. $(14x^2 - 3y^2) \div (x + y) =$

e. $(18xy^4 + 24x^2y^2 - 27x^4y) \div (3x) =$

f. $(x^3 + 6x^2 + 6x + 5) \div (x^2 + x + 1) =$

Bloque de Álgebra y funciones

6 División de polinomios

Explora

Raquel hizo un mantel rectangular cuya área se expresa como $4x^2$ y se sabe que el largo del rectángulo es $2x$.

- ¿Cuál es el ancho del mantel?

Ten en cuenta

Al realizar la división entre monomios, el coeficiente del cociente tiene el signo que corresponda según la regla de los signos.

+ por +	+
+ por –	–
– por +	–
– por –	+

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt03

Encuentra más ejemplos relacionados con el la división de polinomios.

Ten en cuenta

Las reglas de las potencias necesarias para operar con polinomios son:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

$(a \div b)^m = a^m \div b^m$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

6.1 División entre un monomio

Para hallar el ancho del mantel, se aplica la fórrmula del área del rectángulo y en esta se reemplazan los datos dados. Observa:

$$A = \text{largo} \cdot \text{ancho} \qquad 4x^2 = (2x) \cdot (\text{ancho})$$

Como se necesita hallar el ancho del mantel, se necesita dividir las dos cantidades conocidas. Entonces se obtiene esto:

$$\frac{4x^2}{2x} = 2x$$

Después, se simplifican las cantidades enteras y se restan los exponentes. Por lo tanto, el ancho del mantel es $2x$.

Para **dividir un polinomio por un monomio**, se divide cada término del polinomio entre el monomio. Se debe tener en cuenta que se deben simplificar las cantidades enteras y aplicar la ley de los cocientes para exponentes.

Ejemplo 1

Para dividir un monomio entre otro monomio, por ejemplo $\frac{40x^{10}}{5x^2}$, se realizan los siguientes pasos:

1. Se simplifican las cantidades enteras: $\frac{40x^{10}}{5x^2} = 8\frac{x^{10}}{x^4}$

2. Se aplica la ley de los cocientes para exponentes: $8x^{10-4=6}$

3. El resultado es $8x^6$.

Ejemplo 2

Observa cómo se divide un polinomio entre un monomio.

$$\frac{4x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8}{4x^2}$$

Se expresa cada término del polinomio, dividiéndolo por el monomio dado y teniendo en cuenta la regla de los exponentes, como se muestra a continuación:

$$\frac{4x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 8x^2}{4x^2} = \frac{4x^5}{4x^2} - \frac{6x^4}{4x^2} + \frac{12x^3}{4x^2} - \frac{8x^2}{4x^2}$$

$$= x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + 3x - 2$$

Por lo tanto, el cociente es $x^3 - \frac{3}{2}\,x^2 + 3x - 2$.

Ejemplo 3

Divide $8x^4 - 3x^3$ entre x^2.

Esta es otra forma de presentar la división, aun cuando se aplican los mismos pasos.

$$\begin{array}{rl|l} & 8x^4 - 3x^3 & x^2 \\ \cline{3-3} - & 8x^4 & 8x^2 + 3x \\ \cline{2-2} & -3x^3 & \\ \cline{2-2} & 3x^3 & \\ & 0 & \end{array}$$

Entonces, el resultado de la división es $8x^2 + 3x$.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular divisiones con términos algebraicos aplicando propiedades en R (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Haz las divisiones de polinomios entre monomios.

a. $\frac{20x^4 + 16x^3 + 8x^2}{4x^2}$ b. $\frac{35x^3 + 21x^2 + 7x}{7x}$

c. $\frac{9a^6b^5}{3ab^5}$ d. $\frac{8b - 12a^4b^3 - 6a^5b^2 + 10a}{2ab^2}$

Solución:

a. $\frac{20x^4}{4x^2} + \frac{16x^3}{4x^2} + \frac{8x^2}{4x^2} = 5x^2 + 4x + 2$

b. $\frac{35x^3}{7x} + \frac{21x^2}{7x} + \frac{7x}{7x} = 5x^2 + 4x + 1$

c. $3a^5$

d. $\frac{8b}{2ab^2} - \frac{12a^4b^3}{2ab^2} - \frac{6a^5b^2}{2ab^2} + \frac{10a}{2ab^2} = \frac{4}{ab} - 6a^3b - 3a^4 + \frac{5x^3}{b^2}$

Ten en cuenta

División de polinomios

Si el residuo de la división es cero, se llama exacta. De lo contrario, se afirma que es una división inexacta.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve las siguientes divisiones.

a. $\frac{x^7}{x^5}$ b. $\frac{6x^3y^2}{2y}$ c. $\frac{21x^2y^3}{7x^2y^2}$

d. $\frac{9a^2 - 6a}{3a}$ e. $\frac{10a^3 + 8}{2}$ f. $\frac{12a^2 + 8a + 24}{2}$

3 Relaciona las divisiones de la izquierda con los resultados de la derecha.

a. $\frac{a^2 - 6a + 4}{2a}$ $\frac{5x^4y^2 - 4xy^3 + 3y}{y^2}$

b. $\frac{6x^2 + 8x - 24}{2x}$ $b + \frac{1}{2} - \frac{4}{b}$

c. $\frac{10x^2y^2 - 8xy^3 + 6y}{2y^2}$ $3x^2 - 2x - 5$

d. $\frac{25a^3b + 15ab^3}{5ab}$ $\frac{1}{2}a^{-3} + \frac{2}{a}$

e. $\frac{2b^2 + b - 8}{2b}$ $3y^2 + 2y$

f. $\frac{15x^2 - 10x - 25}{5}$ $3x + 4 - \frac{12}{x}$

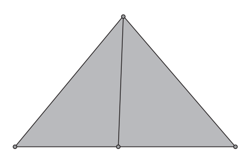
g. $\frac{9y^3 + 6y^2}{3y}$ $5a^2 + 3b^2$

Razonamiento

4 Si se divide un binomio entre un monomio, ¿es posible obtener un monomio como cociente? Justifica tu respuesta. Si la respuesta es afirmativa, propón un ejemplo.

Resolución de problemas

5 El área del triángulo es $2a^3 + 8a^2 + 3a + 12$. Si su base es igual a $4a^2 + 6$, ¿cuál es la altura del triángulo?



$4a^2 + 6$

Figura 1

6 El área del rectángulo es $5x^4 + 3x^3 + 17x^2 + 9x + 6$. Si la longitud de su base es igual a $5x^2 + 3x + 2$, ¿cuál es la altura del rectángulo?

$5x^2 + 3x + 3$

Figura 2

1. $\frac{4}{ab} - 6a^3b - 3a^4 + \frac{35x^3}{b^2}$

Ejercitación

2. a. x^2 b. $3x^3y$
c. $3y$ d. $3a - 2$
e. $5a^3 + 4$ f. $6a^2 + 4a + 12$

3. a. $\frac{1}{2}a - 3 + \frac{2}{a}$
b. $3x + 4 - \frac{12}{x}$
c. $5x^2 - 4xy + \frac{3}{y}$
d. $5a^2 + 3b^2$
e. $b + \frac{1}{2} - \frac{4}{b}$
f. $3x^2 - 2x - 5$
g. $3y^2 + 2y$

Razonamiento

4. Respuesta libre.

Resolución de problemas

5. $a + 4$

6. $x^2 + 3$

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

Recuerde a sus estudiantes las propiedades de la potenciación que se van a aplicar en la división de polinomios. También se sugiere recordarles el proceso de división entre números reales y la relación que hay entre los términos de una división. Aunque cada uno de esos casos presentados en el desarrollo del tema se puede representar con material concreto, se sugiere que en esta oportunidad se trabaje el tema en forma analítica desarrollando así, el pensamiento lógico matemático. Los dos primeros casos se resumen en la aplicación de las reglas de la potenciación para calcular los exponentes de la parte literal y en la división de reales para calcular los coeficientes. Para la división de dos polinomios aclárelesla importancia de organizar éste en forma descendente y de dejar los espacios de los términos que no se encuentren. Esto permitirá que los resultados se vayan obteniendo ordenadamente.

Actividades TIC

En el link:
www.sm.net/8smt013
Desarrolla los ejercicios de división de polinomios

Actividades colaborativas

Forme grupos de trabajo y propón que:

De acuerdo con la forma de cierto tipo de piscina, se ha establecido que si la expresión de su altura es x ÷ 2 la expresión de su volumen es: $x^3 - 2x^2 + 3x + 8$. ¿Cuál es el área de la base de la piscina?

Bloque de Álgebra y funciones

6 División de polinomios

Explora

Determina si es posible afirmar que al dividir $x^2 + 3x + 2$ entre $x + 2$, se obtiene como cociente $x + 1$.

Ten en cuenta

Los términos de una división son:

Dividendo	Divisor
Residuo	Cociente

En toda división de polinomios se cumple lo siguiente:

$P(x) = d(x) \cdot C(x) + R(x)$

$P(x)$: Polinomio dividendo
$d(x)$: Polinomio divisor
$C(x)$: Polinomio cociente
$R(x)$: Polinomio residuo

6.2 División entre polinomios

Una forma de comprobar si la afirmación es cierta, es multiplicando el cociente y el dividendo, como se muestra a continuación:

$$(x + 1) \cdot (x + 2) = x^2 + 3x + 2$$

Como se obtiene el mismo valor que el dividendo, se puede afirmar que es verdadera.

Otra forma de conocer la veracidad de la afirmación es haciendo la división así:

a. Se ordenan los términos del divisor y el dividendo, en potencias descendientes con respecto a una variable.
b. Se halla el primer término del cociente, dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor.
c. Se multiplica todo el divisor por el término del cociente que se halló en el paso anterior y se ubican los productos debajo de los respectivos términos del dividendo.
d. Se restan las cantidades.

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & + 3x & + 2 & x + 2 \\ \cline{4-4} -x^2 & - 2x & & x + 1 \\ \cline{1-3} 0 & + x & + 2 & \\ & - x & - 2 & \\ \cline{1-3} & & 0 & \end{array}$$

Ejemplo 4

La división $3y^2 + y^3 - 2y - 1$ entre $y^2 + 2y$, aplicando los pasos anteriores, es:

$$\begin{array}{rrrr|l} y^3 & + 3y^2 & - 2y & - 1 & y^2 + 2y \\ \cline{5-5} -y^3 & - 2y^2 & & & y + 1 \\ \cline{1-4} & + y^2 & - 2y & - 1 & \\ & - y^2 & - 2y & & \\ \cline{1-4} & & - 4y & - 1 & \end{array}$$

En esta división se tiene un residuo $-4y - 1$.

Ejemplo 5

Resuelve $(4x^3 - 13x^2 + 8x - 15) \div (4x^2 - x + 5)$.

$$\begin{array}{rrrr|l} 4x^3 & - 13x^2 & + 8x & - 15 & 4x^2 - x + 5 \\ \cline{5-5} -4x^3 & + x^2 & - 5x & & x - 3 \\ \cline{1-4} & - 12x^2 & + 3x & - 15 & \\ & 12x^2 & - 3x & + 15 & \\ \cline{1-4} & & & 0 & \end{array}$$

Actividad resuelta

Razonamiento

7 ¿Un ejemplo de división exacta es $(x^3 - 5x - 12) \div (x - 3)$?

Solución:

Para comprobar esta afirmación, se realiza la división así:

$$\frac{x^3 - 5x - 12}{x - 3} = x^2 + 3x + 4$$

Se obtiene como residuo la cantidad 0; por lo tanto, esta división es exacta.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular divisiones con números reales y con términos algebraicos aplicando propiedades en R (propiedad distributiva de la suma con respecto al producto).

Actividad resuelta

Razonamiento

8 Comprueba si esta división es correcta $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = x + 2$.

Solución:

Para comprobar si la división es correcta, se deben realizar estos pasos:

a. Multiplicar el polinomio cociente por el polinomio divisor. $(x + 2)(x - 1) =$

b. Al producto obtenido se le agrega el residuo de la división. En este caso es 0. $(x^2 + x - 2) + 0 =$ $x^2 + x - 2$

c. El resultado debe ser igual al dividendo. $x^2 + x - 2$ no es igual a $x^2 - 3x + 2$

Por lo tanto, la división no es correcta.

Ten en cuenta

En una división entre polinomios, el grado del polinomio divisor debe ser menor o igual que el grado del polinomio del dividendo.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

9 Resuelve las siguientes divisiones.

a. $(a^2 + 3a + 2) \div (a + 1)$

b. $(6x^2 + 16x + 8) \div (3x + 2)$

c. $(6a^2 + a - 2) \div (2a - 1)$

d. $(4x^2 - 36) \div (2x - 6)$

e. $(3y^5 + 2y^2 - 12y - 4) \div (y^2 - 2)$

f. $(y^2 - 11y + 28) \div (y - 4)$

g. $(x^4 - 1) \div (x - 1)$

h. $(4a^3 - 5a) \div (2a - 1)$

i. $(3y^3 + 18y^2 - 5y - 30) \div (y + 6)$

10 A continuación se muestran en desorden los pasos que se deben seguir a la hora de hacer divisiones entre polinomios. Ordénalos numerándolos de 1 a 4.

( ) Se restan las cantidades.

( ) Se halla el primer término del cociente, dividiendo el primer término del dividendo por el primer término del divisor.

( ) Se multiplica todo el divisor por el término del cociente hallado anteriormente y este producto se resta del dividendo.

( ) Se ordenan los términos del divisor y el dividendo en potencias descendientes con respecto a una variable.

Razonamiento

11 Comprueba las divisiones y, en caso de que estén erradas, corrígelas.

a.

$$\begin{array}{rl|l} & y^2 + 6y + 8 & y + 2 \\ \hline - & y^2 - 2y & y + 4 \\ \hline & 8y + 8 & \\ - & 8y - 16 & \\ \hline & -8 & \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{rl|l} & a^2 + 7a + 10 & a + 2 \\ \hline - & a^2 - 2a & a + 5 \\ \hline & 5a + 10 & \\ - & 5a - 10 & \\ \hline & -10a - 20 & \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{rl|l} & 6x^2 - 5x + 5 & 2x + 3 \\ \hline - & 6x^2 - 9x & 3x - 7 \\ \hline & -14x + 5 & \\ & -14x - 21 & \\ \hline & -28x - 16 & \end{array}$$

Resolución de problemas

12 Una caja con forma de prisma recto tiene un volumen representado por la ecuación $y^3 - y^2 + 4y - 4$. Considerando que el área de la base es $y^2 + 4$, resuelve.

a. Realiza un dibujo que represente la situación.

b. Calcula la expresión algebraica que representa la altura de la caja.

9. a. $a + 2$

b. $2x + 4$

c. $3a + 2$

d. $2x + 6$

e. $3y^3 + 6y + 2$

f. $y - 7$

g. $x^3 + x^2 + x + 1$

h. $2a^2 + a - 2$

i. $3y^2 - 5$

10. 4, 2, 3, 1

11. **a.** Está bien el resultado, la multiplicación de 4 por 2 es 8 no 16

b. Está bien el resultado, las restas dan 0.

c. Está bien el resultado, a las multiplicaciones por 7 se les debe cambiar los signos.

Resolución de problemas

12. a. $H = y - 1$

$V = y^3 - y^2 + 4y - 4$

$B = y^2 + 4$

b. $y - 1$

UNIDAD 2

Evaluación formativa

Nombre:..

Grado:................ **Fecha:**................

1. Clasifique cada polinomio, de acuerdo con el número de términos que posee.

A. $8ab + a^2 - 3b^2 =$

B. $15xy^2 + 24x^3y^4 =$

C. $120a^2b^3c =$

D. $2mn^2 + 6m^2n + 3m^3 + 8mn =$

E. $-56d^3c^5 =$

F. $-7x^2 + 3y^3 =$

2. Identifique el coeficiente, la parte literal y el grado de cada término algebraico.

A. $54n^3m^4 =$

B. $20a^2bc =$

C. $-34m^7n^6 =$

D. $-9d^3h^4 =$

3. Calcula el valor numérico para $x = -4$ de cada expresión algebraica.

$$-6x^2 + x - 13$$

4. Reduce los términos semejantes en cada polinomio.

A. $7x^2 - 10xy - 7 - 4x^2 - 9xy + 6 =$

B. $10x^2 + 5xy - 3 + 4x^2 - 7xy + 8 =$

5. Determine el resultado de la siguiente suma.

$$(4x^2yz + 3xy + 8x^3z^2) + (6xy - 2x^3z^2 + 6x^2yz)$$

6. Determine el resultado de la siguiente resta.

$$(18 - 19xy - y^2 + 5y^3) - (14y^3 - 6y^2 + 7xy - 19)$$

1. Clasifique cada polinomio, de acuerdo con el número de términos que posee.

A. $8ab + a^2 - 3b^2 =$ trinomio

B. $15xy^2 + 24x^3y^4 =$ binomio

C. $120a^2b^3c =$ monomio

D. $2mn^2 + 6m^2n + 3m^3 + 8mn =$ polinomio

E. $-56d^3c^5 =$ monomio

F. $-7x^2 + 3y^3 =$ binomio

2. Identifique el coeficiente, la parte literal y el grado de cada término algebraico.

A. $54n^3m^4 =$ Coeficiente 54, parte literal n^3m^4, grado 4 respecto a m

B. $20a^2bc =$ Coeficiente 20, parte literal a^2bc, grado 2 respecto a a

C. $-34m^7n^6 =$ Coeficiente –20, parte literal m^7n^6, grado 7 respecto a m

D. $-9d^3h^4 =$ Coeficiente –9, parte literal d^3h^4, grado 4 respecto a h

3. Calcule el valor numérico para $x = -4$ de cada expresión algebraica.

$$-6x^2 + x - 13 = -113$$

4. Reduce los términos semejantes en cada polinomio.

A. $7x^2 - 10xy - 7 - 4x^2 - 9xy + 6 =$ $3x^2$ -19xy-1

B. $10x^2 + 5xy - 3 + 4x^2 - 7xy + 8 =$ b. $14x^2 - 2xy + 5$

5. Determine el resultado de la siguiente suma.

$$(4x^2yz + 3xy + 8x^3z^2) + (6xy - 2x^3z^2 + 6x^2yz)$$

$$10x^2yz + 9xy + 6x^3z^2$$

6. Determine el resultado de la siguiente resta.

$$(18 - 19xy - y^2 + 5y^3) - (14y^3 - 6y^2 + 7xy - 19)$$

$$5y^3 - 7y^2 - 2xy - 1$$

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.°	N.° de aciertos	N.° de desaciertos	Refuerzo sí / no
Calcular expresiones numéricas y algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R.	**3**			
Definir y reconocer los elementos de un polinomio.	**1 y 2**			
Operar con polinomios en ejercicios numéricos y algebraicos.	**4, 5 y 6**			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Proponga a los estudiantes que representen algunos cocientes notables con la aplicación en base al problema propuesto en explora.

b. Después del trabajo con la división entre polinomios, haga notar que los dos términos que tienen la variable en segundo o tercer grado se reducen a uno solo, que corresponde a la suma o resta de ellos y que la aplicación del factoreo de binomios se simplifican con los denominadores de cada caso de generalización propuesta específicamente y un ejemplo de aplicación.

Actividades TIC

En el link:

http://www.cursosmatematicas.com/DEMO/ejecutable.swf

Descubre la información y utiliza esta herramienta para calcular cocientes notables y divisibilidad propuestos.

Actividades colaborativas

Pida a los estudiantes que en grupo identifiquen, interpreten y propongan acciones de comunicación en sus hogares sobre informaciones recibidas en redes sociales.

7 Cocientes notables

Explora

La aceleración en la caída de un paracaidista, a cierta altura, puede calcularse a partir de la siguiente expresión:

$$a = \frac{v^2 - 64}{v - 8}$$

En esta, a es la aceleración y v es la velocidad de la caída.

• ¿Cuál es la expresión relacionada con la aceleración?

Para resolver la situación, se divide la expresión $v^2 - 64$ entre $v - 8$. Observa:

$$\begin{array}{rrr|l} v^2 & & -\,64 & v - 8 \\ \hline -\,v^2 & +\,8v & & v + 8 \\ & +\,8v & -\,64 & \\ & -\,8v & +\,64 & \\ \hline & & 0 & \end{array}$$

Por lo tanto, $(v^2 - 8^2) \div (v - 8) = (v + 8)$.

Esta expresión cumple con una generalidad que se aplica a los cocientes que cumplen ciertas características. Este tipo de divisiones se conocen como **cocientes notables**.

7.1 Generalidades de los cocientes notables

• Cuando se aplica el cociente de la suma o la diferencia de cuadrados entre la suma o la diferencia de sus raíces cuadradas, se cumple que:

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b \qquad \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

Ejemplo 1

Halla el siguiente cociente:

$$\frac{1 - m^4}{1 + m^2}$$

Aplicando la relación, la diferencia de los cuadrados de dos cantidades dividida por la suma de las cantidades es igual a la resta del binomio de las cantidades. Entonces, el resultado es $1 - m^2$.

Ejemplo 2

Resuelve $\frac{(x + y)^2 - z^2}{(x + y) - z}$.

Para este caso, como ambos binomios presentan una diferencia, entonces tenemos que el resultado de la división es $(x + y) + z$.

• Cuando se aplica el cociente de la suma de los cubos de dos cantidades entre la suma de sus raíces cúbicas, se cumple que:

$$\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$$

• Al aplicar el cociente de la diferencia de los cubos de dos cantidades entre la diferencia de sus raíces cúbicas, se cumple que:

$$\frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2$$

Ejemplo 3

Divide $\frac{64n^3 + m^3}{4n + m}$ y $\frac{64n^3 - m^3}{4n - m}$.

Aplicando la regla, obtenemos:

• $(4n)^2 - 4n(m) + m^2 = 16n^2 - 4nm + m^2$

• $(4n)^2 + 4n(m) + m^2 = 16n^2 - 4nm + m^2$

Ten en cuenta

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(2a + b)^2 = (b + 2a)^2$

$(2a - b)^2 = (b - 2a)^2$

Destreza con criterios de desempeño: Calcular expresiones algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R.

Ejemplo 4

Observa el resultado $x^2 + xy + y^2$. Este pertenece al cociente $\frac{x^3 - y^3}{x - y}$, ya que la diferencia de los cubos de dos términos, dividido por la diferencia de esta, es igual al primer término elevado al cuadrado, más el primer por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

- Cociente de la suma o diferencia de potencias iguales de dos cantidades entre la suma o diferencia de las cantidades.

Para los cocientes $\frac{a^n \pm b^n}{a \pm b}$, se tiene lo siguiente:

a. El polinomio $a^n - b^n$ es divisible entre el binomio $a - b$ para los valores pares o impares de n. Así: $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}$.

b. El polinomio $a^n - b^n$ es divisible entre el binomio $a + b$ para los valores pares de n. Observa: $\frac{a^n - b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + ab^{n-2} - b^{n-1}$.

c. El polinomio $a^n + b^n$ es divisible entre el binomio $a + b$ para los valores impares de n. Así: $\frac{a^n + b^n}{a + b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + ab^{n-2} - b^{n-1}$.

Ejemplo 5

Al establecer el cociente de $\frac{x^5 - y^5}{x - y}$, se debe tener en cuenta que todos los signos del cociente son positivos (+) y que el polinomio cociente es:

$$x^4 + x^3y^1 + x^2y^2 + x^1y^3 + y^4.$$

Ejemplo 6

Al hallar el cociente de $\frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2}$, se debe considerar que, en este caso, los términos del cociente tienen signos alternos empezando por el signo positivo. Por lo tanto:

$$\frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2} = x^4 - x^2y^2 + y^4$$

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Resuelve los cocientes notables que se presentan a continuación.

a. $\frac{x^{15} + y^{15}}{x^3 + y^3}$ b. $\frac{x^{15} + y^{15}}{x^5 + y^5}$ c. $\frac{x^{12} - y^{12}}{x^4 - y^4}$

Solución:

a. $x^{12} - x^9y^3 + x^6y^6 - x^3y^9 + y^{12}$

b. $x^{10} - x^5y^5 + y^{10}$

c. $x^8 + x^4y^4 + y^8$

Ten en cuenta

Productos notables

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

CULTURA del Buen Vivir

La comunicación

Existen muchas y variadas formas de comunicación, por ello es muy importante, aprender a interpretar los símbolos e ideas y a razonar con respecto al mensaje que nos están transmitiendo.

- Piensa en el tipo de información que recibes a diario y la manera en la que influyen en tu manera de pensar y actuar.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Encuentre los cocientes notables por simple inspección.

$\frac{(a^3 - b^3)}{a - b} =$	
$\frac{(a^3 + b^3)}{a + b} =$	
$\frac{(a^5 - b^5)}{a - b} =$	
$\frac{(a^5 + b^5)}{a + b} =$	
$\frac{(a^2 - b^2)}{a + b} =$	
$\frac{(a^2 - b^2)}{a - b} =$	
$\frac{16 - b^2}{4 - b} =$	
$\frac{16 + b^2}{4 - b} =$	
$\frac{(a^5 - 3^2)}{a - 2} =$	
$\frac{(a^3 + 1)}{a + 1} =$	
$\frac{(a^3 + 8b^3)}{a + 2b} =$	
$\frac{x^2 - 100}{x + 10} =$	
$\frac{a^5 + 1}{a + 1} =$	

2. a. $1 - n^2$

b. $3 + x^2$

d $5 + 6x^2$

c. $x^2 - x + 1$

e. $x - y$

f. $y - x$

3. a. $x^4 - x^2y^2 + y^4$

b. $x^8 - x^6y^2 + x^4y^4 - x^2y^6 + y^8$

c. $x^2 + y^2$

d. $x^6 - x^3y^2 + y^6$

e. $x^9 - y^9$

f. $1 - a + a^2$

Comunicación

4. a. Respuesta libre

b. Respuesta libre

c. Respuesta libre

5. a. Cociente de la suma de los cubos de dos cantidades entre la suma de sus raíces.

b. Cociente de la suma de las potencias iguales de dos cantidades entre la suma de las cantidades.

c. Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la suma de sus raíces.

d. Cociente de la diferencia de las potencias iguales de dos cantidades entre la diferencia de sus raíces.

e. Cociente de la suma de los cubos de dos cantidades entre la suma de sus raíces.

6.

$\frac{y^4+16}{y+2}$	=	$y^3 - 2y^2 + 4y - 8$
$x^2 + 4x + 16$	=	$\frac{x^3 - 4}{x - 4}$
$\frac{9a^2-9}{3a - 3}$	=	$3a + 3$

7. a. $a^2 - 2a + 4$

b. $m^3 + m^2n + mn^2 + n^3$

c. $36 - 6r + r^2$

d. $8 + s$

e. $p^5 + p^4q + p^3q^2 + p^2q^3 + pq^4 + q^5$

f. $b^4 - 3b^3 + 9b^2 - 27b + 81$

Razonamiento

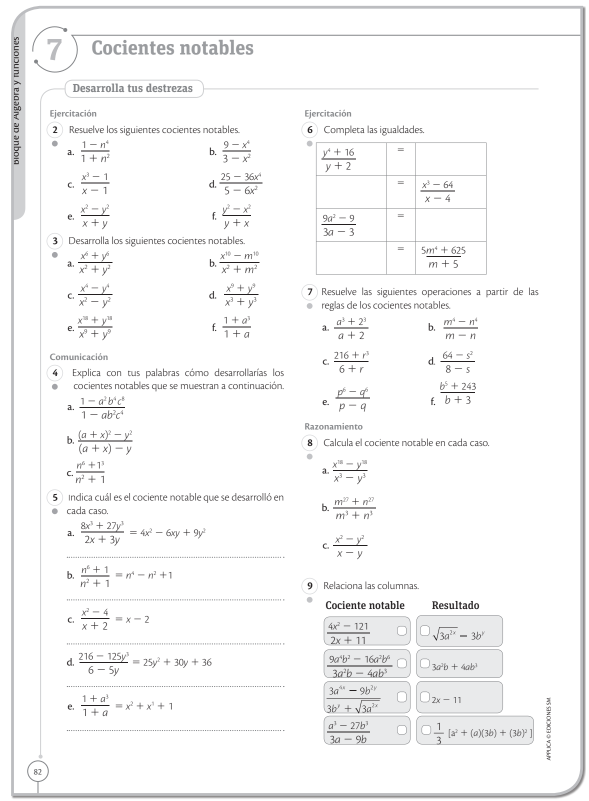
8. a. $x^{15} + x^{12}y^3 + x^9y^6 + x^6y^9 + x^3y^{12} + y^{15}$

b. $m^{24} - m^{21}y^3 + m^{18}y^6 - m^{15}y^9 + m^{12}y^{12} - m^9y^{15} + m^6y^{18} - m^3y^{21} + y^{24}$

c. $x + y$

9.

Cociente notable	Resultado
$\frac{4x^2 - 121}{2x + 11}$	$2x + 11$
$\frac{9a^4b^2 - 16a^2b^6}{3a^2 - 4ab^3}$	$3a^2b + 4ab^3$
$\frac{3a^{4x} - 9b^{2y}}{3b^y + \sqrt{3a^{2x}}}$	$\frac{3a^{4x} - 9b^{2y}}{\sqrt{3a^{2x}} + 3b^y}$
$\frac{a^3 - 27b^3}{3a - 9}$	$\frac{1}{3}[a^2 + (a)(3b) + (3b)^2]$


Bloque de Álgebra y funciones

7 Cocientes notables

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve los siguientes cocientes notables.

a. $\frac{1-n^4}{1+n^2}$ b. $\frac{9-x^4}{3-x^2}$

c. $\frac{x^3-1}{x-1}$ d. $\frac{25-36x^4}{5-6x^2}$

e. $\frac{x^2-y^2}{x+y}$ f. $\frac{y^2-x^2}{y+x}$

3 Desarrolla los siguientes cocientes notables.

a. $\frac{x^6+y^6}{x^2+y^2}$ b. $\frac{x^{10}-m^{10}}{x^2+m^2}$

c. $\frac{x^4-y^4}{x^2-y^2}$ d. $\frac{x^9+y^9}{x^3+y^3}$

e. $\frac{x^{18}+y^{18}}{x^9+y^9}$ f. $\frac{1+a^3}{1+a}$

Comunicación

4 Explica con tus palabras cómo desarrollarías los cocientes notables que se muestran a continuación.

a. $\frac{1-a^2b^4c^8}{1-ab^2c^4}$

b. $\frac{(a+x)^2-y^2}{(a+x)-y}$

c. $\frac{n^6+1^3}{n^2+1}$

5 Indica cuál es el cociente notable que se desarrolló en cada caso.

a. $\frac{8x^3+27y^3}{2x+3y} = 4x^2 - 6xy + 9y^2$

b. $\frac{n^6+1}{n^2+1} = n^4 - n^2 + 1$

c. $\frac{x^2-4}{x+2} = x - 2$

d. $\frac{216-125y^3}{6-5y} = 25y^2 + 30y + 36$

e. $\frac{1+a^3}{1+a} = x^2 + x^1 + 1$

Ejercitación

6 Completa las igualdades.

$\frac{y^4+16}{y+2}$	=	
	=	$\frac{x^3-64}{x-4}$
$\frac{9a^2-9}{3a-3}$	=	
	=	$\frac{5m^4+625}{m+5}$

7 Resuelve las siguientes operaciones a partir de las reglas de los cocientes notables.

a. $\frac{a^3+2^3}{a+2}$ b. $\frac{m^4-n^4}{m-n}$

c. $\frac{216+r^3}{6+r}$ d. $\frac{64-s^2}{8-s}$

e. $\frac{p^6-q^6}{p-q}$ f. $\frac{b^5+243}{b+3}$

Razonamiento

8 Calcula el cociente notable en cada caso.

a. $\frac{x^{18}-y^{18}}{x^3-y^3}$

b. $\frac{m^{27}+n^{27}}{m^3+n^3}$

c. $\frac{x^2-y^2}{x-y}$

9 Relaciona las columnas.

Cociente notable	Resultado
$\frac{4x^2-121}{2x+11}$	$\sqrt{3a^{2x}} - 3b^y$
$\frac{9a^4b^2-16a^2b^6}{3a^2b-4ab^3}$	$3a^2b + 4ab^3$
$\frac{3a^{4x}-9b^{2y}}{3b^y+\sqrt{3a^{2x}}}$	$2x - 11$
$\frac{a^3-27b^3}{3a-9b}$	$\frac{1}{3}[a^2 + (a)(3b) + (3b)^2]$

82

APPLICA © EDICIONES SM

Destreza con criterios de desempeño: Calcular expresiones algebraicas usando las operaciones básicas y las propiedades algebraicas en R.

10 Completa los cocientes con los correspondientes exponentes de las potencias.

a. $\dfrac{a^{\square} - b^{\square}}{a - b}$ b. $\dfrac{x^{\square} + y^{\square}}{x + y}$

c. $\dfrac{r^{\square} + s^{\square}}{r + s}$ d. $\dfrac{m^{\square} - n^{\square}}{m - n}$

11 Completa la tabla.

Cocientes notables	Cociente
$\dfrac{m^5 + n^5}{m + n}$	
	$a^4 + a^3n + a^2n^2 + an^3 + n^4$
$\dfrac{x^6 - y^6}{x - y}$	$x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5$
$\dfrac{64a^3 + 343}{4a + 7}$	
	$36 - 30y + 25y^2$
$\dfrac{8a^3 - 1}{2a - 1}$	
$\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$	

Tabla 1

Comunicación

12 Escribe el literal que le corresponde a cada ejemplo según la descripción.

☐ $\dfrac{27x^6 + 1}{3x^2 + 1}$ ☐ $\dfrac{1 - v^{12}}{1 - v^4}$

☐ $\dfrac{m^3 - 1}{1 + m}$ ☐ $\dfrac{1 - z^8}{1 - z^4}$

Cocientes notables
a. Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la suma de las cantidades.
b. Cociente de la diferencia de los cuadrados de dos cantidades entre la diferencia de las cantidades.
c. Cociente de la suma de los cubos de dos cantidades entre la suma de las cantidades.
d. Cociente de la diferencia de los cubos de dos cantidades entre la diferencia de las cantidades.

13 Explica el error que se cometió en el desarrollo de cada producto notable.

a. $\dfrac{x^{15} + y^{15}}{x^3 + y^3}$
$= x^{12} - y^{12}x^9 + y^6x^6 - y^9x^3 + y^{12}$

b. $\dfrac{x^4 + 1}{1 + x^2}$
$= x^2 + 1$

c. $\dfrac{8m^3 + n^6}{2m + n^2}$
$= 4m^2 + 2mn^2 + n^4$

d. $\dfrac{9 - x^4}{3 - x^2}$
$= 3 + x^3$

e. $\dfrac{a^8 - b^8}{a + b}$
$= a^7 + a^6b + a^5b^2 + a^4b^3 + a^3b^4 + a^2b^5 + ab^6 + b^7$

14 Relaciona cada personaje con el hecho histórico que le corresponde.

a. François Viète $\dfrac{9 - n^4}{3 - n^2}$ b. John Napier $\dfrac{1 + m^3}{1 + m}$

c. Pierre Fermat $\dfrac{8m^3 - 1}{2m - 1}$ d. Arquímedes $\dfrac{m^2 - n^2}{m - n}$

☐ Fundamentó la hidrostática.	$m + n$
☐ Enunció la fórmula para las ecuaciones de sexto grado.	$3 + n^2$
☐ Introdujo el punto decimal para separar las cifras decimales de los números enteros.	$1 - m - m^2$
☐ Fue llamado "el primer cerebro del mundo" por Pascal.	$4m^2 - 2m + 1$

Resolución de problemas PAI

15 En física, la velocidad V se define como la distancia d recorrida por un móvil en la unidad de tiempo t. Así, $V = \dfrac{d}{t}$.

• Si un auto recorre una distancia $d = x^7 - y^7$ en un tiempo $t = x - y$, ¿cuál es la expresión algebraica para su velocidad?

10. a. $a^2 - b^2$ b. $x^3 + y^3$
c. $r^2 + s^2$ d. $m^4 - n^4$

11.

Cocientes notables	cociente
$\dfrac{m^5 + n^5}{2x + 11}$	$m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4$
$\dfrac{a^5 + n^5}{a - n}$	$a^4 + a^3n + a^2n^2 + an^3 + n^4$
$\dfrac{x^6 - y^6}{x - y}$	$x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5$
$\dfrac{64a^3 + 343}{4a + 7}$	$16a^2 - 28a + 49$
$\dfrac{2\,16 + 125y^3}{6+5y}$	$36 - 30y + 25y^2$
$\dfrac{8a^3 - 1}{2a - 1}$	$4a^2 + 2a + 1$
$\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$	$x^2 + x + 1$

12. c, d, a, b.

13. a. $x^{12} - x^9y^3 + x^6y^6 - x^3y^9 + y^{12}$
b. $x^2 - 1$
c. $4m^2 - 2mn^2 + n^4$
d. $3 + x^2$
e. $a^7 - a^6b + a^5b^2 - a^4b^3 + a^3b^4 - a^2b^5 + ab^6 - b^7$

14. d, a, b, c.

15. $x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6$

UNIDAD 2

Evaluación sumativa

Nombre:..

Grado:................. **Fecha:**.................

1. La expresión algebraica que muestra el área de un rectángulo cuya base es 3 unidades mayor que su altura es:

A. $x^2 + 3x$

B. $3x^2 + x$

C. $3x + 6$

D. $x + 6$

2. En una librería se venden a $4,5 la caja de pinturas y a$0,60 los cuadernos, si con x representas las cajas de pinturas y con y los cuadernos, la expresión que muestra lo que debemos pagar por 4 cajas de pinturas y 10 cuadernos es:

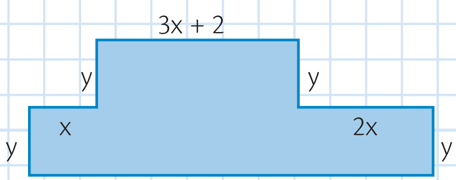
A. $49x + 30y$

B. $18x + 6y$

C. $9x + 3y$

D. $8x + 50y$

3. La expresión que representa el perímetro de la figura es:



A. $6x + 2y + 6$

B. $6x + 4y + 2$

C. $12x + 4y + 4$

D. $8x + 8y + 10$

4. La expresión que representa el área de un rectángulo cuya base es el doble de su ancho disminuido en 4 es:

A. $x^2 + 4x$

B. $4x^2 + x$

C. $x^2 + 4x$

D. $2x^2 + 4x$

5. Un auto recorre cuatro distancias: $4ab - 3bc + 4cp$, luego $2bc + 2cp - 3pq$, luego $4bc - 3ab + 3pq$ y por último $ab - bc - 6cp$, la distancia total recorrida por el auto corresponde a la expresión:

A. $3ab - 2bc + cp - 6pq$

B. $ab - 2bc + 2cp$

C. $4ab - bc$

D. $2ab$

6. Si un lado de un rectángulo se representa con el polinomio $4a - 3b$ y el otro lado con el polinomio $5b - 2a$, la expresión que representa su área es:

A. $10a^2 - 21ab + b^2$

B. $5a^2 - 9ab + 6b^2$

C. $20a^2 + 23ab + b^2$

D. $20a^2 - 23ab + 6b^2$

7. La expresión que sumada a $w^3 - w^2 + 5$ me da $3w - 6$ es:

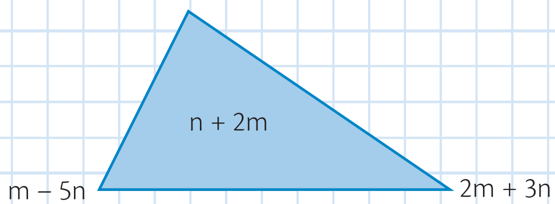
A. $-w^3 + w^2 + 3w - 11$

B. $2w^2 - 3w + 5$

C. $3w + 11$

D. $-2w$

8. La expresión que corresponde al área de la figura es:



A. $6m^2 + mn - n^2$

B. $2m^2 + 3mn - 2n^2$

C. $6m^2 - mn - 2n^2$

D. $6m^2 + mn - y^2$

9. La expresión que corresponde al área de una figura rectangular es $y^2 - 11y + 30$, si se conoce que uno de sus lados es $y - 6$, el otro lado es:

A. $y - 5$

B. $y + 3$

C. $y - 4$

D. $y + 1$

10. Si el área de un rectángulo es $4m2 - n^2r^4$ y uno de sus lados es $2m - nr^2$, entonces el segundo lado es:

A. $m^2 + n^2r^2$

B. $2m + nr^2$

C. $m - nr$

D. $2m - nr$

UNIDAD 3 Evaluación diagnóstica

Nombre:..

Grado:................ Fecha:................

1. El resultado de $(a + 4)^2$ es:

   A. $a^2 + 8a + 16$

   B. $a^2 - 8a + 16$

   C. $a^2 + 8a - 16$

   D. $a^2 - 8a - 16$

2. El resultado de $(n - 5)^3$ es:

   A. $n^3 + 15n^2 + 75n + 125$

   B. $n^3 - 15n^2 - 75n - 125$

   C. $n^3 + 15n^2 + 75n - 125$

   D. $n^3 - 15n^2 + 75n - 125$

3. El resultado de $(a + 10)^2$ es:

   A. $n^2 + 20n + 100$

   B. $n^2 - 20n - 100$

   C. $n^2 - 20n + 100$

   D. $n^2 + 20n - 100$

4. El resultado de $(n - 1)(n - 5)$

   A. $n^2 + 7n + 5$

   B. $n^2 - 6n + 5$

   C. $n^2 - 4n - 5$

   D. $n^2 + 7n - 5$

5. El resultado de $(n - 1)(n + 1)$

   A. $n^2 - 1$

   B. $n^2 - 2$

   C. $n^2 + 1$

   D. $n^2 + 2$

6. El resultado de $(n - 5)(n + 3)$

   A. $n^2 + 2n + 15$

   B. $n^2 - 2n + 15$

   C. $n^2 - 2n - 15$

   D. $n^2 + 2n - 15$

7. Si el área de un cuadrado es $1 - \frac{2f}{3} + \frac{f^2}{9}$, entonces el lado es:

   A. $1 - \frac{f}{9}$

   B. $\frac{f}{9} - 1$

   C. $\frac{1}{3} + f$

   D. $1 - \frac{f}{3}$

8. El polinomio cociente y el residuo de la división $(n^2 - 4n + 5) : (n - 3)$ es:

   A. $n + 1$ y 2

   B. $n - 1$ y 2

   C. $n + 2$ y 1

   D. $n - 2$ y 1

9. El polinomio cociente de la división $(n^2 - 4n + 4) : (n - 2)$ es:

   A. $n - 2$

   B. $n + 2$

   C. $n + 4$

   D. $n - 4$

Propósito de la unidad

Bloque de álgebra y funciones

El bloque de factorización y ecuaciones incluye el uso de formas y generalizaciones expresadas en los productos y cocientes notables, así como, de igualdades y desigualdades para denotar incógnitas junto con las operaciones entre conjuntos de números, lo cual ha permitido desarrollar conceptos, demostrar relaciones, propiedades geométricas y algebraicas.

Gracias al desarrollo del lenguaje algebraico, hoy en día es posible comunicar ideas y conceptos universales, expresando las propiedades de algunos de los conjuntos numéricos vistos.

El aprendizaje significativo requiere de la participación activa del sujeto que aprende, guiado por los docentes que planifican, diseñan, implementan, orientan, coordinan y evalúan. Esa participación de nuestros estudiantes es activa, no sólo en cuanto a lo manifiesto (graficar, discutir, preguntar, exponer, dialogar, argumentar, criticar...) sino también en cuanto a las conductas interiorizadas (las cognitivas): comparar, diferenciar, relacionar, analizar, sintetizar, calcular, estimar, definir, explicar, deducir, inferir, concluir, demostrar.

Tampoco se pueden resolver problemas sin el dominio hábil de los procedimientos de cálculo, pero de éstos, los estudiantes deben conocer también las relaciones entre ellos y sus propiedades, y comprender los fundamentos de las reglas de factorización y propiedades de las igualdades y ecuaciones que están utilizando.

Evaluaciones

Diagnóstica

La evaluación diagnóstica, además de ayudar a generar en los y las estudiantes curiosidad acerca de los temas que se estudiarán, permite anticipar o predecir los conceptos en los que se puede encontrar alguna dificultad. En este caso, los resultados le servirán al docente para planear las clases y proponer la metodología más conveniente para el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para iniciar la unidad se hace necesario el manejo de las reglas de productos y cocientes notables, ya que al factorizar expresiones algebraicas binómicas, trinómicas y polinomias, los estudiantes deben dominar estas destrezas encontrando los factores de expresiones algebraicas.

Además, se necesita que recuerden la representación del lenguaje algebraico de las igualdades para resolver ecuaciones lineales.

Formativa

Es muy importante que analice los avances o las dificultades que tuvieron los estudiantes al desarrollar cada actividad. Qué aprendizajes nuevos tuvieron. Esto además de darle pistas del desarrollo de los y las estudiantes, le permitirá motivar procesos de metacognición muy valiosos para el aprendizaje.

La evaluación formativa contempla una serie de ejercicios y problemas que permitan verificar si desarrollaron las destrezas planteadas como: reconocer, calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Sumativa

La función principal de esta evaluación es identificar lo que los estudiantes aprendieron durante el desarrollo de la unidad correspondiente. Esto, además de permitir analizar cuáles son las dificultades y las fortalezas del proceso de enseñanza–aprendizaje, servirá como evidencia de que alcanzaron los logros de aprendizaje que permitirán desarrollar con fluidez los conceptos de la unidad siguiente

Se presentan una serie de problemas que permiten evaluar los logros alcanzados al inicio de la unidad y los posteriores como: resolver problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números reales y el planteamiento y resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnita.

Utilizar las distintas notaciones para los intervalos y su representación gráfica, resuelve ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita en R.

Respuestas

Evaluación diagnóstica

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D

Esquema conceptual

Conocimientos de la unidad

- Bloque de álgebra y funciones
  - Factorización y ecuaciones
    - Factorización de polinomios. Factor común
    - Factores primos
    - Máximo común divisor
    - Mínimo común múltiplo
    - Factor común de un polinomio
  - Factorización de la diferencia de cuadrados perfectos
  - Factorización por agrupación de términos
  - Factorización de cubos perfectos. Suma y diferencia
    - Factorización de la suma de cubos perfectos
  - Factorización de trinomios cuadrados perfectos
  - Factorización de trinomios cuadrados perfectos por adición y sustracción
  - Factorización de trinomios de la forma $x^2n + bxn + c$

Cultura del Buen Vivir

■ Valor: La confianza

La confianza implica seguridad en que los resultados de una situación o conducta será favorable a nivel personal o grupal.

- Factorización de expresiones de la forma xn+ yn
- Factorización de trinomios de la forma $ax^2n + bxn + c$
- Factorización aplicando la regla de Ruffini
- Ecuaciones
  - Igualdades y ecuaciones
  - Ecuaciones equivalentes
- Problemas con ecuaciones de primer grado con una incógnita
  - Lenguaje verbal y lenguaje algebraico
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita
  - Resolución de ecuaciones de primer grado con una Incógnita
  - Ecuaciones de primer grado con la incógnita en más de un término
  - Ecuaciones de primer grado con paréntesis
  - Ecuaciones de primer grado con denominadores
- Inecuaciones de primer grado con una incógnita
- Problemas con inecuaciones de primer grado con una incógnita

Compromiso a lograr

Mediante el desarrollo de la unidad se valorará la importancia de la factorización de expresiones algebraicas que les permita a los estudiantes aplicar las leyes de la factorización en la solución de problemas y la elaboración de argumentos lógicos y las propiedades algebraicas de las operaciones en R y expresiones algebraicas, para afrontar inecuaciones y ecuaciones con soluciones de diferentes campos numéricos, y resolver problemas de la vida real, seleccionando la forma de cálculo apropiada e interpretando y juzgando las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema; analiza la necesidad del uso de la tecnología.

Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica	
Unidad 2: factorización y ecuaciones	
Objetivos generales del área	**Objetivos del área por subnivel**
OG.M.1. – OG.M.6.	O.M.4.2.
Objetivos de subnivel	**Valores**
OI.4.1. – OI.4.12.	• La confianza (I.2.),
Criterios de evaluación	**Indicadores de evaluación**
CE.M.4.2.	I.M.4.2.1. – I.M.4.2.2. – I.M.4.2.4
Objetivos de la unidad	
• Reconocer, calcular e identificar factores de expresiones algebraicas. • Resolver ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita en R • Resolver problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales y el planteamiento y resolución de ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita.	

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Álgebra y funciones	• Reconocer, calcular e identificar factores de expresiones algebraicas. • Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q en la solución de problemas sencillos. • Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en R en la solución de problemas sencillos.	• Para comenzar el tema de factorización explíqueles qué es un número primo y qué es un número compuesto. • Luego indique que un polinomio se factoriza cuando se expresa como un producto de otros polinomios. • Muestre cómo se obtienen ecuaciones equivalentes en el despeje de variables o incógnitas y cómo se aplican las propiedades y reglas correspondientes. • Comience recordándoles a los estudiantes el concepto de ecuación lineal: es una igualdad donde aparece a menos una variable y el exponente de la misma es 1. Diga que usualmente los problemas matemáticos se resuelven planteando una ecuación. De ahí la importancia de expresar adecuadamente los enunciados en lenguaje algebraico.	• Reconoce, calcula e identifica factores de expresiones algebraicas. • Resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales y el planteamiento y resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita.	**Actividad:** resuelve problemas que conducen a la solución de ecuaciones e inecuaciones lineales.

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Álgebra y funciones	• Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. • Resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita en Q de manera algebraica. • Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren inecuaciones de primer grado con una incógnita en Q e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.	• Los estudiantes han venido realizando la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico en el transcurro de los temas presentados, mediante enunciados sencillos. En este tema escribirán enunciados que requieren un nivel más complejo. • Explique qué es una inecuación y acláreles que la solución de una inecuación es un subconjunto de los números reales, el cual se expresa utilizando el signo mayor que o menor que. Es importante que los estudiantes tengan en cuenta que esos signos deben cumplirse en orden estricto, Cuente a los estudiantes que muchas de las situaciones cotidianas se pueden representar con inecuaciones lineales. Presente varios ejemplos e indique la importancia de dominar la traducción de expresiones comunes al lenguaje algebraico.	• Resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales y el planteamiento y resolución de inecuaciones de primer grado con una incógnita. • Utiliza las distintas notaciones para los intervalos y su representación gráfica, resuelve ecuaciones e inecuaciones de primer grado con una incógnita en R.	**Técnica:** observación. **Instrumento:** registro descriptivo. **Libro del estudiante:** evaluación de la unidad

Recursos: Materiales del medio, Tic, Texto Guía, Cuaderno de trabajo.

Bibliografía: Mason, J., Burton, L. (1992), Stacey Pensar matemáticamente Madrid: Ediciones/Labor.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Factorización por factor común

El factor común de los términos de un polinomio es el producto del máximo común divisor de los coeficientes por el máximo común divisor de las partes literales.

El factor común de $4x^2 + 2x$ es:

Mayor divisor común de 4 y 2 $\quad 2x \quad$ Mayor divisor común de x^2 y x.

El polinomio se puede escribir así: $4x^2 + 2x = 2x\,(2x + 1)$ cociente de dividir $4x^2 + 2x$ para 2x.

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Para comenzar el tema de factorización explíqueles qué es un número primo y qué es un número compuesto. Deje claro que un número se puede expresar como producto de sus factores primos. Luego indique que un polinomio se factoriza cuando se expresa como un producto de otros polinomios.

b. Luego del trabajo con las fichas algebraicas, explique cuándo un polinomio es primo y cuándo es compuesto. Mencione cómo hallar el factor común de un polinomio y acláreles que este puede ser un monomio u otro polinomio, como se muestra en el ejemplo que se desarrolla en la página.

c. Se debe tomar en cuenta que en algunos casos tenemos factor común polinomios, como también, factor común con exponentes literales. Se procede igual que en los ejercicios anteriores.

Bloque de Álgebra y funciones

1 Factorización de polinomios. Factor común

Explora

Isabela dibujó en su cuaderno un rectángulo cuya superficie mide doce centímetros cuadrados.

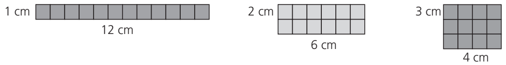
- ¿Cuáles podrían ser las medidas de los lados del rectángulo que dibujó Isabela en su cuaderno?

Para calcular las dimensiones del rectángulo que dibujó Isabela, se debe factorizar el número 12. Es decir, se debe escribir el número 12 como el producto de otros números.

Entonces, se buscan los factores de 12 y se expresa el número como producto de ellos. De esta forma se obtiene que:

$12 = 1 \times 12$ $\qquad$ $12 = 2 \times 6$ $\qquad$ $12 = 3 \times 4$

Por lo tanto, el rectángulo que dibujó Isabela puede tener estas dimensiones: 1 cm y 12 cm; 2 cm y 6 cm; 3 cm y 4 cm.



Factorizar un número consiste en expresarlo como producto de sus factores.

1.1 Factores primos

Al considerar un grupo de factores del número 12, como el 2 y el 6, se tiene que el primero es primo, pero el segundo no. Sin embargo, el 6 a su vez se puede expresar como el producto entre 2 y 3, que sí son números primos. Por lo tanto:

$$\underset{\text{número}}{12} = \underbrace{2 \times 2 \times 3}_{\text{factores primos}} = \underbrace{2^2 \times 3}_{\text{expresión corta}}.$$

Ten en cuenta

Un número es primo cuando tiene solo dos divisores: la unidad y sí mismo.

La expresión de un número como producto de sus factores primos se llama **descomposición en factores primos.**

Al calcular los **factores primos** de un número, se debe comenzar por los factores menores. Después de seleccionar el menor de los factores primos, se divide el número entre este. Luego, se divide el cociente obtenido por otro factor primo y se repite el procedimiento hasta que el cociente sea 1.

Entonces, el número es igual al producto de los factores primos entre los que se dividió.

Ejemplo 1

La descomposición del número 90 en sus factores primos se hace de esta manera:

División	Factores	Descomposición
$90 \div 2 = 45$, residuo 0	$90 = 2 \times 45$	
$45 \div 3 = 15$, residuo 0	$45 = 3 \times 15$	$\begin{array}{r\|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$
$15 \div 3 = 5$, residuo 0	$15 = 3 \times 5$	
$5 \div 5 = 1$, residuo 0	$5 = 5 \times 1$	

Por lo tanto, la descomposición en factores primos de 90 es $2 \times 3^2 \times 5$.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

1.2 Máximo común divisor

El mayor de los divisores comunes de dos o más números naturales se llama **máximo común divisor**. Se designa con la expresión **m.c.d.**

Un procedimiento sencillo que se utiliza para encontrar el m.c.d. de dos o más números es la descomposición en factores primos.

Ejemplo 2

Para hallar el m.c.d de 12, 18 y 20, primero se descomponen los números en sus factores primos. Es decir:

$12 = 2^2 \times 3$ $18 = 2 \times 3^2$ $20 = 2^2 \times 5$

Luego, se toman todos los factores comunes elevados al menor exponente. En este caso, el único factor que tienen en común los tres números es el 2.

Por lo tanto, el m.c.d.(12, 18, 20) = 2.

Ten en cuenta

Si dos números solo tienen como divisor común el 1 se dice que son **primos entre sí**, y entonces su máximo común divisor es igual a 1.

1.3 Mínimo común múltiplo

El menor de los múltiplos comunes, diferente de cero, de dos o más números naturales se llama **mínimo común múltiplo** y se abrevia con la expresión **m.c.m.**

Para hallar el m.c.m. de dos o más números, estos se descomponen en factores primos.

Ejemplo 3

El m.c.m. de los números 12, 18 y 20 se calcula factorizando los números. Es decir:

$12 = 2^2 \times 3$ $18 = 2 \times 3^2$ $20 = 2^2 \times 5$

Después, se toman los factores comunes y no comunes de los números elevados al mayor exponente. En este caso son: 2^2, 3^2 y 5.

Se calcula el producto entre estas potencias y el resultado es el m.c.m.

Por lo tanto, m.c.m.(12, 18, 20) = $2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180$.

Ten en cuenta

El conjunto de los divisores de un número natural es finito. Por su parte, el conjunto de los múltiplos de un número natural es infinito.

1.4 Factor común de un polinomio

Para calcular el **factor común de un polinomio,** se halla el máximo común divisor de los coeficientes y se multiplica por el máximo común divisor de la parte literal.

Ejemplo 4

Para factorizar el polinomio $3x^3 + 12x^2 + 6x$ por el factor común se debe:

- Determinar el factor común de los coeficientes del polinomio. $\mathbf{3}x^3 + \mathbf{12}x^2 + \mathbf{6}x$ m.c.d.(3, 12, 6) = 3
- Hallar el máximo común divisor de la parte literal del polinomio. $3\boldsymbol{x^3} + 12\boldsymbol{x^2} + 6\boldsymbol{x}$ m.c.d.$(x^3, x^2, x) = x$
- Expresar el polinomio como el producto entre el factor común y el cociente de dividir cada término entre este factor.

factor común: es el producto del coeficiente común por la parte literal común.

$3x\,(x^2 + 4x + 2)$

cociente: es el resultado de dividir el polinomio entre el factor común.

Ten en cuenta

Cuando un polinomio no se puede expresar como producto de otros de menor grado, se dice que es un **polinomio irreducible**.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Indica si los siguientes polinomios son primos o compuestos. Explica tu respuesta.

   a. $4x + 5xy =$

   b. $5y^2 + 3y + y3 =$

2. Factoriza los siguientes polinomios.

   a. $8a^2 + 12\,ab =$

   b. $15m^3 + 20\,m^2 =$

   c. $a\,(n + 2) + (n + 2) =$

   d. $abc + abc^2 =$

Actividades TIC

En el link:

http://jucagi.com/ovas/CMatematicasFactorizacion/OVA-Factorizacion.swf

Descubre la información y utiliza esta herramienta para factorizar.

Actividades colaborativas

Forma grupos de 5 estudiantes y pídeles que resuelvan el problema 14 de la página de dasarrolla tus destrezas que requieren la aplicación de factoreo por factor común.

Ejercitación

2. a. $84 = 2^2 \times 3 \times 7$
   b. $96 = 2^5 \times 3$
   c. $24 = 2^3 \times 3$
   d. $301 = 7 \times 43$
   e. $47 = 1 \times 47$
   f. $25 = 5^2$
   g. $120 = 2^3 \times 5^2$
   h. $140 = 2^2 \times 5 \times 7$
   i. $200 = 2^3 \times 5^2$
   j. $225 = 3^2 \times 5^2$
   k. $320 = 2^6 \times 5$
   l $400 = 2^4 \times 5^2$

3. a. 3 b. 1 c. 2
   d. 50 e. 1 f. 1

4. a. 18 b. 540 c. 540
   d. 47 874 582 e. 13 882 110 f. 1 609 650

Comunicación

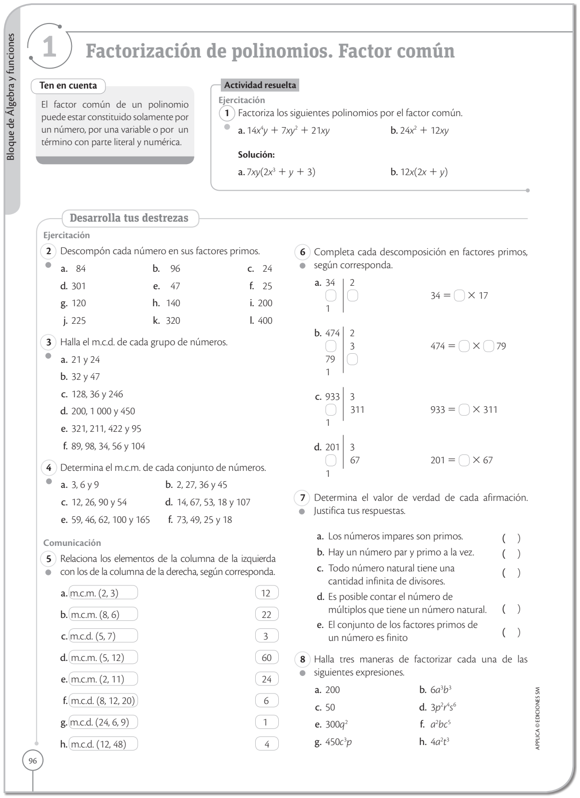
5. a. m.c.m. (2, 3) = 6
   b. m.c.m. (8, 6) = 24
   c. m.c.d. (5, 7) = 1
   d. m.c.m. (5, 12) = 60
   e. m.c.m. (2, 11) = 22
   f. m.c.d. (8, 12, 20) = 4
   g. m.c.d. (24, 6, 9) = 3
   h. m.c.d. (12, 48) = 12

6. a. $34 = 2 \times 17$ b. $474 = 2 \times 3 \times 79$
   c. $933 = 3 \times 311$ d. $201 = 3 \times 67$

7. a. Falso, no todos los números impares son primos.
   b. Verdadero, es el número 2.
   c. Falso, la cantidad de divisores es finita.
   d. Falso, los múltiplos de un número son infinitos.
   e. Verdadero, son finitos los factores de un número.

8.

a.	200	(100)(2)	(50)(4)	(20)(8)
b.	$6a^3b^3$	$(3a^2b)(2ab^2)$	$(2a^2b)(3ab^2)$	$(6a^2b)(ab^2)$
c.	50	(50)(1)	(25)(2)	(2)(25)
d.	$3p^2r^4s^6$	$(3p^2)(r^4s^6)$	$(3p^2r^4s^3)(s^3)$	$(3)(p^2r^4s^6)$
e.	$300q^2$	$(100q)(3q)$	$(10q)(30q)$	$(20q^2)(15)$
f.	a^2bc^5	$(a^2)(b)(c^5)$	$(a^2b)(c^5)$	$(a^2c^2)(b)(c^3)$
g.	$450c^3p$	$(45c^3)(10p)$	$(50c^3)(9p)$	$(90c^3)(5p)$
h.	$4a^2t^3$	$(2a^2)(2t^3)$	$(4a^2)(t^3)$	$(a^2)(4t^3)$



Bloque de Álgebra y funciones

1 Factorización de polinomios. Factor común

Ten en cuenta

El factor común de un polinomio puede estar constituido solamente por un número, por una variable o por un término con parte literal y numérica.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Factoriza los siguientes polinomios por el factor común.
a. $14x^4y + 7xy^2 + 21xy$ b. $24x^2 + 12xy$

Solución:
a. $7xy(2x^3 + y + 3)$ b. $12x(2x + y)$

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Descompón cada número en sus factores primos.
a. 84 b. 96 c. 24
d. 301 e. 47 f. 25
g. 120 h. 140 i. 200
j. 225 k. 320 l. 400

3 Halla el m.c.d. de cada grupo de números.
a. 21 y 24
b. 32 y 47
c. 128, 36 y 246
d. 200, 1 000 y 450
e. 321, 211, 422 y 95
f. 89, 98, 34, 56 y 104

4 Determina el m.c.m. de cada conjunto de números.
a. 3, 6 y 9 b. 2, 27, 36 y 45
c. 12, 26, 90 y 54 d. 14, 67, 53, 18 y 107
e. 59, 46, 62, 100 y 165 f. 73, 49, 25 y 18

Comunicación

5 Relaciona los elementos de la columna de la izquierda con los de la columna de la derecha, según corresponda.
a. m.c.m. (2, 3) 12
b. m.c.m. (8, 6) 22
c. m.c.d. (5, 7) 3
d. m.c.m. (5, 12) 60
e. m.c.m. (2, 11) 24
f. m.c.d. (8, 12, 20) 6
g. m.c.d. (24, 6, 9) 1
h. m.c.d. (12, 48) 4

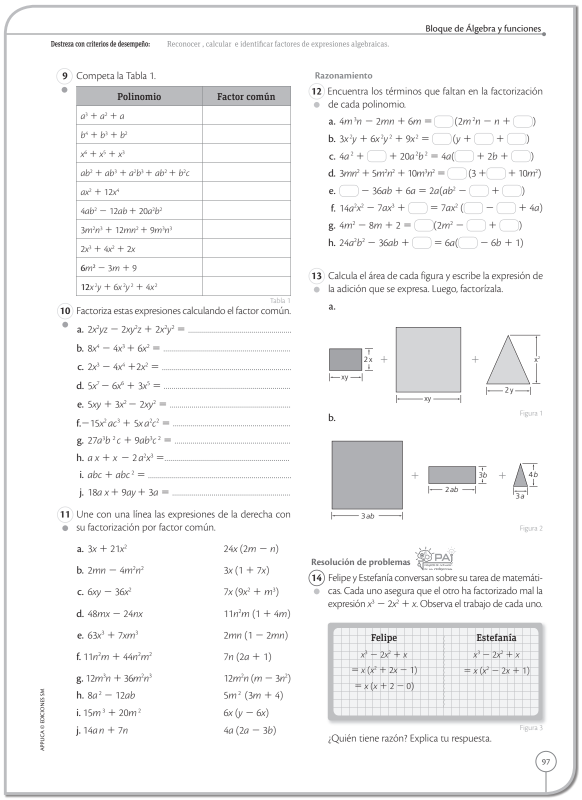
6 Completa cada descomposición en factores primos, según corresponda.
a. 34 | 2; ▢ | ▢; 1 — $34 = ▢ \times 17$
b. 474 | 2; ▢ | 3; 79 | ▢; 1 — $474 = ▢ \times ▢ 79$
c. 933 | 3; ▢ | 311; 1 — $933 = ▢ \times 311$
d. 201 | 3; ▢ | 67; 1 — $201 = ▢ \times 67$

7 Determina el valor de verdad de cada afirmación. Justifica tus respuestas.
a. Los números impares son primos. ( )
b. Hay un número par y primo a la vez. ( )
c. Todo número natural tiene una cantidad infinita de divisores. ( )
d. Es posible contar el número de múltiplos que tiene un número natural. ( )
e. El conjunto de los factores primos de un número es finito ( )

8 Halla tres maneras de factorizar cada una de las siguientes expresiones.
a. 200 b. $6a^3b^3$
c. 50 d. $3p^2r^4s^6$
e. $300q^2$ f. a^2bc^5
g. $450c^3p$ h. $4a^2t^3$

96

APPLICA © EDICIONES SM



Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

9 Competa la Tabla 1.

Polinomio	Factor común
$a^3 + a^2 + a$	
$b^4 + b^3 + b^2$	
$x^6 + x^5 + x^3$	
$ab^2 + ab^3 + a^2b^3 + ab^2 + b^2c$	
$ax^2 + 12x^4$	
$4ab^2 - 12ab + 20a^2b^2$	
$3m^2n^3 + 12mn^2 + 9m^3n^3$	
$2x^3 + 4x^2 + 2x$	
$6m^2 - 3m + 9$	
$12x^2y + 6x^2y^2 + 4x^2$	

Tabla 1

10 Factoriza estas expresiones calculando el factor común.

a. $2x^2yz - 2xy^2z + 2x^2y^2 =$ ....
b. $8x^4 - 4x^3 + 6x^2 =$ ....
c. $2x^3 - 4x^4 + 2x^2 =$ ....
d. $5x^7 - 6x^6 + 3x^5 =$ ....
e. $5xy + 3x^2 - 2xy^2 =$ ....
f. $-15x^2ac^3 + 5xa^2c^2 =$ ....
g. $27a^3b^2c + 9ab^3c^2 =$ ....
h. $ax + x - 2a^2x^3 =$ ....
i. $abc + abc^2 =$ ....
j. $18ax + 9ay + 3a =$ ....

11 Une con una línea las expresiones de la derecha con su factorización por factor común.

a. $3x + 21x^2$	$24x\,(2m - n)$
b. $2mn - 4m^2n^2$	$3x\,(1 + 7x)$
c. $6xy - 36x^2$	$7x\,(9x^2 + m^3)$
d. $48mx - 24nx$	$11n^2m\,(1 + 4m)$
e. $63x^3 + 7xm^3$	$2mn\,(1 - 2mn)$
f. $11n^2m + 44n^2m^2$	$7n\,(2a + 1)$
g. $12m^3n + 36m^2n^3$	$12m^2n\,(m - 3n^2)$
h. $8a^2 - 12ab$	$5m^2\,(3m + 4)$
i. $15m^3 + 20m^2$	$6x\,(y - 6x)$
j. $14an + 7n$	$4a\,(2a - 3b)$

APPLICA © EDICIONES SM

Razonamiento

12 Encuentra los términos que faltan en la factorización de cada polinomio.

a. $4m^3n - 2mn + 6m = \square(2m^2n - n + \square)$
b. $3x^2y + 6x^2y^2 + 9x^2 = \square(y + \square + \square)$
c. $4a^2 + \square + 20a^2b^2 = 4a(\square + 2b + \square)$
d. $3mn^2 + 5m^2n^2 + 10m^3n^2 = \square(3 + \square + 10m^2)$
e. $\square - 36ab + 6a = 2a(ab^2 - \square + \square)$
f. $14a^2x^2 - 7ax^3 + \square = 7ax^2(\square - \square + 4a)$
g. $4m^2 - 8m + 2 = \square(2m^2 - \square + \square)$
h. $24a^2b^2 - 36ab + \square = 6a(\square - 6b + 1)$

13 Calcula el área de cada figura y escribe la expresión de la adición que se expresa. Luego, factorízala.

a.

Figura 1

b.

Figura 2

Resolución de problemas

14 Felipe y Estefanía conversan sobre su tarea de matemáticas. Cada uno asegura que el otro ha factorizado mal la expresión $x^3 - 2x^2 + x$. Observa el trabajo de cada uno.

Figura 3

¿Quién tiene razón? Explica tu respuesta.

9.

$a^3 + a^2 + a$	$a(a^2 + a + 1)$
$b^4 + b^3 + b^2$	$b^2(b^2 + b + 1)$
$x^6 + x^5 + x^3$	$x^3(x^3 + x^2 + 1)$
$ab^2 + ab^3 + a^2b^3 + ab^2 + b^2c$	$b^2(2a + ab + a^2b + c)$
$ax^2 + 12x^4$	$x^2(a + 12x^2)$
$4ab^2 - 12ab + 20a^2b^2$	$4ab(b - 3 + 5ab)$
$3m^2n^3 + 12mn^2 + 9m^3n^3$	$3mn^2(n + 4 + 3mn)$
$2x^3 + 4x^2 + 2x$	$2x(x^2 + 2x + 1)$
$6m^2 - 3m + 9$	$3(2m^2 - m + 3)$
$12x^2y + 6x^2y^2 + 4x^2$	$2x^2(6y + 3y^2 + 2)$

10.

a.	$2x^2yz - 2xy^2z + 2x^2y^2$	=	$2xy(xz - yz + xy)$
b.	$8x^4 - 4x^3 + 6x^2$	=	$2x^2(4x^2 - 2x + 3)$
c.	$2x^3 - 4x^4 + 2x^2$	=	$2x^2(x - 2x^2 + 1)$
d.	$5x^7 - 6x^6 + 3x^5$	=	$x^5(5x^2 - 6x + 3)$
e.	$5xy + 3x^2 - 2xy^2$	=	$x(5y + 3x - 2y^2)$
f.	$-15x^2ac^3 + 5xa^2c^2$	=	$5xac(-3xc^2 + ac)$
g.	$27a^3b^2c + 9ab^3c^2$	=	$9ab^2c(3a^2 + bc)$
h.	$ax + x^2 - a^2x^3$	=	$x(a + x - ax^2)$
i.	$abc + abc^2$	=	$abc(1 + c)$
j.	$18ax + 9ay + 3a$	=	$3a(6x + 3y + 1)$

Ejercitación

11. a. $3x(1 + 7x)$ b. $2mn(1 - 2mn)$

c. $6x(y - 6x)$ d. $24x(2m - n)$

e. $7x(9x^2 + m^3)$ f. $11n^2m(1 + 4m)$

g. $12m^2n(m - 3n^2)$ h. $4a(2a - 3b)$

i. $5m^2(3m + 4)$ j. $7n(2a + 1)$

Razonamiento

12. a. $\boxed{2m}\,(2m^2n - n + \boxed{3})$

b. $\boxed{3x^2}\,(y + \boxed{2y^2} + 3)$

c. $4a^2 + \boxed{8ab} + 20a^2b^2 = 4a(\boxed{a} + 2b + \boxed{5ab^2})$

d. $\boxed{mn^2}\,(3 + \boxed{5m} + 10m^2)$

e. $\boxed{2a^2b^2} - 36ab + 6a = 2a(ab^2 - \boxed{18b} + \boxed{3})$

f. $14a^2x^2 - 7ax^3 + \boxed{28ax^2} = 7ax^2(\boxed{2a} - \boxed{x} + 4)$

g. $\boxed{2}\,(2m^2 - \boxed{4m} + \boxed{1}$

h. $24a^2b^2 - 36ab + \boxed{6a} = 6a(\boxed{4ab^2} - 6b + 1)$

Razonamiento

13. a. $2x^2y + x^2y^2 + x^2y = 3x^2y + x^2y^2 = 5x^2y(3 + y)$

b. $9a^2b^2 + 6ab^2 + 6ab = 3ab(3ab + 2b + 2)$

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Comience el tema refiriéndose a la situación planteada en el problema. Explicándoles que las medidas de los lados de un rectángulo representa el producto de dos expresiones algebraicas.

b. Pregunte a los y las estudiantes qué es lo que deben encontrar en la situación, y cuáles son los datos que conocen. Una vez que identifiquen que conocen el producto que representa el área total y deben hallar los factores pídales que den algunas alternativas de respuesta y concluya explicando el caso de factorización por agrupación de términos. Acláreles que los términos se pueden agrupar de otra forma produciendo el mismo resultado.

Actividades TIC

En el link:

http://jucagi.com/ovas/CMatematicasFactoriza-cion/OVA-Factorizacion.swf

Descubre la información y utiliza esta herramienta para factorar

Actividades colaborativas

Forma grupos de 5 estudiantes y pídeles que resuelvan estos problemas que requieren la aplicación de las propiedades de los radicales.

a. $m^2 + mn + mz + nz$

b. $3x - 2y - 2a^2y + 3a^2x$

c. $5x^2 - 2ay^2 + 5ax^2 - 2y^2$

d. $6ax - 4by - 4bx - 12a + 6ay + 8b$

e. $x + x^2 - xy^2 - y^2$

Bloque de Álgebra y funciones

2 Factorización por agrupación de términos

Explora

La Figura 1 muestra el plano de una fábrica automotriz.

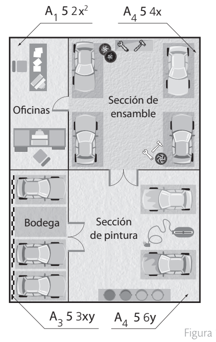


Figura 1

- ¿Cuál es la expresión que representa el área de la fábrica?

El área total *A* de la fábrica está dada por la adición de las áreas de las zonas que la conforman. Es decir:

$$A = 2x^2 + 4x + 3xy + 6y$$

Las dimensiones del terreno se obtienen factorizando la anterior expresión.

Como no existe un factor común a los términos del polinomio, se usa la **factorización por agrupación de términos.**

Entonces, para factorizar la expresión $2x^2 + 4x + 3xy + 6y$ con este método:

1. Se agrupan términos que tengan algún factor común.

$$(2x^2 + 4x) + (3xy + 6y)$$

2. Se factoriza cada grupo de términos.

$$2x(\mathbf{x+2}) + 3y(\mathbf{x+2})$$

3. Se factoriza la nueva expresión común, en este caso $(x + 2)$.

$$(\mathbf{x+2})(2x + 3y)$$

Por lo tanto,

$$2x^2 + 4x + 3xy + 6y = \underbrace{(x + 2)(2x + 3y)}_{\text{Dimensiones del terreno}}$$

Para **factorizar un polinomio por agrupación de términos,** se aplica la propiedad asociativa de la adición y la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición. De esta manera, se hallan factores comunes a cada grupo de términos.

Ejemplo 1

Para factorizar el polinomio $5x + 5y + 3x^2 + 3xy$ se siguen estos pasos:

1. Se agrupan los términos que tienen algún factor común.

$$(5x + 5y) + (3x^2 + 3xy)$$

2. Se factoriza cada grupo de términos.

$$5(\mathbf{x+y}) + 3x(\mathbf{x+y})$$

3. Se factoriza la expresión común, es decir $(x + y)$.

$$(\mathbf{x+y})(5 + 3x)$$

Por lo tanto,

$$5x + 5y + 3x^2 + 3xy = (x + y)(5 + 3x)$$

Ten en cuenta

La expresión opuesta a $a - b$ es $b - a$, porque:

$$-(a - b) = (-a + b) = (b - a)$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Factoriza el polinomio $4x^2 - 2xy + 9yz - 18xz$.

Solución:

La factorización requiere los siguientes pasos.

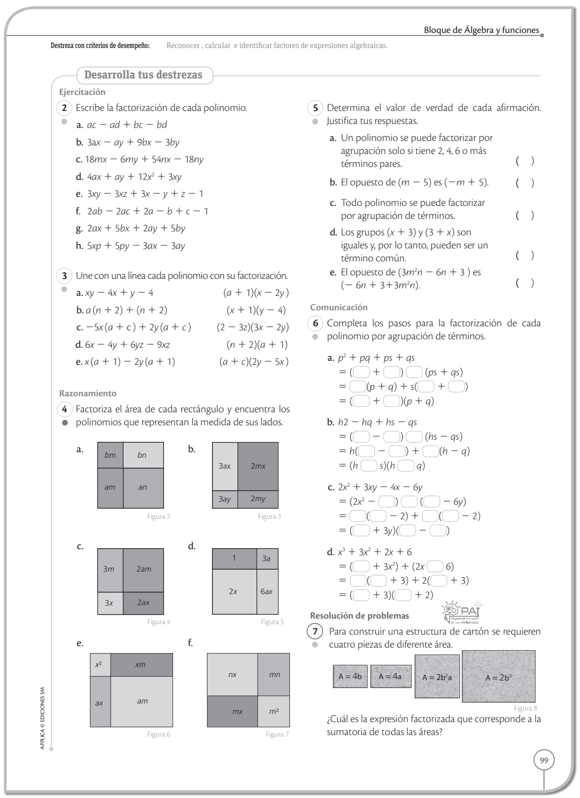
$4x^2 - 2xy + 9yz - 18xz$

$(4x^2 - 2xy) + (9yz - 18xz)$ ← Se agrupan los términos con factores comunes.

$2x(2x - y) + 9z(y - 2x)$ ← Se factoriza cada grupo de términos.

$2x(2x - y) - 9z(2x - y)$ ← Se reemplaza $(y - 2x)$ por $(2x - y)$.

$(2x - y)(2x - 9z)$ ← Se factoriza la expresión común $(2x - y)$.


Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Escribe la factorización de cada polinomio.

a. $ac - ad + bc - bd$
b. $3ax - ay + 9bx - 3by$
c. $18mx - 6my + 54nx - 18ny$
d. $4ax + ay + 12x^2 + 3xy$
e. $3xy - 3xz + 3x - y + z - 1$
f. $2ab - 2ac + 2a - b + c - 1$
g. $2ax + 5bx + 2ay + 5by$
h. $5xp + 5py - 3ax - 3ay$

3 Une con una línea cada polinomio con su factorización.

a. $xy - 4x + y - 4$ — $(a + 1)(x - 2y)$
b. $a(n + 2) + (n + 2)$ — $(x + 1)(y - 4)$
c. $-5x(a + c) + 2y(a + c)$ — $(2 - 3z)(3x - 2y)$
d. $6x - 4y + 6yz - 9xz$ — $(n + 2)(a + 1)$
e. $x(a + 1) - 2y(a + 1)$ — $(a + c)(2y - 5x)$

Razonamiento

4 Factoriza el área de cada rectángulo y encuentra los polinomios que representan la medida de sus lados.

5 Determina el valor de verdad de cada afirmación. Justifica tus respuestas.

a. Un polinomio se puede factorizar por agrupación solo si tiene 2, 4, 6 o más términos pares. ( )
b. El opuesto de $(m - 5)$ es $(-m + 5)$. ( )
c. Todo polinomio se puede factorizar por agrupación de términos. ( )
d. Los grupos $(x + 3)$ y $(3 + x)$ son iguales y, por lo tanto, pueden ser un término común. ( )
e. El opuesto de $(3m^2n - 6n + 3)$ es $(-6n + 3 + 3m^2n)$. ( )

Comunicación

6 Completa los pasos para la factorización de cada polinomio por agrupación de términos.

a. $p^2 + pq + ps + qs$
$= (\square + \square)\ \square\ (ps + qs)$
$= \square(p + q) + s(\square + \square)$
$= (\square + \square)(p + q)$

b. $h2 - hq + hs - qs$
$= (\square - \square)\ \square\ (hs - qs)$
$= h(\square - \square) + \square(h - q)$
$= (h\ \square\ s)(h\ \square\ q)$

c. $2x^2 + 3xy - 4x - 6y$
$= (2x^2 - \square)\ \square\ (\square - 6y)$
$= \square(\square - 2) + \square(\square - 2)$
$= (\square + 3y)(\square - \square)$

d. $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$
$= (\square + 3x^2) + (2x\ \square\ 6)$
$= \square(\square + 3) + 2(\square + 3)$
$= (\square + 3)(\square + 2)$

Resolución de problemas

7 Para construir una estructura de cartón se requieren cuatro piezas de diferente área.

Figura 8

¿Cuál es la expresión factorizada que corresponde a la sumatoria de todas las áreas?

99

Ejercitación

2. a. $(a + b)(c - d)$

b. $(3x - y)(a + 3b)$

c. $6(m + 3n)(3x - y)$

d. $(4x + y)(a + 3x)$

e. $(y - z + 1)(3x - 1)$

f. $(b - c + 1)(2a - 1)$

g. $(x + y)(2a + 5b)$

h. $(x + y)(5p - 3a)$

3. a. $(x + 1)(y - 4)$ b. $(n + 2)(a + 1)$

c. $(a + c)(2y - 5x)$ d. $(2 - 3z)(3x - 2y)$

e. $(a + 1)(x - 2y)$

Razonamiento

4. a. $(m^2 + n^2)(b^2 + a^2)$

b. $(x^2 + y^2)(9a^2 + 4m^2)$

c. $(m^2 + x^2)(9 + 4a^2)$

d. $(1 + 4x^2)(1 + 9a^2)$

e. $(x^2 + a^2)(x^2 + m^2)$

f. $(n^2 + m^2)(x^2 + m^2)$

5. a. Verdadero, deben ser términos pares para poder factorizarlo.

b. Verdadero, el opuesto cambia los signos

c. Falso, deben ser términos pares para poder factorizarlo.

d. Verdadero, son factor común al ser iguales

e. Falso, el opuesto es $-3m^2n + 6n - 3$.

Comunicación

6. a. $p^2 + pq + ps + qs$

$= (\boxed{p^2} + \boxed{pq}) + (ps + qs)$

$= \boxed{p}(p + q) + s(\boxed{p} + \boxed{p})$

$= (\boxed{p} + \boxed{s}) + (p + q)$

b. $h^2 - hq + hs - qs$

$= (\boxed{h^2} - \boxed{qh})\ \boxed{+}\ (hs - qs)$

$= h(\boxed{h} - \boxed{q}) + \boxed{s}(h - q)$

$= (h\ \boxed{+}\ s)(h\ \boxed{-}\ q)$

c. $2x^2 + 3xy - 4x - 6y$

$= (2x^2 - \boxed{4x}) + (\boxed{3xy} - 6y)$

$= \boxed{2x}(\boxed{x} - 2) - \boxed{3y}(\boxed{x} - 2)$

$= (\boxed{2x} - 3y)(\boxed{x} - \boxed{2})$

d. $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$

$= (\boxed{3x^3} + 3x^2) + (2x\ \boxed{+}\ 6)$

$= \boxed{x^2}(\boxed{x} + 3) + 2(\boxed{x} + 3)$

$= (\boxed{x} + 3)(\boxed{x^2} + 2)$

7. $(a + b)(2b^2 + 4)$

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Proponga calcular raíces cuadradas de números que son cuadrados perfectos tales como: 144, 100, 169, 25, etc. Esto les servirá para identificar si los términos dados en un trinomio son o no cuadrados perfectos.

b. Es importante explicar a los estudiantes que el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades se puede representar geométricamente cuando los valores de dichas cantidades son positivos.

Ampliación conceptual

Observa como se factorizan diferencias de cuadrados.

- $9x^2 - 16 = (3x)^2 - (4)^2$ Se expresa como una diferencia de cuadrados
- $(3x - 4)(3x + 4)$ Se escribe la suma por la diferencia de las raíces cuadradas de $9x^2$ y 16.
- $[3(x - y) - (a + b)]\,[3(x - y) + (a + b)]$
  Se eliminan los paréntesis en cada factor.
  $(3x - 3y - a - b)(3x - 3y + a + b)$

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Organiza los polinomios en columna. Luego, encuentra cada suma.

   a. $81x^2y^4 - 121\,m^2y^4$ b. $144n^6 - 121y^8$

   c. $\dfrac{1}{25} - 4m^{10}$ d. $-16a^{20} - \dfrac{4}{9}b^2$

3 Factorización de la diferencia de cuadrados perfectos

Explora

La figura 1 corresponde al plano de una finca destinada al cultivo. Allí se ha asignado un sector para la construcción de una casa cuya área equivale a la expresión y^2.

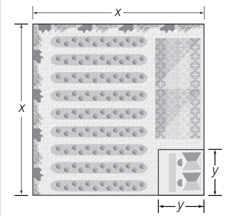


Figura 1

- ¿Cómo se puede expresar el área de la finca que se destina para cultivo?

El área que se usa para cultivo se calcula mediante la expresión $x^2 - y^2$. En este caso, los términos x^2 y y^2 son cuadrados perfectos.

A partir de un procedimiento gráfico se puede obtener una expresión equivalente a la expresión $x^2 - y^2$. Observa:

1. El área que se quiere calcular está determinada por el área total de la finca (x^2) menos el área que ocupa la casa (y^2). Graficamente, corresponde a eliminar el cuadrado de lado y, de la superficie del cuadrado de lado x. (Figura 2)

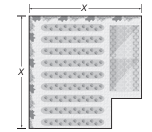


Figura 2

2. Se puede trazar una línea imaginaria para determinar dos rectángulos de las siguientes dimensiones:
   Rectángulo 1: $(x - y)$ y x
   Rectángulo 2: $(x - y)$ y y
   (Figura 3)

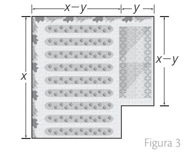


Figura 3

3. Se traslada el rectángulo 2 de tal forma que coincida con el rectángulo 1 por el lado de longitud $(x - y)$. Se obtiene así un rectángulo de dimensiones $(x - y)$ y $(x + y)$.
   (Figura 4)

   Por lo tanto, las expresiones $x^2 - y^2$ y $(x - y)(x + y)$ son equivalentes.

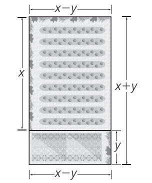


Figura 4

Factorizar una **diferencia de cuadrados** equivale al producto de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas de los términos. Es decir: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt05

Observa un video relacionado con la factorización de la diferencia de cuadrados perfectos.

Ejemplo 1

La diferencia de cuadrados $x^2 - 36$ es equivalente al producto de la suma por la diferencia de las raíces cuadradas de x^2 y 36. Así:

$$x^2 - 36 = (x + 6)(x - 6)$$

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Factoriza las siguientes diferencias de cuadrados.

a. $a^2 - 4$ b. $m^2 - 25$ c. $4x^2 - 9$ d. $49n^2 - 1$

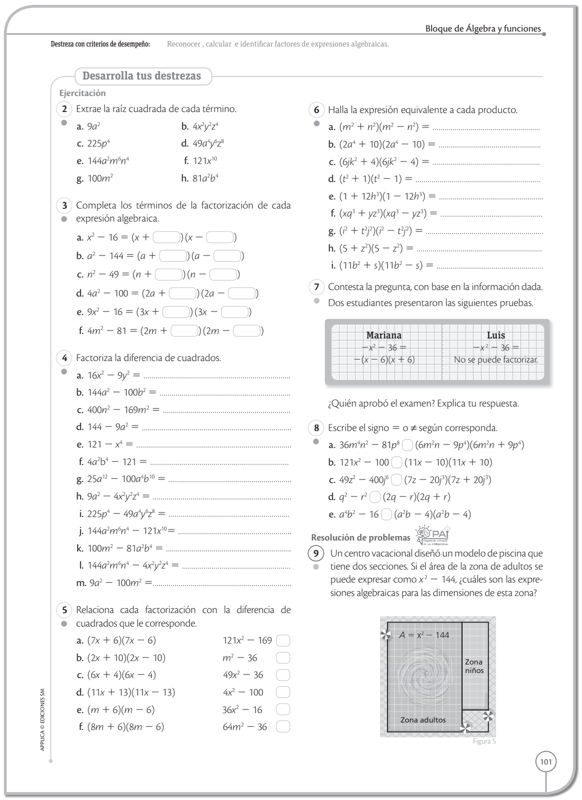
Solución:

a. $a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$, porque $\sqrt{a^2} = a$ y $\sqrt{4} = 2$.

b. $m^2 - 25 = (m + 5)(m - 5)$, porque $\sqrt{m^2} = m$ y $\sqrt{25} = 5$.

c. $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$, porque $\sqrt{4x^2} = 4x$ y $\sqrt{9} = 3$.

d. $49n^2 - 1 = (7n + 1)(7n - 1)$, porque $\sqrt{49n^2} = 7n$ y $\sqrt{1} = 1$.



Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Extrae la raíz cuadrada de cada término.

a. $9a^2$ b. $4x^2y^2z^4$
c. $225p^4$ d. $49a^4y^6z^8$
e. $144a^2m^6n^4$ f. $121x^{10}$
g. $100m^2$ h. $81a^2b^4$

3 Completa los términos de la factorización de cada expresión algebraica.

a. $x^2 - 16 = (x + \square)(x - \square)$
b. $a^2 - 144 = (a + \square)(a - \square)$
c. $n^2 - 49 = (n + \square)(n - \square)$
d. $4a^2 - 100 = (2a + \square)(2a - \square)$
e. $9x^2 - 16 = (3x + \square)(3x - \square)$
f. $4m^2 - 81 = (2m + \square)(2m - \square)$

4 Factoriza la diferencia de cuadrados.

a. $16x^2 - 9y^2 =$ ....
b. $144a^2 - 100b^2 =$ ....
c. $400n^2 - 169m^2 =$ ....
d. $144 - 9a^2 =$ ....
e. $121 - x^4 =$ ....
f. $4a^2b^4 - 121 =$ ....
g. $25a^{12} - 100a^4b^{10} =$ ....
h. $9a^2 - 4x^2y^2z^4 =$ ....
i. $225p^4 - 49a^4y^6z^8 =$ ....
j. $144a^2m^6n^4 - 121x^{10} =$ ....
k. $100m^2 - 81a^2b^4 =$ ....
l. $144a^2m^6n^4 - 4x^2y^2z^4 =$ ....
m. $9a^2 - 100m^2 =$ ....

5 Relaciona cada factorización con la diferencia de cuadrados que le corresponde.

a. $(7x + 6)(7x - 6)$ — $121x^2 - 169$ ☐
b. $(2x + 10)(2x - 10)$ — $m^2 - 36$ ☐
c. $(6x + 4)(6x - 4)$ — $49x^2 - 36$ ☐
d. $(11x + 13)(11x - 13)$ — $4x^2 - 100$ ☐
e. $(m + 6)(m - 6)$ — $36x^2 - 16$ ☐
f. $(8m + 6)(8m - 6)$ — $64m^2 - 36$ ☐

6 Halla la expresión equivalente a cada producto.

a. $(m^2 + n^2)(m^2 - n^2) =$ ....
b. $(2a^4 + 10)(2a^4 - 10) =$ ....
c. $(6jk^2 + 4)(6jk^2 - 4) =$ ....
d. $(t^2 + 1)(t^2 - 1) =$ ....
e. $(1 + 12h^3)(1 - 12h^3) =$ ....
f. $(xq^3 + yz^3)(xq^3 - yz^3) =$ ....
g. $(i^2 + t^2j^2)(i^2 - t^2j^2) =$ ....
h. $(5 + z^2)(5 - z^2) =$ ....
i. $(11b^2 + s)(11b^2 - s) =$ ....

7 Contesta la pregunta, con base en la información dada.
Dos estudiantes presentaron las siguientes pruebas.

Mariana	Luis
$-x^2 - 36 =$	$-x^2 - 36 =$
$-(x - 6)(x + 6)$	No se puede factorizar.

¿Quién aprobó el examen? Explica tu respuesta.

8 Escribe el signo = o ≠ según corresponda.

a. $36m^4n^2 - 81p^8 \square (6m^2n - 9p^4)(6m^2n + 9p^4)$
b. $121x^2 - 100 \square (11x - 10)(11x + 10)$
c. $49z^2 - 400j^6 \square (7z - 20j^3)(7z + 20j^3)$
d. $q^2 - r^2 \square (2q - r)(2q + r)$
e. $a^4b^2 - 16 \square (a^2b - 4)(a^2b - 4)$

Resolución de problemas

9 Un centro vacacional diseñó un modelo de piscina que tiene dos secciones. Si el área de la zona de adultos se puede expresar como $x^2 - 144$, ¿cuáles son las expresiones algebraicas para las dimensiones de esta zona?

Figura 5

APPLICA © EDICIONES SM

101

Ejercitación

2. a. $3a$ b. $2xyz^2$
c. $15p^2$ d. $7a^2y^3z^4$
e. $12am^3n^2$ f. $11x^5$
g. $10m$ h. $9ab^2$

3. a. $(x + \boxed{4})(x - \boxed{4})$
b. $(a + \boxed{12})(a - \boxed{12})$
c. $(n + \boxed{7})(n - \boxed{7})$
d. $(2a + \boxed{10})(2a - \boxed{10})$
e. $(3x + \boxed{4})(3x - \boxed{4})$
f. $(2m + \boxed{9})(2m - \boxed{9})$

4. a. $(4x + 3y)(4x - 3y)$
b. $(12a + 10b)(12a - 10b)$
c. $(20n + 13m)(20n - 13m)$
d. $(12 + 3a)(12 - 3a)$
e. $(11 + x^2)(11 - x^2)$
f. $(2ab^2 + 11)(2ab^2 - 11)$
g. $(5a^6 + 10a^2b^5)(5a^6 - 10a^2b^5)$
h. $(3a + 2xyz^2)(3a - 2xyz^2)$
i. $(15p^2 + 7a^2y^3z^4)(15p^2 - 7a^2y^3z^4)$
j. $(12am^3n^2 + 11x^5)(12am^3n^2 - 11x^5)$
k. $(10m + 9ab^2)(10m - 9ab^2)$
l. $(12am^3n^2 + 2xyz^2)(12am^3n^2 - 2xyz^2)$
m. $(3a + 10m)(3a - 10m)$

5. a. $(7x + 6)(7x - 6) = 49x^2 - 36$
b. $(2x + 10)(2x - 10) = 4x^2 - 100$
c. $(6x + 4)(6x - 4) = 36x^2 - 16$
d. $(11x + 13)(11x - 13) = 121x^2 - 169$
e. $(m + 6)(m - 6) = m^2 - 36$
f. $(8m + 6)(8m - 6) = 64m^2 - 36$

6. a. $m^4 - n^4$ b. $4a^8 - 100$
c. $36j^2k^4 - 16$ d. $t^4 - 1$
e. $1 - 144h^6$ f. $x^2q^6 - y^2z^6$
g. $i^4 - t^4j^4$ h. $25 - z^4$
i. $121b^4 - s^2$

7. El examen lo aprobó Luis.

8. a. = b. = c. =
d. ≠ e. ≠

Resolución de problemas

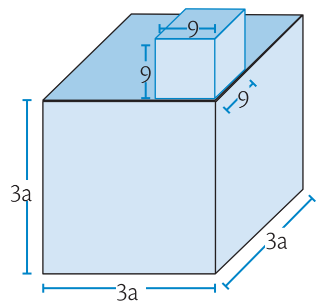
9. $(x + 7)(x - 7)$

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Suma y diferencia de cubos y de potencias iguales

Analiza: ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el volumen del sólido?, ¿Cuál es la factorización de esta expresión?



Para determinar el volumen del sólido, ilustrado en la figura se puede expresar como una suma de los volúmenes independientes.

$$(3a)^3 + (9)^3 = (3a + 9)\,(3a)^2 + (3a)(9) + (9)^2$$

Factorizando esta suma de cubos se tiene:

$$(3a)^3 + (9)^3 = (3a + 9)\,(9a^2 - 27a + 81)$$

La factorización de la suma de cubos perfectos es equivalente a la suma de las raíces cúbicas de los términos, multiplicada por el cuadrado de la primera raíz, menos el producto de las dos raíces, más el cuadrado de la segunda raíz.

Ejemplo: $x^3 + 64 = (x + 4)\,(x^2 - 4x + 16)$

4 Factorización de cubos perfectos. Suma y diferencia

Explora

El volumen de un cubo de lado a está dado por el producto entre su largo, su ancho y su alto, así:

$a \times a \times a = a^3$

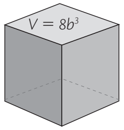


Figura 1

- ¿Cuál es la longitud del lado del cubo de la figura 1, si se sabe que su volumen es $8b^3$?

Para calcular la longitud del lado del cubo cuyo volumen es $8b^3$, se extrae la raíz cúbica de este valor. Es decir:

$$\sqrt[3]{8b^3} = 2b$$

El cálculo de raíces cúbicas será de gran ayuda en la factorización de cubos perfectos.

4.1 Factorización de la suma de cubos perfectos

La suma de dos cubos perfectos equivale al producto de dos factores: el primero, un binomio formado por las raíces cúbicas de los términos; el segundo, un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera raíz menos el producto de las raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

La **factorización de la suma de cubos perfectos** se expresa así:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

Esta igualdad se obtiene al completar la figura en el espacio, de tal manera que las dimensiones del paralelepípedo que se forma son $x + y$, x y x, como en la figura 2

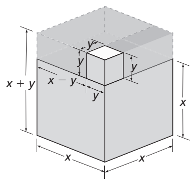


Figura 2

Ejemplo 1

Para factorizar la suma $x^3 + 27$ se sigue este proceso:

1. Se extrae la raíz cúbica del primer término. *Para* x^3 es $\sqrt[3]{x^3} = x$
2. Se extrae la raíz cúbica del segundo término. Para 27 es $\sqrt[3]{27} = 3$
3. Se expresa la suma de cubos como el producto de la suma de las raíces por la suma de los cuadrados de las raíces menos su producto. $x^3 + 27 = (x + 3)\,(x^2 - 3x + 9)$

4.2 Factorización de la diferencia de cubos perfectos

La diferencia de dos cubos perfectos equivale a multiplicar dos factores: el primero, un binomio formado por la diferencia de las raíces cúbicas de los términos; el segundo, un trinomio cuyos términos son el cuadrado de la primera raíz más el producto de las raíces más el cuadrado de la segunda raíz.

La **factorización de la diferencia de cubos perfectos** se expresa así:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

Un ejemplo gráfico de esta igualdad es la figura 3. Se obtiene al completar la figura en el espacio y calcular los volúmenes de cada una de las piezas resultantes.

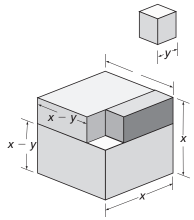


Figura 3

Actividad resuelta

Resolución de problemas

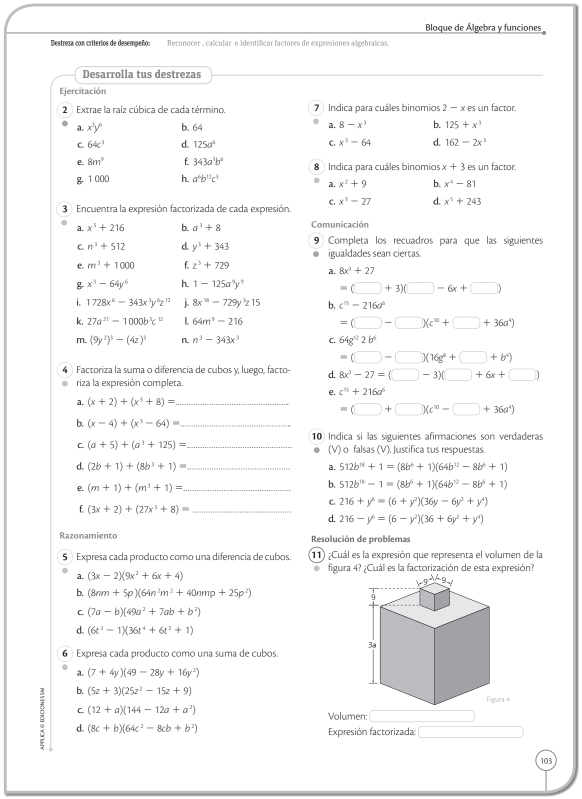
1. Factoriza el binomio $x^3 - 8$.

- **Solución:**

Factoriza la expresión $x^3 - 8$. Para ello, primero calcula la raíz cúbica de x^3 que es x y luego, la raíz cúbica de 8 que es 2.

Después, expresa $x^3 - 8$ como el producto de la diferencia de las raíces $(x - 2)$ y la suma de los cuadrados de las raíces más el producto de las mismas, es decir, $(x^2 + 2x + 4)$.

Entonces: $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$



Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Extrae la raíz cúbica de cada término.

a. x^3y^6 b. 64
c. $64c^3$ d. $125a^6$
e. $8m^9$ f. $343a^3b^6$
g. $1\,000$ h. $a^6b^{12}c^3$

3 Encuentra la expresión factorizada de cada expresión.

a. $x^3 + 216$ b. $a^3 + 8$
c. $n^3 + 512$ d. $y^3 + 343$
e. $m^3 + 1000$ f. $z^3 + 729$
g. $x^3 - 64y^6$ h. $1 - 125a^9y^9$
i. $1\,728x^6 - 343x^3y^6z^{12}$ j. $8x^{18} - 729y^3z\,15$
k. $27a^{21} - 1000b^3c^{12}$ l. $64m^9 - 216$
m. $(9y^2)^3 - (4z)^3$ n. $n^3 - 343x^3$

4 Factoriza la suma o diferencia de cubos y, luego, factoriza la expresión completa.

a. $(x + 2) + (x^3 + 8) =$ ....
b. $(x - 4) + (x^3 - 64) =$ ....
c. $(a + 5) + (a^3 + 125) =$ ....
d. $(2b + 1) + (8b^3 + 1) =$ ....
e. $(m + 1) + (m^3 + 1) =$ ....
f. $(3x + 2) + (27x^3 + 8) =$ ....

Razonamiento

5 Expresa cada producto como una diferencia de cubos.

a. $(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$
b. $(8nm + 5p)(64n^2m^2 + 40nmp + 25p^2)$
c. $(7a - b)(49a^2 + 7ab + b^2)$
d. $(6t^2 - 1)(36t^4 + 6t^2 + 1)$

6 Expresa cada producto como una suma de cubos.

a. $(7 + 4y)(49 - 28y + 16y^2)$
b. $(5z + 3)(25z^2 - 15z + 9)$
c. $(12 + a)(144 - 12a + a^2)$
d. $(8c + b)(64c^2 - 8cb + b^2)$

7 Indica para cuáles binomios $2 - x$ es un factor.

a. $8 - x^3$ b. $125 + x^3$
c. $x^3 - 64$ d. $162 - 2x^3$

8 Indica para cuáles binomios $x + 3$ es un factor.

a. $x^2 + 9$ b. $x^4 - 81$
c. $x^3 - 27$ d. $x^5 + 243$

Comunicación

9 Completa los recuadros para que las siguientes igualdades sean ciertas.

a. $8x^3 + 27$
$= (\boxed{} + 3)(\boxed{} - 6x + \boxed{})$
b. $c^{15} - 216a^6$
$= (\boxed{} - \boxed{})(c^{10} + \boxed{} + 36a^4)$
c. $64g^{12}\ 2\ b^6$
$= (\boxed{} - \boxed{})(16g^8 + \boxed{} + b^4)$
d. $8x^3 - 27 = (\boxed{} - 3)(\boxed{} + 6x + \boxed{})$
e. $c^{15} + 216a^6$
$= (\boxed{} + \boxed{})(c^{10} - \boxed{} + 36a^4)$

10 Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (V). Justifica tus respuestas.

a. $512b^{18} + 1 = (8b^6 + 1)(64b^{12} - 8b^6 + 1)$
b. $512b^{18} - 1 = (8b^6 + 1)(64b^{12} - 8b^6 + 1)$
c. $216 + y^6 = (6 + y^2)(36y - 6y^2 + y^4)$
d. $216 - y^6 = (6 - y^2)(36 + 6y^2 + y^4)$

Resolución de problemas

11 ¿Cuál es la expresión que representa el volumen de la figura 4? ¿Cuál es la factorización de esta expresión?

Figura 4

Volumen:
Expresión factorizada:

103

Ejercitación

2. a. xy^2 b. 4 c. $4c$
d. $5a^2$ e. $2m^3$ f. $7ab^2$
g. 10 h. a^2b^4c

Ejercitación

3. a. $(x + 6)(x^2 - 6x + 36)$
b. $(a + 2)(a^2 - 2a + 4)$
c. $(n + 8)(n^2 - 8n + 64)$
d. $(y + 7)(y^2 - 7y + 49)$
e. $(m + 10)(m^2 - 10m + 10)$
f. $(z + 9)(z^2 - 9z + 81)$
g. $(x - 4y^2)(x^2 + 4xy^2 + 16y^4)$
h. $(1 - 5a^3y^3)(1 + 5a^3y^3 + 25a^6y^6)$
i. $(12x^2 - 7xy^2z^4)(144x^4 + 84x^3y^2z^4 + 49x^2y^4z^8)$
j. $(1 - 5a^3y^3)(115a^3y^3 + 25a^6y^6)$
k. $(3a^7 - 10bc^4)(9a + 41\ 30a^7bc^4 + 100b^2c^8)$
l. $(4m^3 - 6)(16m^6 + 24m^3 + 36)$
m. $(9y^2 - 4z)(81y^4 + 36y^2z + 16z^2)$
n. $(n - 7x)(n^2 + 7nx - 49x^2)$

4. a. $(x + 2)(x^2 - 2x + 5)$
b. $(x - 4)(x^2 + 4x + 17)$
c. $(a + 5)(a^2 - 5a + 26)$
d. $(2b + 1)(4b^2 - 2b + 2)$
e. $(m + 1)(m^2 + m + 2)$
f. $(3x + 2)(9x^2 - 6x + 5)$

Razonamiento

5. a. $27x^3 - 8$ b. $512n^3m^3 - 125p^3$
c. $343a^3 - b^3$ d. $216t^6 - 1$

6. a. $343 + 64y^3$ b. $125z^3 + 27$
c. $1\,368 + a^3$ d. $512c^3 + b^3$

7. a. es factor b. no es factor
c. no es factor d. no es factor

8. a. es factor b. es factor
c. no es factor d. no es factor

Comunicación

9. a. $(\boxed{2x} + 3)(\boxed{4x^2} - 6x + \boxed{9})$
b. $(\boxed{c^5} - \boxed{6a^2})(c^{10} + \boxed{6a^2c^5} + 36a^4)$
c. $(\boxed{4g^4} - \boxed{b^2})(16g^8 + \boxed{4b^2g^2} + b^4)$
d. $(\boxed{2x} - 3)(\boxed{4x^2} + 6x + \boxed{9})$
e. $(\boxed{c^5} + \boxed{6a^2})(c^{10} - \boxed{6a^2c^5} + 36a^4)$

10. a. Verdadera, es el resultado de la factorización.
b. Falso, el resultado es
$(8b^6 - 1)(64b^{12} + 8b^6 + 1)$.
c. Falso, el exponente de $36y$ debe ser y^2
d. Verdadera, es el resultado de la factorización.

11. Volumen $= 27a^3 + 729$
Expresión factorizada $=$
$(3a + 9)(9a^2 - 27a + 81)$

Libro del alumno

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

Factoriza los binomios

a . $27 - 8b^3$

b . $125n^3 + 64$

c . $216a^3b^3 + 1\,000$

d . $125y^9 - 512z$

e . $32d^5c^{10} - p^5q^{15}$

f . $243h^{15}j^5 - k^{20}$

g . $243x^{15}y^{25} + 1\,024z^{10}$

Actividades TIC

En el link:

http://jucagi.com/ovas/CMatematicasFactoriza-cion/OVA-Factorizacion.swf

Descubre la información y utiliza esta herramienta para factorar binomios en general.

Actividades colaborativas

Forma grupos de 5 estudiantes y pida que resuelvan estos problemas que requieren la aplicación de factoreo de binomios

- $a^5 - 32 =$
- $a^5 + b^5 =$
- $a^3 + 125 =$
- $a^2 - 9x^2 =$
- $32m^5 + n^5 =$

5 Factorización de expresiones de la forma $x^n \pm y^n$

Explora

Fernanda considera que la expresión $x^5 + 32y^5$ no se puede factorizar. Miguel afirma que está equivocada.

- ¿Quién tiene la razón?

El binomio $x^5 + 32y^5$ es de la forma $x^n + y^n$ con $n = 5$; es decir que n es un número impar. Teniendo en cuenta estas características, se puede verificar si $x^5 + 32y^5$ es divisible entre $x + 2y$ (valor que se obtiene al calcular la raíz quinta de cada término).

Luego, la división se expresa como $\frac{x^5 + 32y^5}{x + 2y}$ se resuelve de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l|l}
\cancel{x^5} + 0x^4y + 0x^3y^2 + 0x^2y^3 + 0xy^4 + 32y^5 & x + 2y \\ \hline
-\cancel{x^5} - 2x^4y & x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2 - 8xy^3 + 16y^4 \\ \cline{1-1}
\quad 2\cancel{x^4y} + 0x^3y^2 & \\
\quad -2x^4y - 4\cancel{x^3y^2} & \\ \cline{1-1}
\qquad -4\cancel{x^3y^2} + 0x^2y^3 & \\
\qquad 4x^3y^2 - 8\cancel{x^2y^3} & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -8\cancel{x^2y^3} + 0xy^4 & \\
\qquad\quad 8x^2y^3 + 16\cancel{xy^4} & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad 16\cancel{xy^4} + 32y^5 & \\
\qquad\qquad -16xy^4 - 32y^5 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Al finalizar la división, se puede afirmar que el binomio es factorizable y que Miguel tiene la razón, porque $x^5 + 32y^5 = (x + 2y)(x^4 - 2x^3y + 4x^2y^2 - 8xy^3 + 16y^4)$.

Ten en cuenta

Para empezar una división se deben escribir el dividendo y el divisor en orden decreciente, y si falta algún término, se deja el espacio.

Las **expresiones de la forma $x^n + y^n$**, con n como un número entero, son factorizables solo si n es impar. La factorización de este tipo de expresiones es:

$$x^n + y^n = (x + y)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots - xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Las **expresiones de la forma $x^n - y^n$**, con n como un número entero, son factorizables para todo n. La factorización de este tipo de expresiones es:

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

Al observar las expresiones generales de la factorización de los binomios de las formas $x^n + y^n$ o $x^n - y^n$, se concluye que:

- El primer factor tiene el mismo signo del binomio que se quiere factorizar.
- Cuando la operación es una adición, los signos del segundo factor se alternan entre positivo y negativo, empezando por positivo. Si es una sustracción, todos los signos del segundo factor son positivos.
- En el segundo factor, los exponentes del primer término van disminuyendo, mientras que los del segundo término van aumentando.

Ten en cuenta

La diferencia de cuadrados, la diferencia de cubos y la suma de cubos son casos especiales de las expresiones de la forma $x^n \pm y^n$.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Factoriza el binomio $x^4 - y^4$.

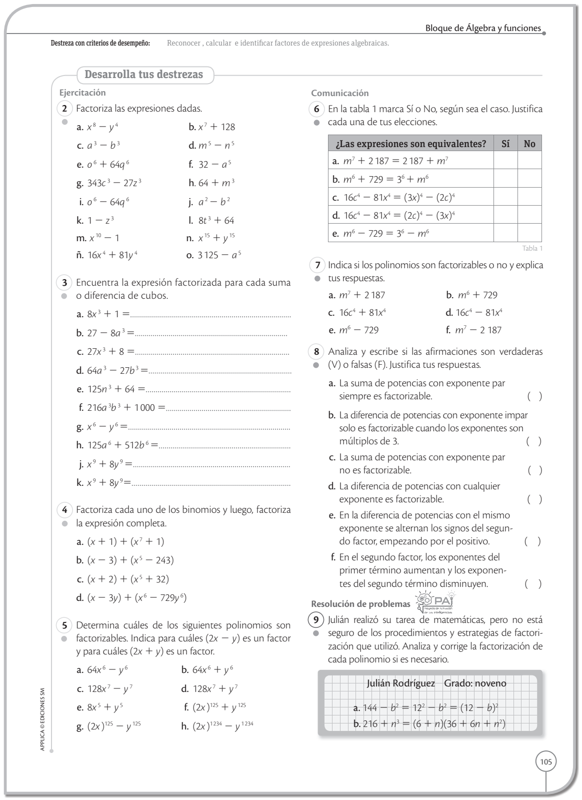
Solución:

El binomio $x^4 - y^4$ es la diferencia de dos potencias de un número par. Entonces, es factorizable; $(x - y)$ y $(x + y)$ son dos de sus factores.

$$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= (x - y)(x^{(4-1)} + x^{(4-2)}y^{(4-3)} + x^{(4-3)}y^{(4-2)} + y^{(4-1)}) \\ &= (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) \end{aligned}$$

El segundo factor se factoriza por agrupación de términos:

$$\begin{aligned} x^4 - y^4 &= (x - y)(x^3 + x^2y + xy^2 + y^3) = (x - y)(x^2(x + y) + y^2(x + y)) \\ &= (x - y)(x + y)(x^2 + y^2) \end{aligned}$$



Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Factoriza las expresiones dadas.

a. $x^8 - y^4$ b. $x^7 + 128$
c. $a^3 - b^3$ d. $m^5 - n^5$
e. $o^6 + 64q^6$ f. $32 - a^5$
g. $343c^3 - 27z^3$ h. $64 + m^3$
i. $o^6 - 64q^6$ j. $a^2 - b^2$
k. $1 - z^3$ l. $8t^3 + 64$
m. $x^{10} - 1$ n. $x^{15} + y^{15}$
ñ. $16x^4 + 81y^4$ o. $3\,125 - a^5$

3 Encuentra la expresión factorizada para cada suma o diferencia de cubos.

a. $8x^3 + 1 =$ ....
b. $27 - 8a^3 =$ ....
c. $27x^3 + 8 =$ ....
d. $64a^3 - 27b^3 =$ ....
e. $125n^3 + 64 =$ ....
f. $216a^3b^3 + 1000 =$ ....
g. $x^6 - y^6 =$ ....
h. $125a^6 + 512b^6 =$ ....
j. $x^9 + 8y^9 =$ ....
k. $x^9 + 8y^9 =$ ....

4 Factoriza cada uno de los binomios y luego, factoriza la expresión completa.

a. $(x + 1) + (x^7 + 1)$
b. $(x - 3) + (x^5 - 243)$
c. $(x + 2) + (x^5 + 32)$
d. $(x - 3y) + (x^6 - 729y^6)$

5 Determina cuáles de los siguientes polinomios son factorizables. Indica para cuáles $(2x - y)$ es un factor y para cuáles $(2x + y)$ es un factor.

a. $64x^6 - y^6$ b. $64x^6 + y^6$
c. $128x^7 - y^7$ d. $128x^7 + y^7$
e. $8x^5 + y^5$ f. $(2x)^{125} + y^{125}$
g. $(2x)^{125} - y^{125}$ h. $(2x)^{1234} - y^{1234}$

Comunicación

6 En la tabla 1 marca Sí o No, según sea el caso. Justifica cada una de tus elecciones.

¿Las expresiones son equivalentes?	Sí	No
a. $m^7 + 2\,187 = 2\,187 + m^7$		
b. $m^6 + 729 = 3^6 + m^6$		
c. $16c^4 - 81x^4 = (3x)^4 - (2c)^4$		
d. $16c^4 - 81x^4 = (2c)^4 - (3x)^4$		
e. $m^6 - 729 = 3^6 - m^6$		

Tabla 1

7 Indica si los polinomios son factorizables o no y explica tus respuestas.

a. $m^7 + 2\,187$ b. $m^6 + 729$
c. $16c^4 + 81x^4$ d. $16c^4 - 81x^4$
e. $m^6 - 729$ f. $m^7 - 2\,187$

8 Analiza y escribe si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica tus respuestas.

a. La suma de potencias con exponente par siempre es factorizable. ( )
b. La diferencia de potencias con exponente impar solo es factorizable cuando los exponentes son múltiplos de 3. ( )
c. La suma de potencias con exponente par no es factorizable. ( )
d. La diferencia de potencias con cualquier exponente es factorizable. ( )
e. En la diferencia de potencias con el mismo exponente se alternan los signos del segundo factor, empezando por el positivo. ( )
f. En el segundo factor, los exponentes del primer término aumentan y los exponentes del segundo término disminuyen. ( )

Resolución de problemas

9 Julián realizó su tarea de matemáticas, pero no está seguro de los procedimientos y estrategias de factorización que utilizó. Analiza y corrige la factorización de cada polinomio si es necesario.

Julián Rodríguez Grado: noveno

a. $144 - b^2 = 12^2 - b^2 = (12 - b)^2$
b. $216 + n^3 = (6 + n)(36 + 6n + n^2)$

105

Ejercitación

2. a. $(x^2 + y)(x^2 - y)(x^4 + y^2)$

b. $(x + 2)(x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 32x + 64)$

c. $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

d. $(m - n)(m^4 + m^3n + m^2n^2 + mn^3 + n^4)$

e. $64q^6$

f. $(2 - a)(16 + 8a + 4a^2 + 2a^3 + a^4)$

g. $(7c - 3z)(49c^2 + 21cz + 9z^2)$

h. $(41m)(16 - 4m + m^2)$

i. $-64q^6$ j. $(a + b)(a - b)$

k. $(1 - z)(1 + z + z^2)$

l. $(2t + 4)(4t^2 - 8t + 16)$

m. $(x + 1)(x - 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$

n. $(x + y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)(x^{10} - x^5y^5 + y^{10})$

ñ. $(2x + 3y)(2x - 3y)(4x^2 + 9y^2)$

o. $(5 - a)(625 + 125a + 25a^2 + 5a^3 + a^4)$

3. a. $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1)$

b. $(3 - 2a)(9 + 6a + 4a^2)$

c. $(3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$

d. $(4a - 3b)(16a^2 + 12ab + 9b^2)$

e. $(5n + 4)(25n^2 - 20n + 16)$

f. $(6ab + 10)(36a^2b^2 - 60ab + 100)$

g. $(x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

h. $(5a^2 + 6b^2)(25a^4 - 30a^2b^2 + 36b^4)$

j. $(x^3 + 2y^2)(x^6 - 2x^3y^3 + 4y^6)$

k. $(x^3 + 2y^3)(x^6 - 2x^3y^3 + 4y^6)$

4. a. $(x + 1)(x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 2)$

b. $(x - 3)(x^4 + 3x^3 + 9x^2 - 27x + 82)$

c. $(x + 2)(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 17)$

d. $(x - 3y)(x^5 + 3x^4 + 9x^3 + 27x^2 + 81x + 244)$

5. a. Es factorizable b. Es factorizable.

c, g y h. Es factorizable tiene a $(2x - y)$ como factor.

d y f. Es factorizable tiene a $(2x + y)$ como factor.

e. No es factorizable.

Comunicación

6. ¿Las expresiones son equivalentes?

	sí	no	justificación
a.	x		La suma es conmutativa
b.	x		La suma es conmutativa, se expresa el numero como potencia
c.		x	La resta no es conmutativa
d.	x		se expresa el numero como potencia
e.		x	La resta no es conmutativa

Ejercitación

7. a. Es factorizable. b. Es factorizable.

c. No es factorizable, no se pueden factorizar suma de cuadrados.

d. Es factorizable. e. Es factorizable.

f. Es factorizable.

8. a. Falso, no se pueden factorizar suma de cuadrados.

b. Falso, no se puede solo con tres, se puede con cualquier número impar siempre que sean iguales en el binomio.

c. Verdadero, solo es factorizable la diferencia

d. Verdadero, es posible factorizar.

e. Falso, se alternan cuando el binomio a factorizar es positivo

f. Falso, los exponentes del primer término disminuyen y los del segundo término aumentan.

Resolución de problemas

9. a. $144 - b^2 = (12 + b)(12 - b)$

b. $216 + n^3 = (6 + n)(36 - 6n + n^2)$

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Retome lo explicado en el tema de productos notables estudiado en la unidad anterior. Recuérdeles la definición de producto notable y a partir de ella, explíqueles que factorizar un trinomio cuadrado perfecto, es averiguar cuál es el producto notable al que corresponde dicho polinomio.

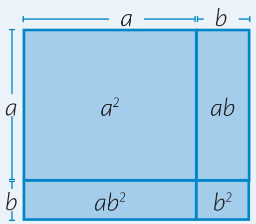
b. Trace varios cuadrados que representen gráficamente el cuadrado de la suma de dos cantidades, como se muestra en la figura. Cambie las letras en cada caso. Pídales a los estudiantes que enuncien la regla general que se cumple en todos los casos. Lleve a que concluyan que dicha representación corresponde a la de un trinomio cuadrado perfecto.

Actividades colaborativas

Forma grupos de 5 estudiantes y pida que resuelvan el problema que requieren la aplicación del factoreo de trinomios cuadrado perfecto.

El área de la figura es:

$$a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Ten en cuenta la figura y piensa: ¿De qué otra forma puede escribirse la expresión $a^2 + 2ab + b^2$?

Bloque de Álgebra y funciones

6 Factorización de trinomios cuadrados perfectos

Explora

Figura 1

El área de la pintura de Van Gogh está determinada por la expresión:

$$x^2 - 16x + 64$$

- ¿Cuál es la longitud de los lados de la pintura si se sabe que es cuadrada?

Para determinar los lados de la pintura se factoriza la expresión del área.

Identificamos que en este polinomio hay tres términos. El primero y el último son cuadrados perfectos y el valor central equivale al doble del producto de las raíces cuadradas del primero y tercer término; por eso se llama **trinomio cuadrado perfecto**.

Trinomio cuadrado perfecto

$$a^2 \pm 2ab + b^2$$

Cuadrado perfecto — Cuadrado perfecto

Doble producto de las raíces cuadradas de a^2 y b^2

Un **trinomio cuadrado perfecto** se factoriza como un binomio al cuadrado, así:

$$a^2 - ab + b^2 = (a - b)^2 \qquad a^2 + ab + b^2 = (a + b)^2$$

Al factorizar la expresión del área de la pintura se obtiene que:

$$x^2 - 16x + 64 = (x - 8)^2$$

Por lo tanto, la medida de los lados de la pintura de la Figura 1 es $(x - 8)$.

Ejemplo 1

Para calcular la longitud de los lados de un cuadrado cuya área es $a^2 + 14a + 49$:

1. Se hallan las raíces cuadradas de los cuadrados perfectos a^2 y 49. Esas raíces son a y 7, respectivamente. $\sqrt{a^2} = a ; \sqrt{49} = 7$
2. Se verifica que el doble producto de esas raíces es $14a$, que corresponde al segundo término del polinomio. $2(a \cdot 7) = 14a$
3. Se factoriza la expresión y se obtiene como resultado $(a + 7)^2$. $a^2 + 14a + 7 = (a^2 + 7)^2$

Por lo tanto, la longitud de cada lado del cuadrado es $(a + 7)$.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Determina cuáles de estos trinomios son cuadrados perfectos y factorízalos.

a. $4a^2 + 12ab + 9b^2$ b. $3a^2 + 30ab + 5b^2$

c. $36a^2 - 60ab + 25b^2$ d. $100a^2 + 90ab + 81b^2$

Solución:

a. Es un cuadrado perfecto, ya que las raíces del primer y tercer término son $2a$ y $3b$ y su doble producto es $2(2a)(3b) = 12ab$; es decir, es igual al segundo término. Luego, $4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$.

b. No es un cuadrado perfecto, ya que el primer y el tercer término no son cuadrados perfectos.

c. Es un cuadrado perfecto, ya que las raíces del primer y tercer término son $6a$ y $5b$ y su doble producto es $2(6a)(5b) = 60ab$; es decir, es igual al segundo término. Luego, $36a^2 - 60ab + 25b^2 = (6a - 5b)^2$.

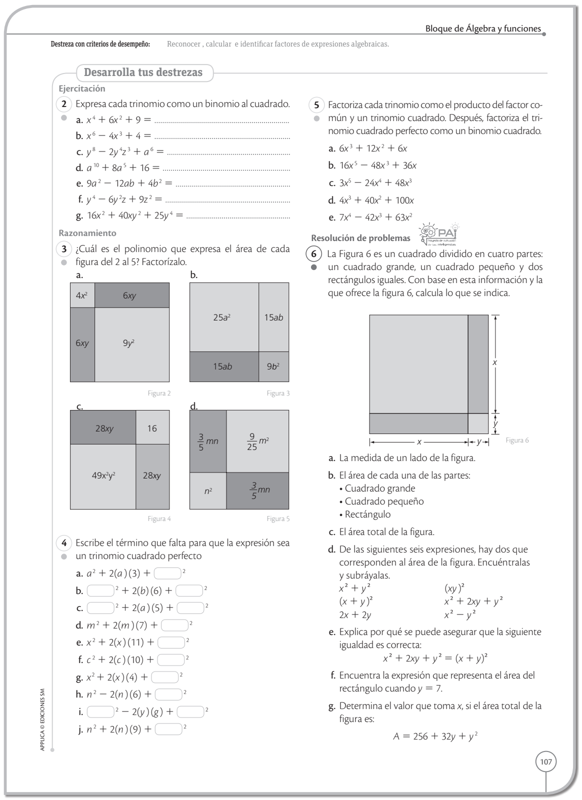
d. No es un cuadrado perfecto, ya que las raíces del primer y tercer término son $10a$ y $9b$, pero su doble producto es $2(10a)(9b) = 180ab$ y este no corresponde con el segundo término del trinomio.

CULTURA del Buen Vivir

La confianza

Una manera de ganar confianza en nuestras habilidades personales es enfrentarse a diferentes retos y poniendo en práctica las soluciones obtenidas.

- ¿De qué manera consideras que puedes ganar confianza en la resolución de actividades matemáticas?



Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Expresa cada trinomio como un binomio al cuadrado.

a. $x^4 + 6x^2 + 9 =$ ....

b. $x^6 - 4x^3 + 4 =$ ....

c. $y^8 - 2y^4z^3 + a^6 =$ ....

d. $a^{10} + 8a^5 + 16 =$ ....

e. $9a^2 - 12ab + 4b^2 =$ ....

f. $y^4 - 6y^2z + 9z^2 =$ ....

g. $16x^2 + 40xy^2 + 25y^4 =$ ....

Razonamiento

3 ¿Cuál es el polinomio que expresa el área de cada figura del 2 al 5? Factorízalo.

a. $4x^2$, $6xy$, $6xy$, $9y^2$

Figura 2

b. $25a^2$, $15ab$, $15ab$, $9b^2$

Figura 3

c. $28xy$, 16, $49x^2y^2$, $28xy$

Figura 4

d. $\frac{3}{5}mn$, $\frac{9}{25}m^2$, n^2, $\frac{3}{5}mn$

Figura 5

4 Escribe el término que falta para que la expresión sea un trinomio cuadrado perfecto

a. $a^2 + 2(a)(3) + \square^2$

b. $\square^2 + 2(b)(6) + \square^2$

c. $\square^2 + 2(a)(5) + \square^2$

d. $m^2 + 2(m)(7) + \square^2$

e. $x^2 + 2(x)(11) + \square^2$

f. $c^2 + 2(c)(10) + \square^2$

g. $x^2 + 2(x)(4) + \square^2$

h. $n^2 - 2(n)(6) + \square^2$

i. $\square^2 - 2(y)(g) + \square^2$

j. $n^2 + 2(n)(9) + \square^2$

5 Factoriza cada trinomio como el producto del factor común y un trinomio cuadrado. Después, factoriza el trinomio cuadrado perfecto como un binomio cuadrado.

a. $6x^3 + 12x^2 + 6x$

b. $16x^5 - 48x^3 + 36x$

c. $3x^5 - 24x^4 + 48x^3$

d. $4x^3 + 40x^2 + 100x$

e. $7x^4 - 42x^3 + 63x^2$

Resolución de problemas

6 La Figura 6 es un cuadrado dividido en cuatro partes: un cuadrado grande, un cuadrado pequeño y dos rectángulos iguales. Con base en esta información y la que ofrece la figura 6, calcula lo que se indica.

x, y

Figura 6

a. La medida de un lado de la figura.

b. El área de cada una de las partes:
- Cuadrado grande
- Cuadrado pequeño
- Rectángulo

c. El área total de la figura.

d. De las siguientes seis expresiones, hay dos que corresponden al área de la figura. Encuéntralas y subráyalas.

$x^2 + y^2$ $\quad$ $(xy)^2$

$(x + y)^2$ $\quad$ $x^2 + 2xy + y^2$

$2x + 2y$ $\quad$ $x^2 - y^2$

e. Explica por qué se puede asegurar que la siguiente igualdad es correcta:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

f. Encuentra la expresión que representa el área del rectángulo cuando $y = 7$.

g. Determina el valor que toma x, si el área total de la figura es:

$$A = 256 + 32y + y^2$$

107

Ejercitación

2. a. $(x^2 + 3)^2$ b. $(x^3 - 2)^2$

c. $(y^4 - z^3)^2$ d. $(a^5 + 4)^2$

e. $(3a - 2b)^2$ f. $(y^2 - 3z)^2$

g. $(4x + 5y^2)^2$

Razonamiento

3. a. $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$

b. $25a^2 + 30ab + 9b^2 = (5a + 3b)^2$

c. $49x^2y^2 + 56xy + 16 = (7x + 4)^2$

d. $\frac{9}{25}m^2 + \frac{6}{5}mn + n^2 = (\frac{3}{5}m + n)^2$

4. a. $a^2 + 2(a)(3) + \boxed{3}^2$

b. $\boxed{b}^2 + 2(b)(6) + \boxed{6}^2$

c. $\boxed{a}^2 + 2(a)(5) + \boxed{5}^2$

d. $m^2 + 2(m)(7) + \boxed{7}^2$

e. $x^2 + 2(x)(11) + \boxed{11}^2$

f. $c^2 + 2(c)(10) + \boxed{10}^2$

g. $x^2 + 2(x)(4) + \boxed{4}^2$

h. $n^2 - 2(n)(6) + \boxed{6}^2$

i. $\boxed{y}^2 - 2(y)(g) + \boxed{g}^2$

j. $n^2 + 2(n)(9) + \boxed{9}^2$

5. a. $6x(x^2 + 2x + 1)$ $\quad$ $6x(x + 1)^2$

b. $4x(4x^4 + 12x^2 + 9)$ $\quad$ $4x(2x^2 - 3)^2$

c. $3x^3(x^2 - 8x + 16)$ $\quad$ $3x^3(x - 4)^2$

d. $4x(x^2 + 10x + 25)$ $\quad$ $4x(x + 5)^2$

e. $7x^2(x^2 - 6x + 9)$ $\quad$ $7x^2(x - 3)^2$

Resolución de problemas

6. a. $x + y$

b. Área de cuadrado grande x^2

Área de cuadrado pequeño y^2

Área rectángulo xy

c. $x^2 + 2xy + y^2$

d. $(x + y)^2$ $\quad$ $x^2 + 2xy + y^2$

e. Es la expresión factorizada.

f. $x^2 + 14x + 49$

g. $x = 16$

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Plantee el problema del área de la puerta y escuche las posibles soluciones de cáles serán sus lados.

b. Haga notar que el primer término y el tercer término son cuadrados perfectos

c. Recuerde la definición de producto notable y a partir de ella, explíqueles que factorizar un trinomio cuadrado perfecto, es averiguar cuál es el producto notable al que corresponde dicho polinomio y que en algunos casos pese a tener cuadrados perfectos el segundo término no es el doble producto del primero y tercer término, en este caso debemos sumar y restar un número que le permita convertirle en trinomio cuadrado perfecto. Se completa el ejercicio al resolver una diferencia de cuadrados.

Actividades TIC

En el link:

http://jucagi.com/ovas/CMatematicasFactorizacion/OVA-Factorizacion.swf

Descubre la información y utiliza esta herramienta para factorizar trinomios.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

Factorice los trinomios

a . $4x^4 - 29x^2y^2 + 25y^4$ b . $x4 + 2x^2 + 9$

c . $9x^4 + 8x^2y^2 + 16y^4$ d. $100x^4 + 19x^2y^2 + 49y^4$

Bloque de Álgebra y funciones

7 Factorización de trinomios cuadrados perfectos por adición y sustracción

Explora

El área de una puerta rectangular se expresa con el siguiente polinomio:

$$x^4 + x^2 + 1$$

- ¿Cuál es la factorización del polinomio que expresa la medida de la superficie de la puerta?

En el trinomio $x^4 + x^2 + 1$, el primer y tercer términos son cuadrados perfectos, pero el segundo término no es $2x^2$, por lo que el trinomio no es cuadrado perfecto.

Para factorizar este polinomio, se puede seguir un proceso particular, tal como se presenta a continuación:

1. Se adiciona y se sustrae x^2, es decir, se adiciona 0, pero escrito de la forma $(x^2 - x^2)$.
   $x^4 + x^2 + 1 =$
   $(x^4 + x^2 + 1) + (\boldsymbol{x^2 - x^2})$

2. Se aplica la propiedad asociativa de la adición y se obtiene un trinomio cuadrado perfecto, que se ubica en el paréntesis.
   $x^4 + x^2 + 1 =$
   $(x^4 + x^2 + 1 \boldsymbol{+ x^2}) - x^2 =$
   $(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$

3. Se expresa el trinomio cuadrado perfecto como un binomio al cuadrado.
   $x^4 + x^2 + 1 =$
   $(x^4 + 2x^2 + 1) - x^2 =$
   $(x^2 + 1)^2 - x^2$

4. Se factoriza esta diferencia de cuadrados y se ordenan los términos de cada factor.
   $x^4 + x^2 + 1 =$
   $(x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x) =$
   $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

Ten en cuenta

Un trinomio cuadrado perfecto es de la forma $a^2 \pm 2ab + b^2$ y se puede expresar como $(a \pm b)^2$.

Una diferencia de cuadrados es de la forma $a^2 - b^2$ y se puede factorizar como $(a + b)(a - b)$.

Los **trinomios de la forma $\boldsymbol{a^2 \pm mab + b^2}$**, con m distinto de 2, satisfacen parcialmente las características de los trinomios cuadrados perfectos. El primer y tercer términos son cuadrados perfectos, pero el segundo término no es el doble producto de sus raíces cuadradas.

Para factorizar esos trinomios, se adiciona y se sustrae al trinomio dado un término de la forma nab, de manera que $mab + nab = \pm 2ab$. Si el trinomio original es factorizable, se obtiene la diferencia entre un trinomio cuadrado perfecto y un cuadrado perfecto, lo que finalmente es factorizado como diferencia de cuadrados.

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Determina por qué cada trinomio no es un trinomio cuadrado perfecto.

a. $x^4 - 11x^2y^2 + y^4$

b. $x^4 - 6x^2 + 1$

c. $x^6 - 4x^3 + 2$

d. $25x^4 + 54x^2y^2 + 49b^4$

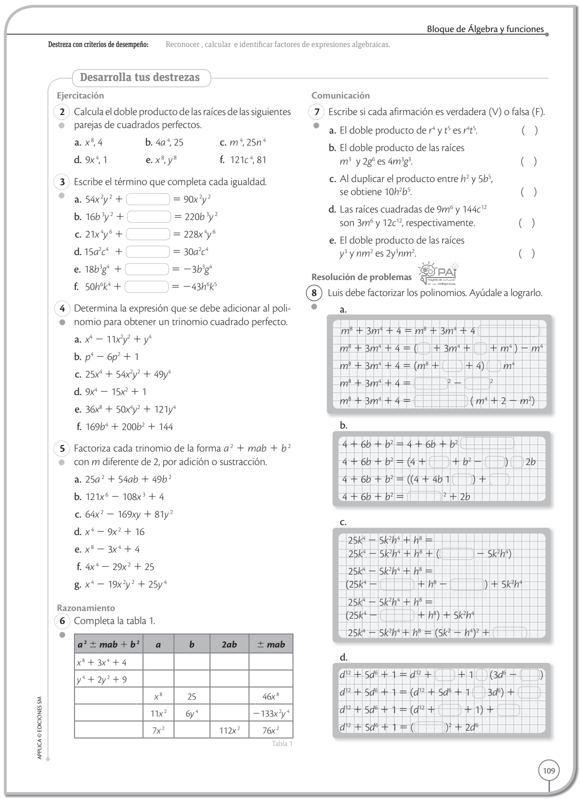
Solución:

a. x^4 y y^4 son cuadrados perfectos. El doble producto de sus raíces cuadradas es $2x^2y^2$, y no corresponde al segundo término del trinomio.

b. x^4 y 1 son cuadrados perfectos. El doble producto de sus raíces cuadradas es $2x^2$, y no corresponde al segundo término del trinomio.

c. x^6 es el único término del trinomio que es un cuadrado perfecto.

d. Los términos $25x^4$ y $49b^4$ son cuadrados perfectos. El doble producto de sus raíces cuadradas es $2(5x^2)(7b^2) = 70x^2b^2$ y esta expresión es diferente al segundo término del trinomio.



Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Calcula el doble producto de las raíces de las siguientes parejas de cuadrados perfectos.

a. $x^8, 4$ b. $4a^4, 25$ c. $m^4, 25n^4$
d. $9x^4, 1$ e. x^8, y^8 f. $121c^4, 81$

3 Escribe el término que completa cada igualdad.

a. $54x^2y^2 + \square = 90x^2y^2$
b. $16b^3y^2 + \square = 220b^3y^2$
c. $21x^4y^6 + \square = 228x^4y^6$
d. $15a^2c^4 + \square = 30a^2c^4$
e. $18b^3g^4 + \square = -3b^3g^4$
f. $50h^6k^4 + \square = -43h^6k^5$

4 Determina la expresión que se debe adicionar al polinomio para obtener un trinomio cuadrado perfecto.

a. $x^4 - 11x^2y^2 + y^4$
b. $p^4 - 6p^2 + 1$
c. $25x^4 + 54x^2y^2 + 49y^4$
d. $9x^4 - 15x^2 + 1$
e. $36x^8 + 50x^4y^2 + 121y^4$
f. $169b^4 + 200b^2 + 144$

5 Factoriza cada trinomio de la forma $a^2 + mab + b^2$ con m diferente de 2, por adición o sustracción.

a. $25a^2 + 54ab + 49b^2$
b. $121x^6 - 108x^3 + 4$
c. $64x^2 - 169xy + 81y^2$
d. $x^4 - 9x^2 + 16$
e. $x^8 - 3x^4 + 4$
f. $4x^4 - 29x^2 + 25$
g. $x^4 - 19x^2y^2 + 25y^4$

Razonamiento

6 Completa la tabla 1.

$a^2 \pm mab + b^2$	a	b	$2ab$	$\pm mab$
$x^8 + 3x^4 + 4$				
$y^4 + 2y^2 + 9$				
	x^8	25		$46x^8$
	$11x^2$	$6y^4$		$-133x^2y^4$
	$7x^2$		$112x^2$	$76x^2$

Tabla 1

Comunicación

7 Escribe si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a. El doble producto de r^4 y t^5 es r^4t^5. ( )
b. El doble producto de las raíces m^3 y $2g^6$ es $4m^3g^3$. ( )
c. Al duplicar el producto entre h^2 y $5b^5$, se obtiene $10h^2b^5$. ( )
d. Las raíces cuadradas de $9m^6$ y $144c^{12}$ son $3m^6$ y $12c^{12}$, respectivamente. ( )
e. El doble producto de las raíces y^3 y nm^2 es $2y^3nm^2$. ( )

Resolución de problemas

PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

8 Luis debe factorizar los polinomios. Ayúdale a lograrlo.

a.
$m^8 + 3m^4 + 4 = m^8 + 3m^4 + 4 \square$
$m^8 + 3m^4 + 4 = (\square + 3m^4 + \square + m^4) - m^4$
$m^8 + 3m^4 + 4 = (m^8 + \square + 4) \square m^4$
$m^8 + 3m^4 + 4 = \square^2 - \square^2$
$m^8 + 3m^4 + 4 = \square (m^4 + 2 - m^2)$

b.
$4 + 6b + b^2 = 4 + 6b + b^2 \square$
$4 + 6b + b^2 = (4 + \square + b^2 - \square) \square 2b$
$4 + 6b + b^2 = ((4 + 4b 1 \square) + \square$
$4 + 6b + b^2 = \square^2 + 2b$

c.
$25k^4 - 5k^2h^4 + h^8 =$
$25k^4 - 5k^2h^4 + h^8 + (\square - 5k^2h^4)$
$25k^4 - 5k^2h^4 + h^8 =$
$(25k^4 - \square + h^8 - \square) + 5k^2h^4$
$25k^4 - 5k^2h^4 + h^8 =$
$(25k^4 - \square + h^8) + 5k^2h^4$
$25k^4 - 5k^2h^4 + h^8 = (5k^2 - h^4)^2 + \square$

d.
$d^{12} + 5d^6 + 1 = d^{12} + \square + 1 \square (3d^6 - \square)$
$d^{12} + 5d^6 + 1 = (d^{12} + 5d^6 + 1 \square 3d^6) + \square$
$d^{12} + 5d^6 + 1 = (d^{12} + \square + 1) + \square$
$d^{12} + 5d^6 + 1 = (\square)^2 + 2d^6$

Ejercitación

2. a. $8x^4$ b. $20a^2$
c. $10m^2n^2$ d. $6x^2$
e. $2x^4y^4$ f. $198c^2$

3. a. $36x^2y^2$ b. $204b^3y^2$
c. $207x^4y^6$ d. $15a^2c^4$
e. $-21b^3g^4$ f. $-93h^2k^5$

4. a. $9x^2y^2$ b. $4p^2$
c. $16x^2y^2$ d. $9x^2$
e. $82x^4y^2$ f. $112b^2$

5. a. $(5a + 7b)^2 - 16ab$
b. $(11x^3 - 2)^2 - 20x^3$
c. $(8x - 9y)^2 - 25xy$
d. $(x^2 - 4)^2 - x^2$
e. $(x^4 + 2)^2 - 7x^4$
f. $(2x^2 - 5)^2 - 9x^2$
g. $(x^2 - 5y^2)^2 - 9x^2y^2$

6.

$a^2 \pm mab + b^2$	a	b	$2ab$	$\pm mab$
$x^8 + 3x^4 + 4$	x^4	2	$4x^4$	x^4
$y^4 + 2y^2 + 9$	y^2	3	$6y^2$	$4y^2$
$x^{16} + 4x^8 + 625$	x^8	25	$50x^8$	$46x^8$
$121x^4 - x^2y^4 + 36y^8$	$11x^2$	$6y^4$	$132x^2y^4$	$+133x^2y^4$
$49x^4 + 36x^2 + 64$	$7x^2$	8	$112x^2$	$76x^2$

Comunicación

7. a. Falso, el doble del producto es $2r^4t^5$
b. Falso, el doble del producto es $4m^3g^6$
c. Verdadero.
d. Falso, las raíces cuadradas son $3m^3$ y $12c^6$
e. Verdadero

Resolución de problemas

8. a. $m^8 + 3m^4 + 4$
$(m^8 + 3m^4 + m^4 + 4) - m^4$
$(m^8 + 4m^4 + 4) - m^4$
$(m^4 + 2)^2 - m^4$
$(m^4 + 2 + m^2)(m^4 + 2 - m^2)$

b. $4 + 6b + b^2$
$(4 + 6b + b^2 - 2b) + 2b$
$(4 + 4b + b^2) + 2b$
$(2 + b)^2 + 2b$

c. $25k^4 - 5k^2h^4 + h^8$
$(25k^4 - 5k^2h^4 - 5k^2h^4 + h^8) + 5k^2h^4$
$(25k^4 - 10k^2h^4 + h^8) + 5k^2h^4$
$(5k^2 - h^4)^2 + 5k^2h^4$

d. $d^{12} + 5a^6 + 1 - (3d^6 - 2d^6)$
$(d^{12} + 5a^6 + 1 - 3d^6) + 2d^6$
$(d^{12} + 2a^6 + 1) + 2d^6$
$(a^6 + 1)^2 + 2d^6$

Libro del alumno

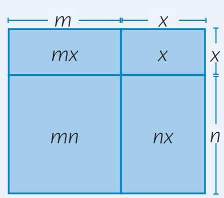
Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Escriba varios trinomios de las formas $x^{2n} + bx + c$ y $ax^{2n} + bx^n + c$ y solicite a los y las estudiantes que los clasifiquen. Luego pida encontrar números que tengan cierta suma y cierto producto. Por ejemplo, pídales encontrar dos números que sumados den 7 y su producto sea 10. Proponga otros ejercicios de esta clase.

b. Explique que la factorización de un trinomio de la forma $x^{2n} + bx + c$ busca únicamente factores que tengan coeficientes enteros. Sin embargo debe aclararles que no siempre un trinomio de esa forma se puede factorizar. Por ejemplo el trinomio $x^2 + 3x + 4$ en donde los posibles números enteros cuyo producto es 4 son: (1, 4, 2, y 2); (-1. –4 ; –2 y –2) y en ninguno de los casos se verifica una suma igual a 3. Luego no se puede factorizar como producto de binomios con coeficientes enteros. En el caso del trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ hágales notar que el procedimiento es el mismo y la única diferencia es la amplificación que se realiza por el coeficiente de la variable x^{2n}.

Actividades colaborativas

Forma grupos de 5 estudiantes y pida que resuelvan el problema. La figura muestra el área de una fábrica de confecciones.



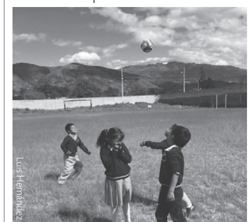
Busca dos maneras de expresar el área total de la fábrica. Intercambia tu respuestas con dos de tus compañeros y realiza las correcciones pertinentes.

Bloque de Álgebra y funciones

8 Factorización de trinomios de la forma $x^{2n} + bx^n + c$

Explora

La altura que alcanza un balón al ser lanzado se expresa como $x^2 - 7x + 10$.



Luis Hernández

- ¿Cuál es la expresión factorizada que corresponde a la altura del balón en el tiempo x?

Para expresar la altura del balón en forma factorizada, se buscan dos números p y q, tales que $p + q = -7$ y $p \cdot q = 10$.

Se determina el conjunto de factores de 10. Son: 1, 2, 5, 10, −1, −2, −5 y −10.

Se eligen aquellos factores que cumplan las condiciones dadas. Los dos números son −2 y −5, porque $-2 + (-5) = -7$ y $-2 \cdot -5 = 10$.

Luego, la expresión factorizada de $x^2 - 7x + 10$ es $(x - 2)(x - 5)$.

Un **trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$**, con n como un número entero, es factorizable si existen dos números p y q que cumplen las condiciones $p + q = b$ y $pq = c$. En este caso, el trinomio se expresa como el producto de dos binomios con primer término x^n y como segundos términos los números p y q. Es decir: $x^{2n} + bx^n + c = (x^n + p)(x^n + q)$

Actividades resueltas

Ejercitación

1. Halla p y q para que satisfagan las condiciones dadas:

a. $pq = 12$ y $p + q = 8$

b. $pq = -18$ y $p + q = 3$

Solución:

a. Se determinan las parejas de factores de 12 y se halla la suma de cada una.

Factores		Suma
p	q	$p+q$
1	12	13
2	**6**	**8**
3	4	7
−1	−12	−13
−2	−6	−8
−3	−4	−7

Tabla 1

Los números que satisfacen la condición son 2 y 6.

b. Se hallan las parejas de factores de −18 y se determina la suma de cada pareja.

Factores		Suma
p	q	$p+q$
1	−18	−17
2	−9	−7
3	−6	−3
−1	18	17
−2	9	7
−3	**6**	**3**

Tabla 2

Los números que satisfacen la condición son −3 y 6.

Razonamiento

2. Encuentra y factoriza el trinomio que sea de la forma $x^{2n} + (p + q)x^n + pq$.

a. $x^4 + 8x^2 - 20$

b. $x^2 + 7x - 3$

Solución:

a. $x^4 + 8x^2 - 20$ es de la forma $x^{2n} + (p + q)x^n + pq$, porque para $n = 2$. Se tiene que:

$$x^4 + 8x^2 - 20 =$$
$$x^{2n} + 8x^n - 20$$

Existen dos números, tales que:

$pq = -20$ y $p + q = 8$

$$10(-2) = -20$$
$$10 + (-2) = 8$$

Luego, $x^4 + 8x^2 - 20 = (x^2 + 10)(x^2 - 2)$

b. $x^2 + 7x - 3$ no es de la forma $x^{2n} + (p + q)x^n + pq$, porque el número 3 tiene los factores que se muestran en la tabla 3 y ninguna pareja cumple la condición $p + q = 7$.

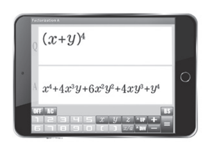
Factores		Suma
p	q	$p+q$
1	−3	−2
−1	3	2

Tabla 3

App

Factorización de trinomios de la forma $ax^{2n} + b^{xn} + c$

Abre la aplicación *FactorizationA* y utilízala para verificar o comparar tus soluciones con las soluciones dadas por la aplicación.



Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Expresa cada polinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$. Después, factorízalos de la forma $(x^n + p)(x^n + q)$.

a. $x^2 + 2x - 35 =$ ....
b. $x^4 + 4x^2 - 5 =$ ....
c. $x^6 + 6x^3 + 9 =$ ....
d. $x^8 + 13x^4 + 42 =$ ....
e. $x^2 - 14x + 33 =$ ....
f. $x^2 - 10x + 9 =$ ....
g. $x^4 + 7x^2 + 10 =$ ....
h. $x^4 - x^2 - 12 =$ ....
i. $x^6 + 2x^3 - 15 =$ ....
j. $x^4 + 10x^2 + 24 =$ ....
k. $x^8 - 10x^4 + 24 =$ ....
l. $x^4 + 26x^2 + 144 =$ ....
m. $x^{10} - x^5y^5 - 20y^{10} =$ ....
n. $x^6 - 6x^3y^3 - 7y^6 =$ ....

Razonamiento

4 Completa la Tabla 4 con los números p y q que cumplan las condiciones dadas.

p	q	$p + q$	pq
		5	6
		3	−40
		−4	−21
		−6	−40
		−5	−24
		18	32

Tabla 4

5 Completa los siguientes trinomios para que las igualdades sean verdaderas.

a. $x^2 + \square x - \square = (x + 6)(x - 3)$
b. $m^2 + \square m - \square = (m + 9)(m - 8)$
c. $1 - \square a - \square a^2 = (1 - 8a)(1 + 6a)$
d. $x^4 - \square x^2 - \square = (x^2 - 3)(x^2 + 1)$
e. $y^2 - \square y - \square = (y - 24)(y + 3)$
f. $a^2 + \square ab - \square b^2 = (a + 5b)(a - 3b)$
g. $m^2 - \square m - \square = (m - 7)(m + 4)$

6 Elige los términos p y q, de modo que se cumpla que $x^{2n} + (p + q)x^n + pq$.

a. $x^2 + 5x + 6$	5	1	3	2	4
b. $x^4 + 6x^2 + 8$	2	−7	4	2	−1
c. $x^2 + 23x + 120$	2	15	−6	8	−9
d. $x^2 + 13x - 30$	1	−5	15	−4	−2

Resolución de problemas

7 El área de la superficie plana de un modelo de mesa rectangular está dada por la expresión $x^2 + 6x + 5$.

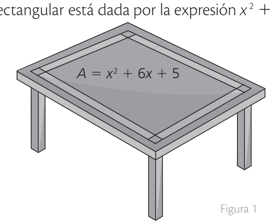
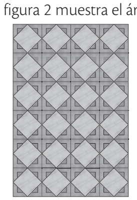


Figura 1

¿Cuáles serán las expresiones algebraicas para las medidas de sus lados?

8 La figura 2 muestra el área de un piso de madera.



$A = x^2 + 12x + 27$

Figura 2

¿Cuáles son las expresiones que representan la base y la altura de esa superficie?

9 Observa la evaluación de Mateo y después responde.

Nombre: Mateo Suárez 2/5

1. $x^8 + 5x^4 + 4 = (x^4 + 4)(x^4 + 1)$
2. $x^6 - 6x^3 - 7 = (x^3 - 7)(x^3 + 1)$
3. $a^2 - 4ab - 21b^2 = (a - 8b)(a + 3b)$
4. $x^2y^2 + xy - 12 = (xy + 4)(xy - 3)$
5. $m^2 + mn - 56n^2 = (m + 8n)(m - 7n)$

Mateo afirma que su calificación es incorrecta. ¿Por qué? ¿Cuál es la calificación correcta?

Ejercitación

3. a. $(x + 7)(x - 5)$ b. $(x^2 + 5)(x^2 - 1)$
c. $(x^3 + 3)^2$ d. $(x^4 + 7)(x^4 + 6)$
e. $(x^2 - 11)(x - 3)$ f. $(x - 9)(x - 1)$
g. $(x^2 + 5)(x^2 + 2)$ h. $(x^2 - 4)(x^2 + 3)$
i. $(x^3 + 5)(x^3 - 3)$ j. $(x^2 + 6)(x^2 + 4)$
k. $(x^4 - 12)(x^4 + 2)$ l. $(x^4 + 18)(x^4 + 8)$
m. $(x^5 - 5y^5)(x^5 + 4y^5)$ n. $(x^3 - 7y^3)(x^3 + y^3)$

Razonamiento

4.

p	q
3	2
8	−5
−7	3
−10	4
−8	3
16	2

5. a. $x^2 + 3x - 18$ b. $m^2 + m - 72$
c. $1 - 2a - 48a^2$ d. $x^4 - 2x^2 - 3$
e. $y^2 - 21y - 72$ f. $a^2 + 2ab - 15b^2$
g. $m^2 - 3m - 28$

6. a. 3 y 2 b. 4 y 2
c. 15 y 8 d. 15 y − 2

Resolución de problemas

7. $(x + 3)(x + 2)$

8. $(x + 9)(x + 3)$

Comunicación

9. Mateo tiene razón, su nota debía ser $\frac{4}{5}$ el único que estaba mal era el ejercicio tres.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

La expresión $4x^2 - 50x + 150$ corresponde a un trinomio de forma $ax^{2n} + bx^n + c$, y su factorización es:

$$4x^2 - 50x + 150 = (x - 5)(4x - 30).$$

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$, se realiza el siguiente procedimiento:

- Se multiplica y se divide el polinomio por el coeficiente del primer término:

$$\frac{4}{4}(4x^2 - 50x + 150)$$

- Se realizan los productos del primer y tercer término y se expresa en la forma:

$$\frac{(4x)^2 - 50(4x) + 600}{4}$$

- Se factoriza el numerador de la forma $(ax + p)(ax + q)$, donde: $p + q = b$ y $pq = ac$:

$$\frac{(4x - 20)(4x - 30)}{4}$$

- Se simplifica $\dfrac{4(x - 5)(4x - 30)}{4} = (x - 5)(4x - 30)$

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Factoriza los trinomios planteados.

   a. $8x^2 - 2x - 15$

   b. $13x^2 - 7xy - 6y^2$

   c. $3x^2 + 8x + 2$

   d. $10a^2 + 7ax - 12x^2$

9 Factorización de trinomios de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$

Explora

Las utilidades de una empresa procesadora de alimentos se modelan con la expresión $U = 3x^2 - 35x + 100$.


SM Ediciones

- ¿Para cuáles valores de x la compañía no tendría pérdidas ni ganancias?

La expresión $U = 3x^2 - 35x + 100$ corresponde a un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$. Para factorizar este trinomio, se multiplica y se divide por 3.

$$\frac{3}{3}(3x^2 - 35x + 100,) = \frac{3^2x^2 - 3(35x) + 300}{3}$$

El numerador se expresa en la forma $y^{2n} + by^n + d$, así:

$$\frac{(3x)^2 - 35(3x) + 300}{3}$$

Para factorizar el denominador, se buscan dos números p y q para los cuales $p + q = -35$ y $pq = 300$. Esos números son -15 y -20. Es decir:

$$\frac{(3x)^2 - 35(3x) + 300}{3} = \frac{(3x - 15)(3x - 20)}{3}$$

Se obtiene el factor común del primer factor del numerador y se simplifican términos:

$$\frac{3(x - 5)(3x - 20)}{3} = (x - 5)(3x - 20).$$

Al resolver la ecuación $(x - 5)(3x - 20) = 0$, se conocen los valores de x, en los que la empresa no tendría pérdidas ni ganancias. Esto es con $x = 5$ o $x = \frac{20}{3}$.

Un **trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^{2n} + c$,** con un número entero n, se factoriza transformándolo en un polinomio de la forma $y^{2n} + by^n + d$.

Ten en cuenta

$a \cdot b = 0$

si $a = 0$ o $b = 0$

Para factorizar un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ se sigue este procedimiento:

1. Se multiplica y se divide el polinomio por el coeficiente del primer término. $\frac{a}{a}(ax^{2n} + bx^n + c) = \frac{a^2x^{2n} + a(bx^n) + ac}{a}$
2. Se expresa el numerador como un trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$. $\frac{(ax^n)^2 + b(ax^n) + ac}{a}$
3. Se factoriza la expresión del numerador como $(ax + p)(ax + q)$, donde $p + q = b$ y $pq = ac$. $\frac{(ax^n + p)(ax^n + q)}{a}$
4. Cuando sea posible, se simplifica a.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Factoriza el polinomio $5x^2 + 6x + 1$.

Solución:

a. Se multiplica el polinomio por $\frac{5}{5}$. $\longrightarrow \frac{5^2x^2 + 5(6x) + 5}{5}$

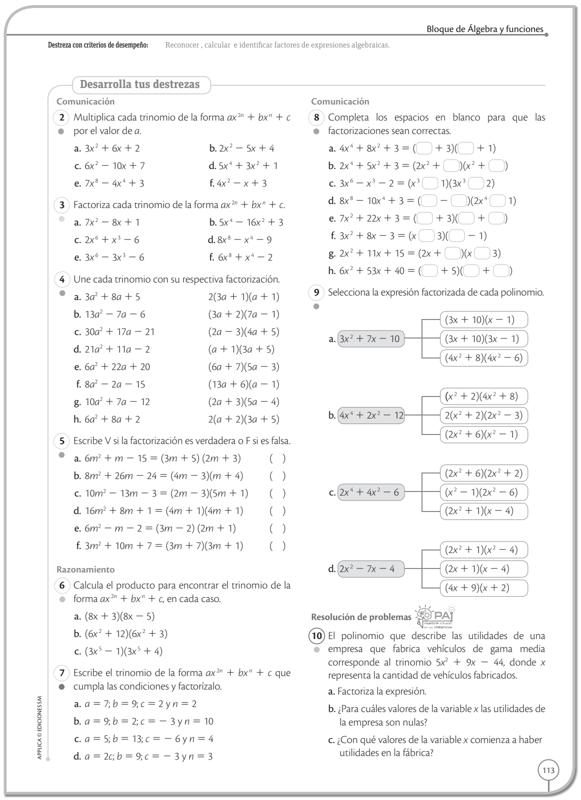
b. Se expresa el numerador de la forma $y^2 + by + d$. $\longrightarrow \frac{(5x)^2 + 6(5x) + 5}{5}$

c. Se buscan p y q, tales que $pq = 5$ y $p + q = 6$. $\longrightarrow p = 5$ y $q = 1$

d. Se expresa el trinomio factorizado. $\longrightarrow \frac{(5x + 5)(5x + 1)}{5}$

e. Si es posible, se saca factor común. $\longrightarrow \frac{5(x + 1)(5x + 1)}{5}$

f. Se simplifica y se expresa el polinomio factorizado. $\longrightarrow (x + 1)(5x + 1)$


Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Multiplica cada trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ por el valor de a.

a. $3x^2 + 6x + 2$ b. $2x^2 - 5x + 4$
c. $6x^2 - 10x + 7$ d. $5x^4 + 3x^2 + 1$
e. $7x^8 - 4x^4 + 3$ f. $4x^2 - x + 3$

3 Factoriza cada trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$.

a. $7x^2 - 8x + 1$ b. $5x^4 - 16x^2 + 3$
c. $2x^6 + x^3 - 6$ d. $8x^8 - x^4 - 9$
e. $3x^6 - 3x^3 - 6$ f. $6x^8 + x^4 - 2$

4 Une cada trinomio con su respectiva factorización.

a. $3a^2 + 8a + 5$	$2(3a + 1)(a + 1)$
b. $13a^2 - 7a - 6$	$(3a + 2)(7a - 1)$
c. $30a^2 + 17a - 21$	$(2a - 3)(4a + 5)$
d. $21a^2 + 11a - 2$	$(a + 1)(3a + 5)$
e. $6a^2 + 22a + 20$	$(6a + 7)(5a - 3)$
f. $8a^2 - 2a - 15$	$(13a + 6)(a - 1)$
g. $10a^2 + 7a - 12$	$(2a + 3)(5a - 4)$
h. $6a^2 + 8a + 2$	$2(a + 2)(3a + 5)$

5 Escribe V si la factorización es verdadera o F si es falsa.

a. $6m^2 + m - 15 = (3m + 5)(2m + 3)$ ( )
b. $8m^2 + 26m - 24 = (4m - 3)(m + 4)$ ( )
c. $10m^2 - 13m - 3 = (2m - 3)(5m + 1)$ ( )
d. $16m^2 + 8m + 1 = (4m + 1)(4m + 1)$ ( )
e. $6m^2 - m - 2 = (3m - 2)(2m + 1)$ ( )
f. $3m^2 + 10m + 7 = (3m + 7)(3m + 1)$ ( )

Razonamiento

6 Calcula el producto para encontrar el trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$, en cada caso.

a. $(8x + 3)(8x - 5)$
b. $(6x^2 + 12)(6x^2 + 3)$
c. $(3x^5 - 1)(3x^5 + 4)$

7 Escribe el trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ que cumpla las condiciones y factorízalo.

a. $a = 7; b = 9; c = 2$ y $n = 2$
b. $a = 9; b = 2; c = -3$ y $n = 10$
c. $a = 5; b = 13; c = -6$ y $n = 4$
d. $a = 2c; b = 9; c = -3$ y $n = 3$

Comunicación

8 Completa los espacios en blanco para que las factorizaciones sean correctas.

a. $4x^4 + 8x^2 + 3 = (\square + 3)(\square + 1)$
b. $2x^4 + 5x^2 + 3 = (2x^2 + \square)(x^2 + \square)$
c. $3x^6 - x^3 - 2 = (x^3 \square 1)(3x^3 \square 2)$
d. $8x^8 - 10x^4 + 3 = (\square - \square)(2x^4 \square 1)$
e. $7x^2 + 22x + 3 = (\square + 3)(\square + \square)$
f. $3x^2 + 8x - 3 = (x \square 3)(\square - 1)$
g. $2x^2 + 11x + 15 = (2x + \square)(x \square 3)$
h. $6x^2 + 53x + 40 = (\square + 5)(\square + \square)$

9 Selecciona la expresión factorizada de cada polinomio.

a. $3x^2 + 7x - 10$: $(3x + 10)(x - 1)$; $(3x + 10)(3x - 1)$; $(4x^2 + 8)(4x^2 - 6)$
b. $4x^4 + 2x^2 - 12$: $(x^2 + 2)(4x^2 + 8)$; $2(x^2 + 2)(2x^2 - 3)$; $(2x^2 + 6)(x^2 - 1)$
c. $2x^4 + 4x^2 - 6$: $(2x^2 + 6)(2x^2 + 2)$; $(x^2 - 1)(2x^2 - 6)$; $(2x^2 + 1)(x - 4)$
d. $2x^2 - 7x - 4$: $(2x^2 + 1)(x^2 - 4)$; $(2x + 1)(x - 4)$; $(4x + 9)(x + 2)$

Resolución de problemas PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

10 El polinomio que describe las utilidades de una empresa que fabrica vehículos de gama media corresponde al trinomio $5x^2 + 9x - 44$, donde x representa la cantidad de vehículos fabricados.

a. Factoriza la expresión.
b. ¿Para cuáles valores de la variable x las utilidades de la empresa son nulas?
c. ¿Con qué valores de la variable x comienza a haber utilidades en la fábrica?

APPLICA © EDICIONES SM

113

Comunicación

2. a. $9x^2 + 18x + 6$
b. $4x^2 - 10x + 8$
c. $36x^2 - 60x + 42$
d. $25x^2 + 15x + 5$
e. $49x^8 + 28x^4 + 21$
f. $16x^2 - 4x + 12$

3. a. $(x - 1)(7x - 1)$
b. $(x^2 - 3)(5x - 1)$
c. $(x^3 + 2)(2x^2 - 3)$
d. $(8x^4 - 9)(x^4 + 1)$
e. $(x^3 + 2)(2x^3 - 3)$
f. $(3x^2 + 2)(2x^4 - 1)$

4. a. $(3a + 5)(a + 1)$
b. $(a - 1)(13a + 6)$
c. $(6a + 7)(5a - 3)$
d. $(3a + 2)(7a - 1)$
e. $2(a + 2)(3a + 5)$
f. $(2a - 3)(4a + 5)$
g. $(2a + 3)(5a - 4)$

5. a. F b. F
c. V d. V
e. V f. F

Razonamiento

6. a. $8x^2 - 2x + 15$
b. $6x^4 + 15x^2 + 36$
c. $3x^{10} - 3x^5 - 4$

7. a. $7x^4 + 9x^2 + 2$
b. Respuesta libre.
c. $5x^8 + 13x^4 - 6$
d. $6x^6 - 9x^3 + 3$

Comunicación

8. a. $(\boxed{2x^2} + 3)(\boxed{2x^2} + 1)$
b. $(2x^2 + \boxed{3})(x^2 + \boxed{1})$
c. $(x^3 \boxed{-} 1)(3x^3 \boxed{+} 2)$
d. $(\boxed{4x^4} - \boxed{3})(2x^4 \boxed{-} 1)$
e. $(\boxed{x} + 3)(\boxed{7x} + \boxed{1})$
f. $(x \boxed{+} 3)(\boxed{3x} - 1)$
g. $(x + \boxed{3})(2x \boxed{+} 5)$
h. $(\boxed{6x} + 5)(\boxed{x} + \boxed{8})$

9. a. $(3x + 10)(x - 1)$
b. $2(x^2 + 2)(2x^2 - 3)$
c. $(x^2 - 1)(2x^2 - 6)$
d. $(x - 4)(2x + 1)$

Resolución de problemas

10. a. $(x + 4)(5x - 11)$
b. Con x igual -4
c. Con x $\frac{11}{5}$

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Proponga la situación planteada en el problema y analice las distintas formas que proponen los estudiantes para solucionarlo.

b. Aclare a los estudiantes que la regla de Ruffini se aplica especialmente a los polinomios de grado mayor que dos, como el polinomio que se muestra en el ejemplo de la página del libro.
Explique a qué se llama polinomio irreductible y proponga ejemplos de diferentes grados, en los cuales sea necesario aplicar la regla varias veces, con el fin de mostrarles que esos polinomios simples se pueden reducir a polinomios de segundo grado también irreductibles.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Descomponer en factores los siguientes polinomios.

   a. $x^3 + 7x^2 + 11x + 5$

   b. $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Actividades TIC

En el link:
http://conteni2.educarex.es/mats/12064/contenido/reproductor.swf
Descubre la información y utiliza esta herramienta para factorizar.

10 Factorización aplicando la regla de Ruffini

Explora

Una manera fácil de identificar si un polinomio es factorizable es averiguar si tiene raíces enteras; es decir, si existen valores de x que ocasionen que el resultado del polinomio sea cero.

- Según esto, ¿es posible factorizar el polinomio $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$?

Las raíces enteras de un polinomio cumplen con la propiedad de ser divisores del término independiente. En $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ el término independiente es -15, luego, se buscan sus divisores y se determina cuál o cuáles lo hacen cero (Tabla 1).

Divisor	Al reemplazarlo en el polinomio	¿Es raíz?
-1	$(-1)^3 + 3(-1)^2 - 13(-1) - 15 = 0$	Sí
-3	$(-3)^3 + 3(-3)^2 - 13(-3) - 15 \neq 0$	No
-5	$(-5)^3 + 3(-5)^2 - 13(-5) - 15 = 0$	Sí
-15	$(-15)^3 + 3(-15)^2 - 13(-15) - 15 \neq 0$	No
1	$(1)^3 + 3(1)^2 - 13(1) - 15 \neq 0$	No
3	$(3)^3 + 3(3)^2 - 13(3) - 15 = 0$	Sí
5	$(5)^3 + 3(5)^2 - 13(5) - 15 \neq 0$	No
15	$(15)^3 + 3(15)^2 - 13(15) - 15 \neq 0$	No

Tabla 1

Así, las raíces enteras son -1, -5 y 3 y sí es posible factorizar el polinomio.

Para **factorizar un polinomio de la forma $ax^n + bx^{n-1} + ... + tx + d$,** que tiene al menos una raíz exacta, se puede aplicar la **regla de Ruffini**.

Para factorizar el polinomio $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ con la regla de Ruffini:

1. Se halla o se elige una raíz r del polinomio.
   Por ejemplo: -1.
2. Se aplica la regla de Ruffini, dividiendo los coeficientes del polinomio entre la raíz entera elegida en el paso anterior.
$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 3 & -13 & -15 & -1 \\ & -1 & -2 & 15 & \\ \hline 1 & 2 & -15 & 0 & \end{array}$$
3. Se hallan los coeficientes y el grado del polinomio cociente. Se sabe que el grado del cociente es uno menor que el del polinomio inicial.
   Coeficientes: 1, 2 y -15
   Polinomio cociente:
   $x^2 + 2x - 15$
4. Se expresa el polinomio como el producto de $(x - r)$ por el cociente de la división del polinomio entre $(x - r)$.
   $(x + 1)(x^2 + 2x - 15)$
5. Si es posible, se factoriza el cociente aplicando nuevamente la regla de Ruffini o cualquiera de los métodos de factorización.
   En este caso, se factoriza el segundo factor como un trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$.
   Si $p = 5$ y $q = -3$, entonces:
   $x^2 + 2x - 15 =$
   $(x + 5)(x - 3)$

Así, la factorización máxima de $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$ es $(x + 1)(x + 5)(x - 3)$.

Ten en cuenta

Algunas veces no es posible factorizar un polinomio porque no tiene raíces enteras, por ejemplo: $x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 2 & \\ \hline 1 & 2 & 3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & -1 \\ & -1 & 0 & \\ \hline 1 & 0 & 1 & \end{array}$$

Actividad resuelta

Razonamiento

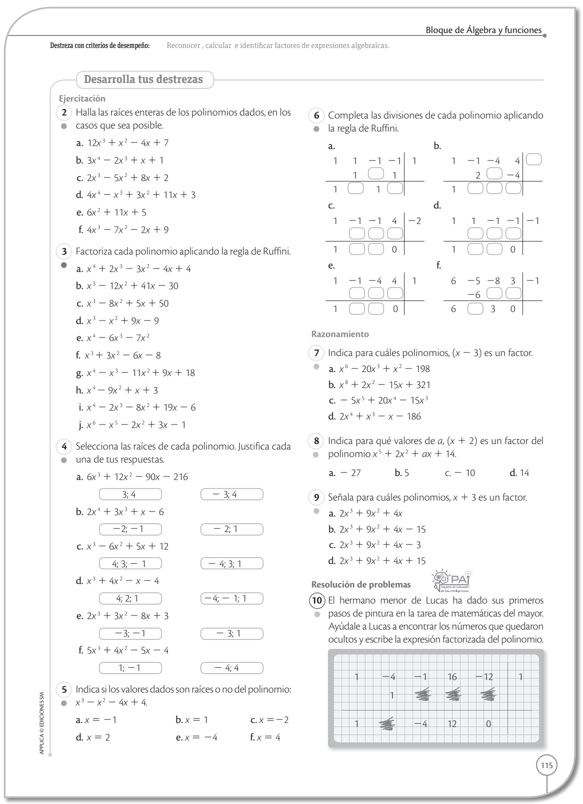
1 Determina si el polinomio $x^3 + x^2 - x - 1$ tiene raíz entera 1 y es factorizable:

Solución:

- Se aplica la regla de Ruffini y se determina que 1 es una raíz del polinomio, ya que el resultado es 0. Entonces: $Q(x) = (x - 1)(x^2 + 2x^2 + 1)$.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

- Además, el segundo factor es un trinomio cuadrado perfecto; entonces, la factorización máxima del polinomio es: $Q(x) = (x - 1)(x^2 + 1)^2$.


Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer , calcular e identificar factores de expresiones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla las raíces enteras de los polinomios dados, en los casos que sea posible.

a. $12x^3 + x^2 - 4x + 7$
b. $3x^4 - 2x^3 + x + 1$
c. $2x^3 - 5x^2 + 8x + 2$
d. $4x^4 - x^3 + 3x^2 + 11x + 3$
e. $6x^2 + 11x + 5$
f. $4x^3 - 7x^2 - 2x + 9$

3 Factoriza cada polinomio aplicando la regla de Ruffini.

a. $x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4$
b. $x^3 - 12x^2 + 41x - 30$
c. $x^3 - 8x^2 + 5x + 50$
d. $x^3 - x^2 + 9x - 9$
e. $x^4 - 6x^3 - 7x^2$
f. $x^3 + 3x^2 - 6x - 8$
g. $x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$
h. $x^4 - 9x^2 + x + 3$
i. $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 19x - 6$
j. $x^6 - x^5 - 2x^2 + 3x - 1$

4 Selecciona las raíces de cada polinomio. Justifica cada una de tus respuestas.

a. $6x^3 + 12x^2 - 90x - 216$ — 3; 4 — −3; 4
b. $2x^4 + 3x^3 + x - 6$ — −2; −1 — −2; 1
c. $x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ — 4; 3; −1 — −4; 3; 1
d. $x^3 + 4x^2 - x - 4$ — 4; 2; 1 — −4; −1; 1
e. $2x^3 + 3x^2 - 8x + 3$ — −3; −1 — −3; 1
f. $5x^3 + 4x^2 - 5x - 4$ — 1; −1 — −4; 4

5 Indica si los valores dados son raíces o no del polinomio: $x^3 - x^2 - 4x + 4$.

a. $x = -1$ b. $x = 1$ c. $x = -2$
d. $x = 2$ e. $x = -4$ f. $x = 4$

6 Completa las divisiones de cada polinomio aplicando la regla de Ruffini.

a. $\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & \square & 1 & \\ \hline 1 & \square & 1 & \square & \end{array}$
b. $\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 4 & \square \\ & 2 & \square & -4 & \\ \hline 1 & \square & \square & \square & \end{array}$
c. $\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ & \square & \square & \square & \\ \hline 1 & \square & \square & 0 & \end{array}$
d. $\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ & \square & \square & \square & \\ \hline 1 & \square & \square & 0 & \end{array}$
e. $\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 4 & 1 \\ & \square & \square & \square & \\ \hline 1 & \square & \square & 0 & \end{array}$
f. $\begin{array}{cccc|c} 6 & -5 & -8 & 3 & -1 \\ & -6 & \square & \square & \\ \hline 6 & \square & 3 & 0 & \end{array}$

Razonamiento

7 Indica para cuáles polinomios, $(x - 3)$ es un factor.

a. $x^6 - 20x^3 + x^2 - 198$
b. $x^8 + 2x^2 - 15x + 321$
c. $-5x^5 + 20x^4 - 15x^3$
d. $2x^4 + x^3 - x - 186$

8 Indica para qué valores de a, $(x + 2)$ es un factor del polinomio $x^5 + 2x^2 + ax + 14$.

a. −27 b. 5 c. −10 d. 14

9 Señala para cuáles polinomios, $x + 3$ es un factor.

a. $2x^3 + 9x^2 + 4x$
b. $2x^3 + 9x^2 + 4x - 15$
c. $2x^3 + 9x^2 + 4x - 3$
d. $2x^3 + 9x^2 + 4x + 15$

Resolución de problemas

10 El hermano menor de Lucas ha dado sus primeros pasos de pintura en la tarea de matemáticas del mayor. Ayúdale a Lucas a encontrar los números que quedaron ocultos y escribe la expresión factorizada del polinomio.

$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & -1 & 16 & -12 & 1 \\ & 1 & & & & \\ \hline 1 & & -4 & 12 & 0 & \end{array}$

115

APPLICA © EDICIONES SM

Razonamiento

1. $(x - 1)(x^2 + 1)^2$

Ejercitación

2. a. -1 b. no tiene raíces
c. no tiene raíces d. -1
e. -1 f. -1

3. a. $(x + 1)(x + 2)$
b. $(x - 1)(x^2 - 11x + 30)$
c. $(x + 2)(x^2 - 10x + 25)$
d. $(x - 1)(x^2 + 9)$
e. $(x - 7)(x^3 + x^2)$
f. $(x - 2)(x^2 + 5x + 4)$
g. $(x - 2)(x^3 + x^2 - 9x - 9)$
h. $(x + 3)(x^3 - 2x^2)$
i. $(x - 2)(x^3 - 8x + 3)$
j. $(x - 1)(x^5 - 2x^2)$

4. a. $-3,4$ b. $-2,1$
c. $4, 3, -1$ d. $-4, -1, 1$
e. $-3, 1$ f. $1, -1$

5. a. No b. Sí
c. Sí d. Sí
e. No f. No

6. a.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

b.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 4 & 2 \\ & 2 & 2 & -4 & \\ \hline 1 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

c.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ & -2 & 2 & -4 & \\ \hline 1 & -3 & 2 & & \end{array}$$

d.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ & -1 & 0 & 1 & \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & \end{array}$$

e.

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -4 & 4 & 1 \\ & 1 & 0 & -4 & \\ \hline 1 & 0 & -4 & 0 & \end{array}$$

f.

$$\begin{array}{cccc|c} 6 & -5 & -8 & 3 & -1 \\ & -6 & 11 & -3 & \\ \hline 6 & -11 & 3 & 0 & \end{array}$$

Razonamiento

7. a. Sí b. No c. Sí d. Sí
8. a. Sí b. No c. No d. No
9. a. No b. Sí c. No d. No

Resolución de problemas

10.

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & -1 & 16 & -12 & 1 \\ & 1 & -3 & -4 & +12 & \\ 1 & -3 & -4 & 12 & 0 & \end{array}$$

UNIDAD 2

Evaluación formativa

Nombre:...

Grado:................. **Fecha:**.................

1. Escribe la factorización de cada polinomio aplicando la técnica que se indique.

A. Factor común

- $14x^4y + 7xy^2 + 21xy$
- $24x^2 + 12xy$
- $49x^3 + 21x^2y^2$
- $2a^2b^2 - 36ab + 6a$
- $14a^2x^2 - 7ax^3 - 28a^2x^2$
- $24x^2y^3 + 16x^3y^2 - 32x^4y^3$

B. Exprese las siguientes diferencias d cuadrados como producto de polinomios

- $a^2 - 144$
- $n^2 - 49$
- $4x^2 - 100$
- $4m^2 - 81$
- $64m^2 - 25$
- $121x^2 - 169$

C. Trinomios cuadrados perfectos.

- $4a^2 + 12ab + 9b^2$
- $36a^2 - 60ab + 25b^2$
- $x^2 + 16x + 64$
- $25y^2 - 120y + 144$

D. Trinomios de la forma $x^2n + bx^n + c$ y $ax^{2n} + bx^n + c$

- $x^2 + 6x + 5$
- $x^4 - 6x^2 - 7$
- $x^2 - 23x + 120$
- $x^2 + 21x - 100$
- $3x^2 + 6x + 2$
- $x^2 - 5x + 4$
- $6x^2 - 13x + 7$

E. Factoriza los polinomios dados por Rufini.

- $6a^2 + 12ab + 90b^2$
- $7x^4 - 35x^2 + 28$
- $8x^4 + 16x^2 - 24$
- $12m^6 - 12n^6$

2. Encuentre los binomios que al desarrollar sus productos obtengas como resultado:

A. $27 - 8b^3$

B. $125n^3 - 64$

C. $216a^3b^3 - 1\,000$

D. $125y^9 - 512z^8$

3. Factoriza los siguientes binomios.

A. $81x^2y^4 - 121m^2y^4$

B. $144n^6 - 121y^8$

1. Escribe la factorización de cada polinomio aplicando la técnica que se indique.

A. Factor común

- $14x^4y + 7xy^2 + 21xy$ — $7xy\,(2x^3 + y + 3)$
- $24x^2 + 12xy$ — $12x\,(2x + y)$
- $49x^3 + 21x^2y^2$ — $7x^2\,(7x + 3y^2)$
- $2a^2b^2 - 36ab + 6a$ — $2a\,(ab^2 - 18b + 3)$
- $14a^2x^2 - 7ax^3 - 28a^2x^2$ — $7ax^2\,(2a - x - 4a)$
- $24x^2y^3 + 16x^3y^2 - 32x^4y^3$ — $8x^2y^2\,(3y + 2x - 4x^2y)$

B. Exprese las siguientes diferencias d cuadrados como producto de polinomios

- $a^2 - 144$
- $n^2 - 49$
- $4x^2 - 100$
- $4m^2 - 81$
- $64m^2 - 25$
- $121x^2 - 169$

$(a - 12)(a + 12)$; $(n - 7)(n + 7)$; $(2x - 10)(2x + 10)$; $(2m - 9)(2m + 9)$
$(8m - 5)(8m + 5)$; $(11x - 13)(11x + 13)$

C. Trinomios cuadrados perfectos.

- $4a^2 + 12ab + 9b^2$
- $36a^2 - 60ab + 25b^2$
- $x^2 + 16x + 64$
- $25y^2 - 120y + 144$

$(2a + 3b)^2$; $(6a - 5b)^2$; $(x + 8)^2$; $(5y - 12)^2$

D. Trinomios de la forma $x^2n + bx^n + c$ y $ax^{2n} + bx^n + c$

- x2 + 5x + 6 — $(x + 5)\,(x + 1)$
- x4 – 6x2 – 7 — $(x^2 - 7)\,(x^2 + 1)$
- x2 – 23x + 120 — $(x - 15)\,(x - 8)$
- x2 + 21x –100 — $(x + 25)\,(x - 4)$
- 3x2 + 5x + 2 — $(x + 1)\,(3x + 2)$
- 2x2 – 5x + 4 — $(x - 4)\,(x - 1)$
- 6x2 – 10x + 7 — $(6x - 7)\,(x - 1)$

E. Factoriza los polinomios dados por Rufini.

- 6a 2 + 12ab + 90b 2
  $(a^2 + 1)(3^a - 1)$
- 7x 4 - 35x 2 + 28
  $(x^2 + 5)(x^2 + 2)$
- 8x 4 + 16x 2 - 24
  $(ax - b)\,(4a^2 - 3m)$
- 12m 6 - 12n 6
  $(x^4 + 6)(x^4 + 4)$

2. Encuentre los binomios que al desarrollar sus productos obtengas como resultado:

A. $27 - 8b^3$ — $(3 - 2b)\,(9 + 6b + 4b^2)$

B. $125n^3 + 64$ — $(5n - 4)\,(25n^2 + 20n + 16)$

C. $216a^3b^3 + 1\,000$ — $(6ab - 10)\,(36a^2b^2 + 60ab + 100)$

D. $125y^9 - 512z^{12}$ — $(5y - 8z)(25y^2 + 40yz + 64z^2)$

3. Factoriza los siguientes binomios.

A. $81x^2y^4 - 121m^2y^4$ — $y^4\,(9x - 11m)\,(9x + 11m)$

B. $144n^6 - 121y^8$ — $(12n^3 - 11y^4)\,(12n^3 + 11y^4)$

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.°	N.° de aciertos	N.° de desaciertos	Refuerzo sí / no
Reconoce, calcula e identifica factores de expresiones algebraicas.	**1, 2 y 3**			
Resuelve problemas aplicando las propiedades algebraicas de los números racionales.	**1, 2 y 3**			
Operar con polinomios en ejercicios numéricos y algebraicos.	**1, 2 y 3**			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Muestre a los estudiantes ejemplos de ecuaciones que sean equivalentes, y la forma de hallarlas. Para eso es importante que les recuerde las propiedades de los números racionales que se aplican.

b. Para obtener ecuaciones equivalentes los estudiantes deben tener claridad sobre las reglas de la suma y del producto. Muéstreles cómo se obtienen ecuaciones equivalentes en el despeje de variables o incógnitas y cómo se aplican las propiedades y reglas correspondientes. Este tema es prácticamente la base para seguir desarrollando los contenidos del área, ya que en él se trabaja el manejo del lenguaje algebraico.

En un curso de 36 estudiantes, el número de niñas es el triple que el de niños. ¿Cuál es el número de niñas y el de niños?

Si se designa por x el número de niños, 3x será el número de niñas.

Entonces, x + 3x = 36, o también: 4x = 36.

Esta igualdad solo se verifica para un cierto valor: x = 9.

Por tanto, el número de niños es 9 y el de niñas 27.

Los problemas, por definición, implican desconocimiento de datos.

Los datos desconocidos se llaman incógnitas o variables y se designan con letras: a, b, ... , x, y, z.

11 Ecuaciones

Explora

Una igualdad compara dos expresiones matemáticas mediante el signo igual (=). Observa estas igualdades:

5 + 4 = 9

x + 5 = 7 − x

- Clasifica cada igualdad según sea numérica o algebraica.

11.1 Igualdades y ecuaciones

Las igualdades pueden ser **numéricas**, si solamente comparan números relacionados mediante las operaciones, o **algebraicas**, si comparan expresiones que involucran números y letras.

De acuerdo con lo anterior, la igualdad $5 + 4 = 9$ es numérica, mientras que la igualdad $x - 5 = 7 - x$ es algebraica.

Las **ecuaciones** son igualdades algebraicas que, al sustituir las letras por ciertos valores, se convierten en igualdades numéricas.

Las **soluciones de una ecuación** son los valores que pueden tomar las incógnitas, de manera que al sustituirlos en la ecuación se satisface la igualdad.

Ten en cuenta

En toda ecuación se identifican dos miembros: el primero, al lado izquierdo del signo igual (=) y el segundo, al lado derecho.

Ejemplo 1

Para verificar que $x = 9$ es solución de la ecuación $5x + 22 = 2x + 49$, se reemplaza ese valor en la ecuación dada. Observa:

$$5x + 22 = 2x + 49$$
$$5(9) + 22 = 2(9) + 49$$
$$45 + 22 = 18 + 49$$
$$67 = 67$$

Como la igualdad se satisface, entonces se afirma que $x = 9$ sí es solución de la ecuación $5x + 22 = 2x + 49$.

Ejemplo 2

Analiza las soluciones de las siguientes ecuaciones.

a. $7x = 56$ es una ecuación que tiene una única solución: $x = 8$.

b. $2x^2 = 18$ tiene dos soluciones. Observa: $x^2 = 9$, entonces $x = 3$ o $x = -3$.

c. $2x - x = 12 + x$ no tiene solución, ya que al reducir términos semejantes se obtiene $0 = 12$, que no corresponde a una igualdad verdadera.

d. $5x + 1 - 3x = 2x + 1$ es una ecuación que representa una identidad, ya que al reducir términos semejantes se obtiene la siguiente igualdad: $2x + 1 = 2x + 1$.

Ten en cuenta

Una ecuación se puede visualizar como una balanza en equilibrio. Cada miembro de la ecuación correspondería a un platillo de la balanza de la Figura 1

Figura 1

Para mantener el equilibrio de la balanza, "todo lo que se haga en un platillo debe hacerse en el otro". En este caso, un cuadrado equivale a dos círculos.

Análogamente, para mantener la igualdad en una ecuación, "todo lo que se haga en un miembro de la ecuación debe hacerse en el otro".

11.2 Ecuaciones equivalentes

Dos **ecuaciones** son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Para obtener una ecuación equivalente a otra dada, se aplican estas propiedades:

- Si a los dos miembros de una ecuación se les suma o resta el mismo número o una misma expresión algebraica, se obtiene otra ecuación equivalente.
- Si los dos miembros de una ecuación se multiplican o dividen por un número distinto de 0, se obtiene otra ecuación equivalente.

Ejemplo 3

Las ecuaciones $3x + 10 = 25$ y $5x = 25$ son equivalentes, pues ambas tienen como solución el valor $x = 5$. Observa:

$$3 \cdot (5) + 10 = 25 \qquad 5 \cdot (5) = 25$$

Destreza con criterios de desempeño: Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q en la solución de problemas sencillos.

Actividad resuelta

Comunciación

1 Resuelve $5x + 22 = 2x + 49$, hallando ecuaciones equivalentes.

Solución:

Para llegar a la solución de la ecuación, mediante un razonamiento lógico, se aplican las propiedades estudiadas. Entonces:

$5x + 22 = 2x + 49$ ← Se parte de la ecuación dada.

$5x + 22 - 22 = 2x + 49 - 22$ ← Se resta 22 a los dos miembros.

$5x = 2x + 27$ ← Se realizan las operaciones.

$5x - 2x = 2x - 2x + 27$ ← Se resta $2x$ a los dos miembros.

$3x = 27$ ← Se reducen términos semejantes.

$\left(\frac{1}{3}\right)(3x) = \left(\frac{1}{3}\right)(27)$ ← Se multiplican por $\frac{1}{3}$ los dos miembros.

$x = 9$ ← Se simplifica y se obtiene la solución.

Las ecuaciones $5x = 2x + 27$ y $3x = 27$ son equivalentes a la ecuación dada y, por lo tanto, tienen la misma solución: $x = 9$.

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación TIC

www.e-sm.net/8smt07

Encontrarás diferentes actividades relacionadas con la resolución de ecuaciones algebraicas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Indica si estas igualdades son numéricas o algebráicas.

a. $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

b. $\frac{1}{5}x + 4y = -11$

c. $-7 - 18 = 25(-3 + 2)$

d. $23 + (-12) + 5 = -15(-7 + 5)$

e. $5x - 9 = 29 - 6x$

Razonamiento

3 Identifica y marca con una X la solución de cada una de las siguientes ecuaciones.

a. $y - 5 = 3y - 25$

8 | 10 | 15 | 20

b. $5x + 6 = 10x + 5$

$\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$

c. $9y - 11 = -10y + 12y$

$-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{11}{7}$

d. $\frac{1}{5}x + 4 = -12$

-80 | -100 | -150 | -200

4 Observa la Figura 2. Luego, contesta la pregunta.

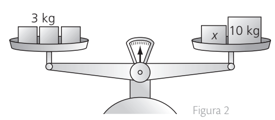


Figura 2

- ¿La balanza está en equilibrio? Si no es así, propón una manera de conseguir que lo esté.

Comunicación

5 Realiza las transformaciones indicadas en la ecuación $3(6 - x) - (2 + x) = 0$.

a. Aplica la propiedad distributiva.

b. Realiza las operaciones.

c. Adiciona el término $4x$, a los dos lados de la igualdad.

d. Divide entre 4 los dos miembros de la igualdad.

e. Determina: ¿cuál es la solución?

Resolución de problemas PAI

6 Juan pagó \$ 90 por seis entradas para cine. ¿Cuánto pagó por cada entrada?

Ejercitación

2. a. Algebraica

b. Algebraica

c. Numérica

d. Numérica

e. Algebraica

Razonamiento

3. a. 10 b. $\frac{1}{5}$

c. $\frac{11}{7}$ d. -80

4. Respuesta libre

Comunicación

5. a. $18 - 3x - 2 - x = 0$

b. $-4x + 16 = 0$

c. $-4x + 16 + 4x = 0 + 4x$

d. $\frac{16}{4} = \frac{4x}{4}$

e. $4 = x$

Resolución de problemas

6. Cada entrada costó \$15.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Comience recordando a los estudiantes el concepto de ecuación lineal: aquella donde el mayor exponente de la incógnita es uno. Dígales que usualmente los problemas matemáticos se resuelven planteando una ecuación. De ahí la importancia de expresar adecuadamente los enunciados en lenguaje algebraico.

b. El problema que se presenta en la página del libro es sencillo de escribir en lenguaje algebraico y en su desarrollo. Muéstreles la forma de aplicar las propiedades y reglas que llevarán a obtener una ecuación equivalente y por tanto, a obtener la respuesta.

c. Presente a los y las estudiantes una operación con números reales en la cual se encuentren signos de agrupación. Recuérdeles el orden en el que debe realizarse las operaciones.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Halla el valor de x en cada igualdad, aplicando la regla de la suma y del producto.

   a. 43x – 29 = –12

   b. 7x – 11 = 17

   c. –9x + 17 = –118

   d. 102 + 18x = 264

   e. 23x + 15x = 224 + 346

   f. 37x – 235 = – 246

12 Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Explora

En la Figura 1 se observa que $\angle A$ y $\angle B$ son ángulos internos del $\triangle ABC$.

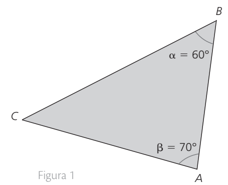


Figura 1

- Escribe una ecuación que permita calcular la medida del $\angle C$. ¿Qué características tiene esta ecuación?
- ¿Qué nombre reciben este tipo de ecuaciones?

La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180° y, como en el $\triangle ABC$ la suma de los ángulos A y B es igual a 130°, para calcular la medida del $\angle C$ se puede plantear una ecuación como la siguiente.

$$\underbrace{\overset{\text{Medida del } \angle C}{\overbrace{x}} + 130°}_{\text{Suma de las medidas de } \angle A \text{ y } \angle B} = 180°$$

Se observa que, en la ecuación $x + 130° = 180°$, el lado izquierdo es un polinomio en x de grado 1. A este tipo de ecuaciones se les denomina "ecuaciones de primer grado con una incógnita" o "ecuaciones lineales".

Una **ecuación de primer grado con una incógnita** (también llamada **ecuación lineal**) es una expresión de la forma $ax + b = c$, donde a, b y c son números reales y el exponente de la incógnita x es 1.

Ejemplo 1

A continuación se presentan algunos ejemplos de ecuaciones de primer grado con una incónita.

$3x + 2 = 5 \qquad p - \frac{46}{5} = 52 \qquad w - (-128) = \sqrt{2}$

En todos los casos, el exponente de las incógnitas x, p y w es, respectivamente, 1.

12.1 Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita

Una ecuación de primer grado con una incógnita se resuelve transformándola en ecuaciones equivalentes hasta despejar la incógnita.

Ejemplo 2

Un bebé recién nacido tiene 300 huesos. Esto es, 94 más que en la edad adulta, cuando algunos se fusionan.

Para calcular la cantidad de huesos que tiene un adulto, se puede modelar la situación mediante una ecuación de primer grado con una incógnita. Entonces:

Si x representa la cantidad de huesos de un adulto, $x + 94 = 300$.

El proceso para resolver la ecuación es el siguiente:

$x + 94 = 300$

$x + 94 + (-94) = 300 + (-94) \longleftarrow$ Se suma el opuesto de 94 en ambos miembros de la igualdad.

$x = 206 \longleftarrow$ Se efectúan las operaciones indicadas.

Para verificar que el valor $x = 206$ es la solución de la ecuación, se reemplaza en la expresión original. Por lo tanto:

$x + 94 = 300$

$206 + 94 = 300$

$300 = 300$

Destreza con criterios de desempeño: Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q en la solución de problemas sencillos.

Ejemplo 3

En una cancha de voleibol como la que se muestra en la Figura 2, la medida del ancho es 9 m; esta medida equivale a la sexta parte del perímetro x.

La relación entre el perímetro x de una cancha de voleibol y la medida del ancho se puede representar mediante una ecuación de primer grado con una incógnita. Así:

Perímetro

$$\frac{1}{6}x = 9 \leftarrow \text{Ancho}$$

En este caso, la solución se obtiene como sigue:

$$\frac{1}{6}x = 9$$

$$6 \cdot \frac{1}{6}x = 9 \cdot 6 \leftarrow \text{Se multiplican los dos lados de la igualdad por el inverso multiplicativo de } \frac{1}{6}.$$

$$x = 54 \leftarrow \text{Se despeja la incógnita y se obtiene su valor.}$$

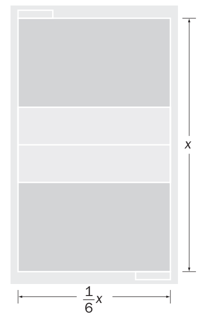


Figura 2

12.2 Ecuaciones de primer grado con la incógnita en más de un término

Cuando una **ecuación** tiene la **incógnita en más de un término**, se reducen términos semejantes para llegar a resolver una ecuación de la forma general $ax + b = c$.

Ejemplo 4

Para resolver la ecuación $x + x + 1 = 11$, se procede de esta forma:

$x + x + 1 = 11 \leftarrow$ Se agrupan las incógnitas y los términos independientes.

$x + x = 11 - 1 \leftarrow$ Se reducen los términos semejantes.

$2x = 10 \leftarrow$ Se simpifica dividiendo entre 2.

$x = 5$

12.3 Ecuaciones de primer grado con paréntesis

Para eliminar los paréntesis de una ecuación, se aplica la propiedad distributiva. Si antes del paréntesis no hay un coeficiente, se considera que este es 1.

Ejemplo 5

Para resolver la ecuación $4(x + 2) - 7(x - 2) = x + 6$, el primer paso es obtener una ecuación equivalente sin paréntesis. Observa:

$4(x + 2) - 7(x - 2) = x + 6 \leftarrow$ Se parte de la ecuación.

$4x + 8 - 7x + 14 = x + 6 \leftarrow$ Se aplica la propiedad distributiva.

$-3x + 22 = x + 6 \leftarrow$ Se reducen los términos semejantes.

$22 = 4x + 6 \leftarrow$ Se adiciona $3x$ en ambos miembros de la ecuación.

$x = 4 \leftarrow$ Se sustrae 6 en ambos miembros, se transponen términos y se simplifica dividiendo entre 4.

Ten en cuenta

La propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición y a la sustracción es:

$a \cdot (b + c) = ab + ac$

$a \cdot (b - c) = ab - ac$

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Halla la solución de las siguientes ecuaciones.

   a. $-8x + 3(-x + 1) = 5(x + 1) - 2x$

   b. $5(x - 2) + 3x = 6x - (2x - 6)$

   c. $4x - (2x - 3) = -6(x - 1) + 3x$

Actividades TIC

Ingresa a ese link:
http://ecuacionesprimer.galeon.com/ecuaciones.swf
Interactúa con todos los elementos de la aplicación de ecuaciones.

Actividades colaborativas

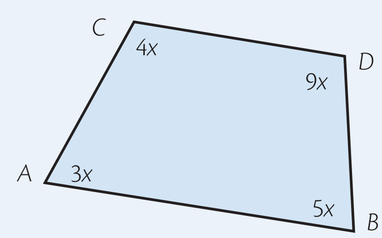
Halla la solución de las siguientes ecuaciones.

a. $-8x + 3(2x + 1) = 5(x + 1) - 2x$

b. $-3(x + 1) - (x - 1) = 5(x + 2)$

c. $5(x - 2) + 3x = 6x -(2x - 6)$

Encuentra los valores de x y y en la siguiente figura.



Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Repase a los y las estudiantes las operaciones con los números racionales para facilitar el proceso de resolución de ecuaciones. Haga énfasis en hallar el inverso multiplicativo de varias fracciones.

b. Desarrolle el ejercicio que se presenta en la página del libro indicándoles que en esta oportunidad se aplica la regla del producto y el número por el cual se multiplica, es el inverso multiplicativo del coeficiente de la variable lineal.

Actividades colaborativas

Aproveche los temas relacionados con la comprensión y solución de ecuaciones para hablar acerca del significado de términos relacionados como: equidad y equilibrio. Pregúnteles por los usos que tienen estas palabras en las diferentes situaciones sociales que viven a diario.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Resuelve las ecuaciones.

a. $\frac{2}{7}x = -\frac{5}{4}$

b. $\frac{1}{5}x = -\frac{3}{4}$

c. $\frac{3}{4}x - \frac{1}{9} = \frac{2}{5} + \frac{6}{7}$

d. $\frac{5}{6}x + \frac{11}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

12 Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Ejemplo 6

Para resolver la ecuación $-\frac{2}{5}(10x - 5) + 6 = 4(x - 2)$, se pueden tener en cuenta los siguientes pasos.

$-\frac{2}{5}(10x - 5) + 6 = 4(x - 2)$ ← Se parte de la ecuación dada.

$-4x + 2 + 6 = 4x - 8$ ← Se aplica la propiedad distributiva.

$-4x + 8 = 4x - 8$ ← Se simplifican términos semejantes.

$-8x = -16$ ← Se suman $-4x$ y -8 en ambos miembros de la igualdad y se reducen términos semejantes.

$x = 2$ ← Se divide entre -8 en ambos miembros de la igualdad.

12.4 Ecuaciones de primer grado con denominadores

Para **eliminar los denominadores de una ecuación**, se multiplican los dos miembros de esta por un múltiplo común de los denominadores. La ecuación equivalente más sencilla se obtiene al multiplicar por el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones dadas.

CULTURA del Buen Vivir

El equilibrio

Una persona equilibrada muestra un perfecto balance entre lo que siente por sí misma y por los demás. Por ejemplo: se respeta, se valora y reconoce sus habilidades, pero también es capaz de mostrar esos mismos sentimientos y apreciaciones hacia los demás.

- Si pones en una balanza las cosas positivas que piensas de ti y las cosas positivas que piensas de tu mejor amigo, ¿la balanza estará equilibrada?

Ejemplo 7

Para resolver la ecuación $\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 30$, el primer paso es obtener una ecuación equivalente sin denominadores.

Esto se consigue multiplicando la ecuación por cualquier múltiplo común de los denominadores: 12, 24, 36, 48, … Entonces:

$\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} = 30$ ← Se parte de la ecuación dada.

$\frac{12x}{2} + \frac{36x}{4} - \frac{60x}{6} = 360$ ← Se multiplica, por ejemplo, por 12, en ambos miembros de la igualdad.

$6x + 9x - 10x = 360$ ← Se simplifican las fracciones.

$5x = 360$ ← Se reducen términos semejantes.

$x = 72$ ← Se simplifica dividiendo entre 5 ambos términos.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Resuelve la ecuación $\frac{x + 1}{3} + \frac{x + 2}{7} = 2$.

Solución:

Al resolver la ecuación, se obtiene una cadena de ecuaciones equivalentes, así:

$\frac{x + 1}{3} + \frac{x + 2}{7} = 2$ ← Se parte de la ecuación original.

$21\left(\frac{x+1}{3} + \frac{x+2}{7}\right) = 21 \cdot 2$ ← Se multiplican por 21 ambos miembros de la igualdad.

$7(x + 1) + 3(x + 2) = 42$ ← Se simplifican los denominadores.

$7x + 7 + 3x + 6 = 42$ ← Se aplica la propiedad distributiva.

$10x = 29$ ← Se reducen términos semejantes.

$x = \frac{29}{10}$ ← Se dividen ambos lados de la igualdad entre 10.

Destreza con criterios de desempeño: Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita en R en la solución de problemas sencillos.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Resuelve cada ecuación.

a. $7x - 15 = 20$

b. $-5x - 8 = 12$

c. $4x - 10 = 26$

d. $-6x - 18 = 10$

Comunicación

3 Obtén en una ecuación de la forma $ax + b = c$, con a, b y c números reales. Luego, resuélvela.

a. $x = 5x - 13$

b. $9x - 4 = 2x$

c. $x + 5x = -10 + 3$

d. $4x - 5x - 9 = 3x + 4x$

e. $4x - 9x + 2 = 7x - 5x - 9$

f. $3x - 8x + 9x = 12 - 7x$

4 Aplica la propiedad distributiva y resuelve.

a. $7(x - 5) - x = 3$

b. $-3(2x - 5) - 5x = 3x$

c. $7(x - 2) - 6x + 1 = 3 - 4x$

d. $4x + 2(2x - 5) = (x - 3) - (8 - x)$

e. $3 + 8(6 - x) = -2(x - 5)$

f. $9x - 2(x - 4x) = 3x - 2(3 - x)$

g. $4x - 7x + 5 = 2 - 4(3x + 1)$

h. $3x + (2x - 3) = 7(x - 2) - x$

5 Elimina los denominadores y resuelve.

a. $\frac{2}{3}x - \frac{1}{5} = \sqrt{6}$

b. $9\pi - 15 = -\frac{9}{7}$

c. $\frac{3}{10}x - \frac{2}{15} = -\frac{4}{5}$

6 Halla la solución de cada ecuación.

a. $\frac{x-2}{5} + \frac{x}{4} = \sqrt{2}$

b. $\frac{x-2}{9} + \frac{x-7}{3} = -4$

c. $\frac{2x-3}{4} + \frac{2x+3}{3} = -1$

d. $\frac{x-6}{4} - \frac{2x+1}{2} - 3 = \frac{x}{3} - \frac{1}{2}$

e. $\frac{x-1}{6} - \frac{3x+2}{3} + 1 = \frac{x}{12} + \frac{1}{6}$

7 Resuelve las siguientes ecuaciones.

a. $2\left(\frac{x-1}{4} - 4\right) - 3\left(\frac{2x}{9} - 1\right) = 9$

b. $-3\left(\frac{7x}{3} - \frac{2x}{4}\right) - \frac{5x+1}{3} = \frac{11x}{6}$

c. $-6\left(\frac{4x}{9} - \frac{8x-1}{3}\right) - \frac{5x+2}{3} = -1$

Razonamiento

8 Para cada enunciado, escribe una expresión algebraica.

a. El doble del número n disminuido en 3 es igual a 15.

b. El número n excede en 12 a 29.

c. La suma del número n y el posterior es 32.

d. Las dos terceras partes de n equivalen a 18

9 Escribe en palabras cada ecuación propuesta:

a. $\frac{n}{4} + 1 = 5$

b. $\frac{n+1}{4} + 15 = -7$

c. $\frac{2n-1}{4} - 1 = 20$

10 Plantea una ecuación que modele cada problema.

a. El triple de un número menos 30 es igual a 6. ¿Cuál es el número?

b. En una academia de idiomas, el número de personas que estudian francés es la mitad del número que estudian inglés. Calcula cuántas personas hay en cada grupo si en total son 240.

Resolución de problemas

PAI

11 La edad de Alicia excede en 3 años la edad de Isabel. La edad de María es la mitad de la edad de Isabel. La suma de las tres edades es 93 años.

- ¿Cuál de las siguientes ecuaciones representa al enunciado anterior?

a. $(x + 3) + x + \frac{x}{2} = 93$

b. $(x - 3) + x + \frac{x}{2} = 93$

c. $\left(\frac{x}{2} + 3\right) + x + \frac{x}{2} = 93$

d. $\left(\frac{x}{2} - 3\right) + x + \frac{x}{2} = 93$

Ejercitación

2. a. 5 b. -4 c. 9 d. $-\frac{28}{6}$

Comunicación

3. a. $\frac{13}{4}$ b. $\frac{4}{7}$ c. $-\frac{7}{6}$ d. $-\frac{9}{8}$

e. $\frac{11}{7}$ f. $\frac{12}{11}$

4. a. $\frac{19}{3}$ b. $\frac{15}{14}$ c. $\frac{16}{5}$ d. $-\frac{1}{6}$

e. $\frac{41}{6}$ f. $-\frac{3}{5}$ g. $-\frac{7}{9}$ h. 11

Ejercitación

5. a. $\frac{93}{10}$ b. $\frac{32}{21}$ c. $-\frac{20}{9}$

6. a. 12 b. $-\frac{13}{4}$ c. $-\frac{15}{14}$ d. $-\frac{54}{13}$ e. 0

7. a. -87 b. $-\frac{1}{27}$ c. $\frac{1}{7}$

Razonamiento

8. a. $2n - 3 = 15$ b. $n + 12 = 29$

c. $n + (n + 1) = 32$ d. $\frac{2n}{3} = 18$

9. a. Un cuarto de un número aumentado uno igual a cinco.

b. Un número aumentado uno dividido en cuatro más quince es igual a menos siete.

c. Un cuarto de dos veces un número disminuido en uno menos uno es igual a veinte.

10. a. $3x - 30 = 6$ b. $x + \frac{x}{2} = 240$

Resolución de problemas

11. a.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Los estudiantes han venido realizando la traducción del lenguaje común al lenguaje algebraico en el transcurro de los temas presentados, mediante enunciado sencillos. En este tema escribirán enunciados que requieren un nivel más complejo de interpretación como el problema que se presenta en la página.

b. Proponga resumir la información en una tabla como la que se muestra en la página. Eleve el nivel de los enunciados colocando especial interés en aquellos que pueden dar pie a una interpretación diferente. Invítelos a seguir los pasos que se han propuestos en las diferentes estrategias que se han estudiado en la sección de solución de problemas de cada módulo: comprender y planear; resolver el problema y comprobar.

Ampliación conceptual

Para resolver problemas que involucran ecuaciones de primer grado se propone la siguiente ruta metodológica.

1. Comprende: comprensión de la situación planteada, determinación de la pertinencia y suficiencia de los datos y del alcance de la pregunta.
2. Planea: análisis de las opciones de solución y selección del procedimiento que se debe seguir.
3. Resuelve: ejecución del plan de acción para resolver el problema (planteamiento y solución de la ecuación).
4. Revisa: confrontación de los resultados obtenidos con el enunciado y la pregunta del problema.

13 Problemas con ecuaciones de primer grado con una incógnita

Explora

Ayer gasté $3 y hoy mis padres me dieron $5. Ahora tengo $7.

- ¿Cuánto dinero tenía ayer antes de gastarme los $ 3?

Ten en cuenta

La palabra álgebra proviene del libro *Al-jabr w'al-muqabalah*, escrito en Bagdad en el año 825 aproximadamente, por el matemático y astrónomo Mohammed ibn Musa Al-Khuwarizmi. *Al-jabr* significa trasposición y hace referencia al paso de términos de un miembro a otro de una ecuación; por su parte, *w'al-muqabalah* indica la supresión de términos iguales en los dos miembros de una ecuación. La incógnita se llamaba *sahy* (cosa), nombre que se utilizó hasta cuando, mucho tiempo después, se decidió el uso de símbolos para resolver ecuaciones.

Estampilla conmemorativa de Mohammed ibn Musa Al-Khuwarizmi.

Si se llama x al dinero que tenía el niño ayer antes de gastarse los $ 3, se puede plantear la siguiente ecuación:

$$x - 3 + 5 = 7$$

Luego:

$$x = 7 + 3 - 5$$
$$x = 5$$

Por lo tanto, el niño tenía $5.

13.1 Lenguaje verbal y lenguaje algebraico

El **lenguaje algebraico** permite expresar mediante símbolos matemáticos enunciados de situaciones que se deben resolver en la vida diaria o en las ciencias.

Ejemplo 1

Observa cómo traducir expresiones del lenguaje verbal al lenguaje algebraico, para un número entero n cualquiera.

Lenguaje verbal	Lenguaje algebraico
La suma de n y su mitad.	$n + \frac{n}{2}$
El número que excede a n en 17 unidades.	$n + 17$
El número anterior a n.	$n - 1$
La cuarta parte de n.	$\frac{n}{4}$
El cuadrado de n.	n^2
El cuadrado de la suma de n y el número siguiente a n.	$[n + (n + 1)]^2$

Tabla 1

Para resolver problemas que involucran ecuaciones lineales, se propone la siguiente **ruta metodológica**.

1.° **Comprende**: analiza la situación planteada; determina la pertinencia y suficiencia de los datos y del alcance de la pregunta.

2.° **Planea**: analiza las opciones de solución y selecciona el procedimiento que consideras que se debe seguir.

3.° **Resuelve**: ejecuta el plan de acción para resolver el problema (planteamiento y solución de la ecuación).

4.° **Comprueba o verifica**: confronta los resultados obtenidos con el enunciado y la pregunta del problema. Verifica la validez de la respuesta.

Después de interiorizar esta ruta podrás utilizar la misma estrategia para resolver otros probemas similares.

Destrezas con criterios de desempeño: Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Plantea una ecuación que modele el siguiente problema y resuélvelo.

Hace ocho años, un padre tenía siete veces la edad de su hijo, pero ahora tiene solo tres veces la edad del hijo. ¿Cuáles son las edades de ambos en este momento?

Solución:

1. Comprende

Observa que la información de la Tabla 2 permite entender la relación entre los datos proporcionados en el enunciado del problema.

Expresión verbal	Expresión algebraica
Edad actual del padre.	x
Edad actual del hijo.	$\frac{x}{3}$
Edad del padre hace ocho años.	$x - 8$
Edad del hijo hace ocho años.	$\frac{x-8}{7}$

Tabla 2

2. Planea

En este paso se plantea la ecuación que expresa las relaciones entre los datos del problema. Después, se resuelve.

3. Resuelve

La ecuación correspondiente a la situación planteada es:

$$\frac{x}{3} - 8 = \frac{x-8}{7}$$

Su solución es la siguiente:

$$21 \cdot \left(\frac{x}{3} - 8\right) = 21 \cdot \frac{x-8}{7}$$ ← Se multiplican los miembros de la igualdad por el m.c.m. de los denominadores.

$$7x - 168 = 3x - 24$$ ← Se resuelve la ecuación obtenida.

$$4x = 144$$

$$x = 36$$

Por lo tanto:

La edad actual del padre es: $x = 36$ años.

La edad actual del hijo es: $\frac{x}{3} = 12$ años.

4. Comprueba

Al reemplazar $x = 36$ en la ecuación planteada, se verifica la igualdad.

$$\frac{36}{3} - 8 = \frac{36-8}{7}$$

$$12 - 8 = \frac{28}{7}$$

$$4 = 4$$

Ten en cuenta

François Viète (1540-1603) fue el primer matemático que introdujo el uso de las letras para representar valores en la resolución de problemas.

App

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Abre la aplicación *Equation Solver* y utilízala para comparar los resultados que obtuviste.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Resuelve los problemas.
   1. Un número y su quinta parte suman 18. ¿Cuál es el número?
   2. Perdí un tercio de las ovejas y llegué con 24. ¿Cuántas ovejas tenía?
   3. Regala 8 cromos y se queda con la mitad. ¿Cuántos cromos tenía?
   4. Hace 15 años la edad de Luisa era $\frac{5}{2}$ de la edad que tendrá dentro de 15 años. ¿Qué edad tiene ahora?

Actividades TIC

Ingresa a ese link:

http://eva.sepyc.gob.mx/plataforma/media/secundaria/0202010056/ODA_MA1_B3_3.2.1.swf

Analiza y busca la clase que te pide que resuelvas los problemas propuestos.

Actividades colaborativas

- Una llave llena un tanque en 30 min, y otra, en 90 min. ¿En cuánto tiempo se llenará el tanque , si están las dos llaves abiertas?
- La diferencia entre las esdades de A y de B es de siete años; la diferencia entre las edades de B y de C es de cinco años, y la suma de las tres edades es igual a 43 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

2. 9

3. 16

4. 12

5. a. $x + (x + 1) = 79$ b. $x + (x + 2) = 126$

   c. $2x + x = 27$ d. $2(x + 7) = 36$

   e. $3x - 8 = 70$ f. $5x - x = 80$

6. 13 y 7

Resolución de problemas

7. 36

8. 14

9. $\frac{2}{3}$

10. 16

11. Pablo tiene ocho monedas de cada una.

12. Las medidas de los lados del triángulo son 21cm, 23 cm y 25 cm.

13. Juan tiene $18, Daniel $53 y Jaime $103.

14. Luis recorrió 40 Km el primer día, 30 Km el segundo y 20 km, el tercero.

15. Los números son 11 y 44.

16. El primer número es 198, el segundo número es 99 y el tercer número es 33.

17. Jaime recorrió 7 km.

18. Hay 216 mamíferos y 108 reptiles.

19. Sergio $120, Carlos $100 y David $ 80.

20. Carro: 120 km; moto: 30 km; bicicleta: 7,5 km; y a pie: 2,5 km.

13 Problemas con ecuaciones de primer grado con una incógnita

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Calcula el número al cual si se le suma 3, da 12.

3 Obtén el número cuyo doble más su triple suma 80.

4 Determina qué número, sumado consigo mismo cuatro veces más su triple da como resultado 96

5 Escribe en lenguaje algebraico los enunciados y resuélvelos.

a. La suma de dos números consecutivos es 79.

b. La suma de dos números pares consecutivos es 126.

c. El doble de un número y dicho número suman 27.

d. El doble de la suma de un número más 7 es 36.

e. El triple de un número menos 8 es 70.

f. Cinco veces un número menos dicho número es 80.

6 Encuentra dos números sabiendo que su suma es 20 y se diferencian en seis unidades.

Resolución de problemas

7 La edad de Carlos es el triple de la edad de Juan. La suma de sus edades es 48. ¿Cuál es la edad de Carlos?

8 Un número se multiplica por 9 y el resultado es el número aumentado en 112. ¿Cuál es el número inicial?

9 Halla un número que, aumentado en $\frac{2}{3}$, equivale al doble del número.

10 La cuarta parte de un número, aumentado en $\frac{4}{3}$, equivale a la tercera parte del número.

11 Pablo tiene $ 26 en monedas de 10 centavos y de 25 centavos. En total, Pablo tiene 16 monedas; si tiene tantas monedas de 25 centavos como de 10 centavos, ¿cuántas monedas tiene de cada denominación?


SM Ediciones

12 Las longitudes de los lados de un triángulo son números impares consecutivos. El perímetro es 69 cm. ¿Cuáles son las longitudes de los lados del triángulo?

13 Jaime tiene $5 más que Daniel y Daniel tiene $35 más que Juan. Reuniendo lo que todos tienen, el total de dinero es $174. ¿Cuánto tiene cada uno?

14 En tres días, Luis recorrió 90 km. El segundo día recorrió $\frac{3}{4}$ de lo que recorrió el primer día y el tercer día recorrió $\frac{2}{3}$ de lo que recorrió el segundo día.

¿Cuántos kilómetros recorrió cada día?

15 La suma de dos números es 55 y uno de ellos es cuatro veces el otro. Halla los dos números.

16 La suma de tres números es 330. El primero es el doble del segundo y el segundo es el triple del tercero. Calcula los tres números.

17 Jaime viajó a Nueva York. Un trayecto en taxi allá tiene un cargo fijo de $ 2,50 y de $1,50 por cada kilómetro. Si Jaime pagó $ 13, ¿qué distancia recorrió?

18 En un parque zoológico hay el doble de mamíferos que de reptiles y, en total, hay 324 animales de esas dos clases. ¿Cuántos mamíferos y cuántos reptiles hay?

19 Carlos, David y Sergio han ganado $300 y deciden repartirlos así: Carlos tendrá $20 menos que Sergio, y David $20 menos que Carlos. Calcula el dinero que obtuvo cada uno.

20 Juan realiza un viaje de 160 km en total. La primera parte del viaje recorre tres cuartas partes del recorrido en carro. Luego, va en moto y recorre la cuarta parte de lo que recorrió en carro. Después, monta en bicicleta y recorre un cuarto de lo que recorrió en moto. Y, los últimos kilómetros los recorrió a pie.

a. ¿Qué distancia recorrió en total?

b. ¿Qué longitud recorrió en cada medio de transporte?

motocicleta:______ carro:______

bicicleta: ______ a pie:______

Destrezas con criterios de desempeño: Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita en Q e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.

21 Luis tiene 92 monedas de 50, 10 y 25 centavos Si las monedas de 50 centavos son la tercera parte de las de 10 centavos y estas son el quíntuplo de las monedas de 25 centavos, ¿cuántas monedas de cada denominación tiene?

22 Ana entrena cada día aumentando el recorrido del día anterior en 1 km. Al cabo de siete días, recorrió en total 42 km. ¿Cuánto entrenó el último día?

23 Preguntamos la hora y nos contestan de la siguiente manera: "Lo que queda de día es igual a dos veces las horas que han transcurrido". ¿Qué hora es?

24 Averigua mi edad si tengo el triple de la edad que tenía hace ocho años.

25 Una mamá tiene 36 años y las edades de sus tres hijos suman 18 años.

a. ¿Cuántos años faltan para que las edades de los hijos sumen la edad de la mamá?

b. ¿Cuántos años deben pasar para que las edades de los hijos sumen el doble de la edad de la mamá?

26 Un número es el doble de otro. Al sumar ambos números da 33. ¿De qué números estamos hablando?

27 La suma de un número más la mitad del mismo número es 24. ¿Cuál es ese número?

28 Al doble de un número le restamos cinco unidades y el resultado coincide con ese número menos dos unidades. ¿De qué número se trata?

29 Arturo tiene 26 láminas más que Pablo y entre los dos tienen 72 láminas. ¿Cuántos láminas tiene Arturo?

30 Lucía tiene el doble de dinero que su hermana y entre las dos tienen $ 36 ¿Cuánto dinero tiene cada una?

31 En una granja hay cuatro veces más vacas que caballos. Si en total hay 50 animales, ¿cuántas vacas hay?

32 Si la edad de una persona es x años, ¿qué representan las siguientes expresiones?

a. $x - 8 = 19$

b. $x - 8 = 3$

c. $2(x + 8) = 38$

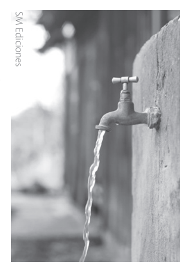
33 Una bodega exportó en enero la mitad de sus barriles y a los dos meses, un tercio de los que le quedaban. ¿Cuántos barriles tenía al comienzo si ahora hay 40 000 barriles?

34 Julián tiene cuatro años más que su primo Eduardo y, dentro de tres años, la edad de los dos sumará 20 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

35 ¿Qué edad tengo ahora si dentro de doce años tendré el triple de la edad que tenía hace seis años?

36 Una llave llena un tanque en 30 minutos y otra lo llena en 90 minutos

- ¿En cuánto tiempo se llenará el tanque, si las llaves están abiertas?



37 La diferencia entre las edades de A y de B es de seis años; la diferencia entre las edades de B y de C es de cinco años y la suma de las tres edades es igual a 43 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?

38 Ana tiene 30 años y Lucía tiene 40. ¿Dentro de cuántos años la edad de Ana será los $\frac{5}{6}$ de la edad de Lucía?

21. Hay 60 monedas de 50 centavos de 10 centavos y 12 de 25 centavos

22. El último día recorrió 9 km.

23. Son las 8 de la mañana.

24. Tengo 12 años.

25. **a.** Faltan 9 años. **b.** Deben pasar 54 años.

26. Los números son 22 y 11.

27. El número es 16.

28. El número es 3.

29. Arturo tiene 49 láminas y Pablo 23.

30. Lucía tiene $24 000 y su hermana $12 000.

31. En la granja hay 40 vacas.

32. **a.** La edad de una persona hace 8 años era 19 años.

b. La edad de una persona hace 8 años era 3 años.

c. En ocho años el doble de la edad de una persona será 38.

33. Al comienzo habían 120 000 barriles.

34. Elkin tiene 9 años y su primo tiene 5 años.

35. Tengo 15 años.

36. El tanque se llena en 22,5 minutos.

37. $A = 20 \quad B = 14 \quad C = 9$

38. Dentro de 20 años.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Una inecuación es una desigualdad entre dos expresiones algebraicas.

Los valores que verifican la inecuación se denominan soluciones, estas soluciones suelen ser conjuntos de infinitos valores.

Una inecuación de primer grado tiene una de las siguientes formas:

$$ax + by < c;\ ax + by \leq c;\ ax + by > c;\ ax + by \geq c,$$

donde a, b y c son números reales, y $a \neq 0$

Recomendaciones para desarrollar la lección

Los y las estudiantes deben reconocer la diferencia entre una desigualdad y una inecuación. Explíqueles qué es una inecuación y acláreles que la solución de una inecuación es un subconjunto de los números reales, el cual se expresa utilizando el signo mayor que o menor que. Es importante que los y las estudiantes tengan en cuenta que esos signos deben cumplirse en orden estricto, es decir si una inecuación tiene como solución el conjunto $x < 8$, el valor de x no puede ser ocho y tampoco puede ser mayor que ocho, ya que al reemplazar algunos de esos valores no se satisface la inecuación. Aclárelés que la representación gráfica de la solución de una inecuación es una región del plano cartesiano que puede estar sobre alguno de los ejes o puede ser una región limitada por una línea recta.

14 Inecuaciones de primer grado en Q con una incógnita

Explora

La suma de tres números enteros consecutivos es menor que 33.

- ¿Cuál es el mayor número entero que puede corresponder al menor de los tres números?

Si se considera x como el menor de estos números, el enunciado del problema se puede expresar mediante una **inecuación de primer grado con una incógnita**.

Número intermedio — Número mayor

Número menor $\longrightarrow$ $x + (x + 1) + (x + 2) < 33$

El proceso de resolución de esta inecuación es:

$x + (x + 1) + (x + 2) < 33$

$3x + 3 < 33$ ⟵ Se reducen términos semejantes.

$3x < 30$ ⟵ Se aplican las propiedades de las desigualdades.

$x < 10$ ⟵ Se despeja la incógnita.

El resultado anterior significa que el menor de los tres números debe ser menor que 10 y que el mayor número entero que cumple esta condición es 9.

Una **inecuación de primer grado con una incógnita** es toda inecuación que pueda escribirse de la forma $ax + b < 0$, con a y b como números reales y $a \neq 0$.

Si el signo $<$ se reemplaza por $\leq$, $>$ o $\geq$, la expresión resultante también se denomina inecuación de primer grado con una incógnita.

Ten en cuenta

Una **semirrecta** está formada por todos los números de la recta mayores o menores que uno de ellos; este puede estar incluido o no.

Según esto, hay dos tipos de semirrectas:

- ***Abierta:*** $(2, +\infty) \Leftrightarrow x > 2$

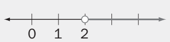


Figura 1

- ***Cerrada:*** $(-\infty, 3] \Leftrightarrow x \leq 3$

Figura 2

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación (TIC)

www.e-sm.net/8smt08

Encuentra aquí más información acerca de las inecuaciones de primer grado.

Ejemplo 1

Expresiones como las siguientes son inecuaciones que pueden llevarse a la forma general de una inecuación de primer grado con una incógnita.

$$4x + 5 < -3 \qquad \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} > 15 \qquad -11x - 19 \leq -\frac{1}{4}$$

Si en las inecuaciones a, b y c son números reales se aplican estas propiedades:

- Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.
- Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
- Si $a < b$ y $c > 0$, entonces $ac < bc$.
- Si $a < b$ y $c < 0$, entonces $ac > bc$.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Resuelve la inecuación $5(x - 3) > -9$.

Solución:

$5(x - 3) > -9$

$5x - 15 > -9$ Se eliminan signos de agrupación.

$5x - 15 + 15 > -9 + 15$ Se suma 15 a cada miembro de la inecuación.

$5x > 6$ Se reducen términos semejantes.

$\frac{1}{5} \cdot 5x > \frac{1}{5} \cdot 6$ Se multiplica por $\frac{1}{5}$ cada miembro de la inecuación.

$x > \frac{6}{5}$

Existen infinidad de valores que satisfacen esta inecuación. En este caso, la solución es el conjunto de números reales mayores que $\frac{6}{5}$. (Figura 3)

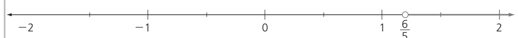
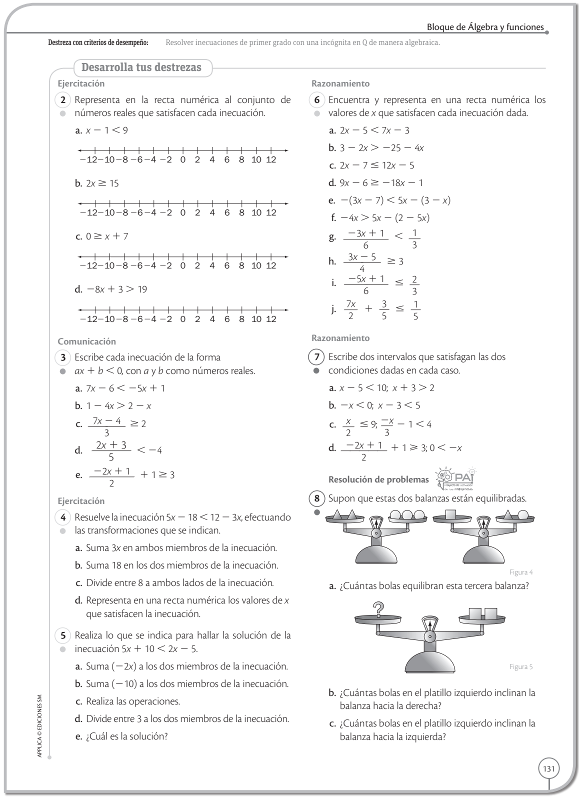


Figura 3


Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Resolver inecuaciones de primer grado con una incógnita en Q de manera algebraica.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Representa en la recta numérica al conjunto de números reales que satisfacen cada inecuación.

a. $x - 1 < 9$

$-12\ -10\ -8\ -6\ -4\ -2\ 0\ 2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12$

b. $2x \geq 15$

$-12\ -10\ -8\ -6\ -4\ -2\ 0\ 2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12$

c. $0 \geq x + 7$

$-12\ -10\ -8\ -6\ -4\ -2\ 0\ 2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12$

d. $-8x + 3 > 19$

$-12\ -10\ -8\ -6\ -4\ -2\ 0\ 2\ 4\ 6\ 8\ 10\ 12$

Comunicación

3 Escribe cada inecuación de la forma $ax + b < 0$, con a y b como números reales.

a. $7x - 6 < -5x + 1$

b. $1 - 4x > 2 - x$

c. $\frac{7x - 4}{3} \geq 2$

d. $\frac{2x + 3}{5} < -4$

e. $\frac{-2x + 1}{2} + 1 \geq 3$

Ejercitación

4 Resuelve la inecuación $5x - 18 < 12 - 3x$, efectuando las transformaciones que se indican.

a. Suma $3x$ en ambos miembros de la inecuación.

b. Suma 18 en los dos miembros de la inecuación.

c. Divide entre 8 a ambos lados de la inecuación.

d. Representa en una recta numérica los valores de x que satisfacen la inecuación.

5 Realiza lo que se indica para hallar la solución de la inecuación $5x + 10 < 2x - 5$.

a. Suma $(-2x)$ a los dos miembros de la inecuación.

b. Suma (-10) a los dos miembros de la inecuación.

c. Realiza las operaciones.

d. Divide entre 3 a los dos miembros de la inecuación.

e. ¿Cuál es la solución?

Razonamiento

6 Encuentra y representa en una recta numérica los valores de x que satisfacen cada inecuación dada.

a. $2x - 5 < 7x - 3$

b. $3 - 2x > -25 - 4x$

c. $2x - 7 \leq 12x - 5$

d. $9x - 6 \geq -18x - 1$

e. $-(3x - 7) < 5x - (3 - x)$

f. $-4x > 5x - (2 - 5x)$

g. $\frac{-3x + 1}{6} < \frac{1}{3}$

h. $\frac{3x - 5}{4} \geq 3$

i. $\frac{-5x + 1}{6} \leq \frac{2}{3}$

j. $\frac{7x}{2} + \frac{3}{5} \leq \frac{1}{5}$

Razonamiento

7 Escribe dos intervalos que satisfagan las dos condiciones dadas en cada caso.

a. $x - 5 < 10;\ x + 3 > 2$

b. $-x < 0;\ x - 3 < 5$

c. $\frac{x}{2} \leq 9;\ \frac{-x}{3} - 1 < 4$

d. $\frac{-2x + 1}{2} + 1 \geqslant 3;\ 0 < -x$

Resolución de problemas

8 Supon que estas dos balanzas están equilibradas.

Figura 4

a. ¿Cuántas bolas equilibran esta tercera balanza?

Figura 5

b. ¿Cuántas bolas en el platillo izquierdo inclinan la balanza hacia la derecha?

c. ¿Cuántas bolas en el platillo izquierdo inclinan la balanza hacia la izquierda?

APPLICA © EDICIONES SM

131

2. a. $x < 10$ b. $x \geq \frac{15}{2}$

c. $x \leq 7$ d. $x \leq 2$

3. a. $12x - 7 < 0$ b. $-3x - 1 > 0$

c. $7x - 10 \geq 0$ d. $2x + 8 < 0$

e. $-2x - 3 \geq 0$

Ejercitación

4. a. $5x - 18 + 3x < 12 - 3x + 3x$

b. $8x - 18 + 18 < 12 + 18$

c. $\frac{8x}{8} < \frac{30}{8}\ x < \frac{15}{4}$

d. Verificar la representación.

Resolución de problemas

5. a. $5x + 10 - 2x < 2x - 5 - 2x$

b. $3x + 10 - 10 < -5 - 10$

c. $3x < -15$ d. $\frac{3x}{3} = -\frac{15}{3}$

e. $x = -5$

6. a. $x > -\frac{2}{5}$ b. $x > -14$ c. $x \geq -\frac{1}{5}$

d. $x \geq \frac{5}{27}$ e. $x > \frac{10}{9}$ f. $x < \frac{1}{7}$

g. $x > -\frac{1}{3}$ h. $x \geq \frac{17}{3}$ i. $x \geq -\frac{3}{5}$

j. $x \leq -\frac{4}{35}$

Razonamiento

7. a. Cualquier valor mayor de -1 y menor que 15.

b. Cualquier valor mayor de 0 y menor que 8.

c. Cualquier valor mayor de -1 y menor que 15.

d. Valores desde $-\infty$ y menores a $-\frac{3}{2}$.

Resolución de problemas

8. a. No se equilibra la balanza.

b. Con tres bolas o menos.

c. Con cuatro bolas o más.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Comente a los estudiantes que muchas de las situaciones cotidianas se pueden representar con inecuaciones lineales. Presénteles varios ejemplos e indíqueles la importancia de dominar la traducción de expresiones comunes al lenguaje algebraico.

b. Analice el problema que se desarrolla en la página. Llame la atención en los pasos que se siguen, indicándoles que son los mismos que se han trabajado en las estrategias de solución de problemas: comprender ;planear; resolver y revisar. Insista en que como la solución es un subconjunto de los números reales se deben escoger varios valores en esa comprobación.

Actividades colaborativas

Forma grupos de trabajo y propón que resuelvan los siguientes problemas:

a. La suma de dos números enteros impares consecutivos es menor que 42. ¿Cuáles son los mayores números que cumplen esta condición?

b. El perímetro de cierto rectángulo no excede los 30 cm. Si el largo es el doble del ancho, ¿Cuáles pueden ser sus dimensiones?

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Escribe, la desigualdad que representa cada enunciado.
   a. El perímetro de cierto triángulo no debe ser menor que 60 cm.
   b. El peso de cierta joya es mayor que 55 g.

15 Problemas con inecuaciones de primer grado con una incógnita

Explora

Pedro es cuatro años mayor que Juan. Hace 20 años, Pedro tenía por lo menos el doble de la edad de Juan.

SM Ediciones

- ¿Cuál es la máxima edad que puede tener Juan ahora?

Para resolver el problema, se puede seguir un proceso similar al empleado para solucionar problemas que involucran ecuaciones de primer grado con una incógnita.

1. Comprende

Si x representa la edad actual de Pedro, entonces $x - 4$ corresponde a la edad de Juan.

2. Planea

La relación entre las dos edades hace 20 años se puede expresar como sigue:

$(x - 20) \geq 2(x - 24)$

En este caso, el signo $\geq$ expresa que, hace 20 años, la edad de Pedro era mayor o igual que la edad de Juan.

3. Resuelve

El proceso de resolución es este:

$(x - 20) \geq 2(x - 24)$

$x - 20 \geq 2x - 48$ ← Se eliminan los paréntesis.

$48 - 20 \geq 2x - x$ ← Se aplican las propiedades de las desigualdades.

$28 \geq x$ ← Se despeja la incógnita.

La edad de Juan es, máximo, 24 años.

4. Revisa

Al reemplazar el valor de x en la expresión original, se cumple la desigualdad, así:

$(28 - 20) \geq 2(28 - 24)$

$8 \geq 8$

Tomado de: http://www.eluniverso.com

Pasajeros en una terminal de transporte aéreo.

Actividad resuelta

Comunicación

1 En cierta aerolínea, el equipaje de los pasajeros no debe sobrepasar los 20 kg de peso. Si un pasajero lleva tres maletas que pesan lo mismo, ¿cuál debe ser el peso máximo de cada una, para no sobrepasar el límite de la aerolínea?

Solución:

Comprende

Los datos del problema son:

Expresión verbal	Expresión algebraica
Peso de cada maleta	x
Peso de las tres maletas	$3x$

Tabla 1

Planea

Se plantea una desigualdad lineal, considerando que el peso de las tres maletas no debe superar los 20 kg. La desigualdad correspondiente es:

$3x \leq 20$

Resuelve

Su solución es: $x \leq \frac{20}{3}$

Por lo tanto, cada maleta debe pesar máximo $\frac{20}{3}$ kg $= 6\frac{2}{3}$ kg.

Revisa

Cualquier peso menor o igual que $6\frac{2}{3}$ kg satisface la inecuación.

Si $x = 5$, entonces $3(5) = 15 \leq 20$.

Destrezas con criterios de desempeño: Resolver y plantear problemas de aplicación con enunciados que involucren inecuaciones de primer grado con una incógnita en Q e interpretar y juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Escribe la inecuación que corresponde a cada situación.

- **a.** La suma de dos números enteros consecutivos es menor que 37.
- **b.** La diferencia del triple de un número y la mitad del número es menor que 24.
- **c.** La tercera parte de un número aumentada en 5 es mayor que la mitad del número.
- **d.** Dentro de siete años la edad de José será menor que el doble de su edad actual.
- **e.** El perímetro de un triángulo equilátero con lado x es menor que 76.

3 Escribe la expresión verbal que puede estar representada en cada desigualdad.

- **a.** $5x - 8 > 2x$
- **b.** $6x - 1 < 3x + 2$
- **c.** $x \leq 2x - 7$
- **d.** $3x + 2 \geqslant 7$
- **e.** $21a + 12 > 15$
- **f.** $18 + x < 605$
- **g.** $13n - 4 \leqslant 323$
- **h.** $48a - 1 \geqslant 10$

Resolución de problemas

4 El doble de la edad de Juan aumentada en 7 es, como mínimo, 56 años.

- **a.** ¿Cuál es la inecuación que representa el enunciado anterior?

  $2x + 7 \geq 56$ $2x + 7 > 56$

  $2x + 7 \leq 56$ $2x + 7 < 56$

- **b.** ¿Cuál es la edad mínima que puede tener Juan?

5 Se sabe que la suma de tres enteros consecutivos no es menor que 63.

- **a.** ¿Cuál es la inecuación relacionada con el enunciado?

  $x + (x + 1) + (x + 2) > 63$

  $x + (x + 1) + (x + 2) < 63$

  $x + (x + 1) + (x + 2) \geq 63$

  $x + (x + 1) + (x + 2) \leq 63$

- **b.** ¿Cuáles son los tres menores números que cumplen la condición?

6 El resultado de multiplicar por 5 un número es menor que la mitad de dicho número aumentado en 40.

- **a.** ¿Cuál es la inecuación que representa el enunciado?

  $5x < \frac{x}{2} + 40$ $5x > \frac{x}{2} + 40$

  $5x \leq \frac{x}{2} + 40$ $5x \geq \frac{x}{2} + 40$

- **b.** ¿Cuál es el mayor número entero que cumple con las características dadas en el enunciado?

7 En el grado noveno se quiere formar un grupo de teatro con 28 estudiantes, de manera que el doble de niñas sea mayor que el triple de niños. ¿Cuál es el menor número de niñas que deben participar?

8 ¿Cuál es el menor número impar cuyo doble incrementado en cuatro es menor que tres veces el número disminuido en 12?

9 La base de un rectángulo mide el doble que su altura. Halla las medidas de dicho rectángulo para que su perímetro sea inferior a 36 cm.

10 Un ciclista puede pedalear a una velocidad de entre 10 y 30 km/h dependiendo de la pista. ¿Entre qué valores oscila la distancia recorrida, si pedalea durante 3,5 h?

11 El 55% de una dieta sana deben ser carbohidratos. Si el triple del porcentaje de proteínas aumentado en 10 no debe superar el porcentaje de carbohidratos, ¿cuál es el porcentaje de proteínas que debe tener la dieta?

12 Luz tiene menos de 25 años y es 3 años mayor que Ana. Escribe la inecuación que representa la edad de Ana.

13 Halla el menor número entero cuyo triple aumentado en 15 es mayor que 35.

Comunicación

2. **a.** $x + x + 1 < 137$ **b.** $3x - \frac{x}{2} < 24$

c. $\frac{x}{3} + 5 > \frac{x}{2}$ **d.** $x + 7 < 2x$

e. $3x < 76$

3. Respuesta Libre

Resolución de problemas

4. **a.** $2x + 7 \geq 56$

b. La edad mínima de Juan es 25 años.

5. **a.** $x + (x + 1) + (x + 2) > 63$

b. Los números menores son 20, 21 y 22.

6. **a.** $5x < \frac{x}{2} + 40$.

b. El valor mayor es $\frac{80}{9}$.

7. El número menor de niñas debe ser 17.

8. El menor número es 16.

9. Las medidas del rectángulo son 6 y 12 máximo.

10. La distancia esta entre 35 km y 105 km.

11. Máximo 45%.

12. $x + 3 < 25$

13. El menor número entero es 7.

UNIDAD 3

Evaluación sumativa

Nombre:...

Grado:................ . **Fecha:**................ .

1. El término que debería sumarse al binomio $9w^6 + 4x^2y^4$ para formar un trinomio cuadrado perfecto es:

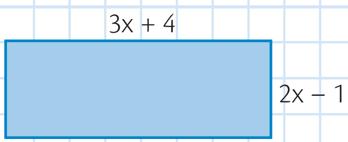
A. $7wxy^2$

B. $5wxy^2$

C. $35w^2x^2y^2$

D. $37w^3xy^2$

2. Sea un rectángulo de la figura, su área está dada por la expresión:



A. $6x^2 + 4x + 5$ B. $6x^2 + 5x - 4$

C. $6x^2 + 4x - 5$ D. $6x^2 - 5x + 4$

3. En la expresión: $n^2 + 6mn - 4y^2 + 9m^2$. Sus factores son:

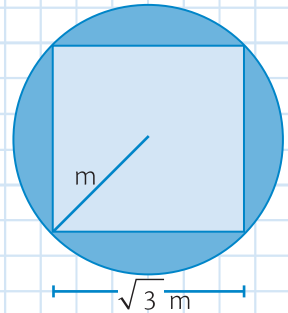
A. $(n + 3m - 2y)\ (n + 3m + 2y)$

B. $(n + 3n - 2y)\ (n + 3n + 2y)$

C. $(n + 2m - 3y)\ (n + 3n + 2y)$

D. $(n + 3m - 2y)\ (n + 3n + 2y)$

4. Selecciona la expresión que determina el área sombreada de la siguiente figura.



A. $(\pi - 3)\ m^2$ B. $(\pi + 3)\ m^2$

C. $(\pi - 3)m$ D. $(\pi + 3)\ m$

5. El número que aumentado en $\frac{1}{2}$ es igual al triple del número es:

A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{7}{6}$ D. $\frac{7}{8}$

6. El producto de un número por 0,7 es igual al número aumentado en 1,8, el número es:

A. 6 B. 5

C. 4 D. 3

7. El cociente de la tercera parte de un número y la sexta parte del número es igual al producto del número por $\frac{1}{6}$, el número es:

A. 12 B. 8

C. 6 D. 4

8. El doble de la edad de Juan aumentada en 7 es, como mínimo, 56 años. La inecuación que representa el enunciado es:

A. $2x - 7 \leq 56$

B. $2x + 7 \leq 56$

C. $2x - 7 < 56$

D. $2x + 7 < 56$

9. Los ingresos de un padre de familia disminuidos en su tercera parte es como máximo 30 dólares. La inecuación que representa al enunciado es:

A. $x - \frac{x}{3} < 30$

B. $x - \frac{x}{3} \leq 30$

C. $x - \frac{x}{3} > 30$

D. $x - \frac{x}{3} \geq 30$

10. El resultado de la inecuación4(x+1)-2(x-2)>x+5 es:

A. $x < 3$

B. $x > 3$

C. $x < -3$

ç D. $x > -3$

UNIDAD 4 Evaluación diagnóstica

Nombre:..

Grado:................. **Fecha:**.................

1. A(−3, 2) está en el cuadrante:

   A. I

   B. II

   C. III

   D. IV

2. Los puntos B (−3, 2) y C (−3, −2) son simétricos respecto a:

   A. a sí mismo

   B. origen

   C. eje y

   D. eje x

3. Determina si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

   A. La intersección de los ejes tiene coordenadas(0,0). ( )

   B. Un punto en el cuadrante III tiene abscisa negativa y ordenada positiva. ( )

   C. La intersección de los ejes de coordenada divide al plano en cuatro cuadrantes. ( )

   D. Un punto en el cuadrante II tiene abscisa negativa y ordenada negativa. ( )

4. Sean los conjuntos A = {1,2,3} y B = {5,6,}
   El producto cartesiano A X B es:

   A. A X B = {(1,5),(1,6),(2,5),(6,2),(3,5),(3,6)}

   B. A X B = {(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(5,3),(3,6)}

   C. A X B = {(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),(3,6)}

   D. A X B = {(1,5),(1,6),(2,5),(2,6),(3,5),(6,3)}

5. Sean los conjuntos A= {1,2,3} y B= {5,6,} La relación de los pares ordenados tales que los dos elementos del par ordenado sean impares es:

   A. {(1,5),(3,6)}

   B. {(1,5),(3,5)}

   C. {(2,5),(3,5)}

   D. {(1,5),(2,5)}

6. Una relación entre un conjunto, llamado dominio, y otro conjunto, llamado rango, de forma que a cada elemento del dominio le corresponde un único elemento del rango .Es el concepto de:

   A. función

   B. relación

   C. dominio

   D. rango

7. La fórmula asociada a la tabla es:

x	−2	−1	0	1	2	6
***f*(*x*)**	−6	−3	0	3	6	18

   A. y = 3 x −1

   B. y = x −1

   C. y = 3x

   D. y = −3x

8. La función que relaciona dos magnitudes cuya razón de proporcionalidad sea $-\frac{1}{3}$. es:

   A. $y = -\frac{1}{3}.x$

   B. $y = \frac{1}{3}.x$

   C. $y = \frac{1}{3}.x - 1$

   D. $y = \frac{1}{3}.x -+1$

9. Para x = −2, el valor numérico de la expresión $x= 2x^2 + 3x - 7$ es:

   A. 5

   B. −5

   C. − 7

   D. 7

Propósito de la unidad

Bloque de geometría y medida

El bloque de conjuntos y funciones incluye el uso de formas y generalizaciones expresadas en las determinaciones de un conjunto, así como también de igualdades con incógnitas junto con las operaciones entre números ha permitido desarrollar conceptos y demostrar relaciones y funciones de proporcionalidad directa, funciones lineales y afines.

Gracias al desarrollo del lenguaje algebraico, hoy en día es posible comunicar ideas y conceptos universales, expresando las propiedades de las igualdades y funciones en distintos entornos de aplicación.

El aprendizaje significativo requiere de la participación activa del sujeto que aprende, guiado por los docentes que planifican, diseñan, implementan, orientan, coordinan y evalúan. Esa participación de nuestros estudiantes es activa, no sólo en cuanto a lo manifiesto (graficar, discutir, preguntar, exponer, dialogar, argumentar, criticar...) sino también en cuanto a las conductas interiorizadas (las cognitivas): comparar, diferenciar, relacionar, analizar, sintetizar, calcular, estimar, definir, explicar, deducir, inferir, concluir, demostrar.

Tampoco se pueden resolver problemas sin el dominio hábil de los procedimientos de cálculo, pero de éstos, los estudiantes deben conocer también las relaciones y funciones entre ellos y sus propiedades, y comprender los fundamentos de las operaciones con conjuntos, propiedades de las funciones proporcionales, funciones lineales y funciones afines que están utilizando.

Evaluaciones

Diagnóstica

La evaluación diagnóstica, además de ayudar a generar en los estudiantes curiosidad acerca de los temas que se estudiarán, permite anticipar o predecir los conceptos en los que se puede encontrar alguna dificultad. En este caso, los resultados le servirán al docente para planear las clases y proponer la metodología más conveniente para el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para iniciar la unidad se hace necesario recordar las nociones de conjuntos, plano cartesiano, relaciones entre conjuntos y funciones elementales su notación y elemento que los estudiantes deben dominar estas destrezas estudiadas anteriormente.

Además, se necesita que recuerden la representación de conjuntos y relaciones en diagramas sagitales, también, las gráficas de funciones lineales.

Formativa

Es muy importante que analice los avances o las dificultades que tuvieron los estudiantes al desarrollar cada actividad. Qué aprendizajes nuevos tuvieron. Esto además de darle pistas del desarrollo de los y las estudiantes, le permitirá motivar procesos de metacognición muy valiosos para el aprendizaje.

La evaluación formativa contempla una serie de ejercicios y problemas que permitan verificar si desarrollaron las destrezas planteadas como: representar en forma gráfica y algebraica las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento entre conjuntos, representa como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos e identifica las relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia de un subconjunto de dicho producto, resuelve problemas mediante la elaboración de modelos matemáticos sencillos como funciones, emplea gráficas para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema.

Sumativa

La función principal de esta evaluación es identificar lo que los estudiantes aprendieron durante el desarrollo de la unidad correspondiente. Esto, además de permitir analizar cuáles son las dificultades y las fortalezas del proceso de enseñanza y aprendizaje, servirá como evidencia que alcanzaron los logros de aprendizaje que permitirán desarrollar con fluidez los conceptos de la unidad siguiente.

Se presentan una serie de problemas que permiten evaluar los logros alcanzados al inicio de la unidad y los posteriores como: determinar el comportamiento de las funciones lineales en Z, en base a su formulación algebraica, tabla de valores o en gráficas, valora el empleo de la tecnología, analiza las características geométricas de la función lineal (pendiente e intersecciones) y reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función lineal.

Respuestas

Evaluación diagnóstica

1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	A	A (V)	A	A	A	A	A	A
B	B	B (F)	B	B	B	B	B	B
C	C	C (V)	C	C	C	C	C	C
D	D	D (F)	D	D	D	D	D	D

Esquema conceptual

Conocimientos de la unidad

- Bloque de álgebra y funciones
  - Conjuntos y funciones lineales
    - Conjuntos
    - Determinación de un conjunto
    - Representación de un conjunto
    - Clases de conjuntos
  - Relaciones entre conjuntos
    - Relaciones de contenencia e igualdad
    - Conjuntos disyuntos
  - Funciones
    - Dominio y rango de una función
    - Representación gráfica de una función
  - Operaciones entre conjuntos
    - Intersección de conjuntos
    - Complemento de un conjunto
    - Diferencia de conjuntos
    - Diferencia simétrica
  - Representación de funciones lineales y afines

Cultura del Buen Vivir

■ Valor: El compromiso

El compromiso es el valor que lleva a una persona a cumplir una promesa o a alcanzar un objetivo en el que se empeña de manera libre y perseverante.

- Crecimiento y decrecimiento de funciones
  - Máximos y mínimos
- Aplicaciones de las funciones lineales y afines
  - Ejemplo de aplicaciones en las ciencias
  - Ejemplo de aplicaciones en la economía
- Continuidad y variación de funciones
  - Continuidad de una función
  - Variación de una función en un intervalo
- Proporcionalidad directa
  - Función
- Función afín
  - Caracterización de funciones afines
- Relaciones
  - Relaciones
  - Relación definida en un conjunto

Compromiso a lograr

Mediante el desarrollo de la unidad se valorará la importancia de la teoría de conjuntos para definir conceptos e interpretar propiedades; se aplicará las leyes de la lógica proposicional en la solución de problemas y la elaboración de argumentos lógicos, se definirá funciones elementales (función real, función cuadrática), reconocerá sus representaciones, propiedades y fórmulas algebraicas, analizará la importancia de ejes, unidades, dominio y escalas, y resolverán problemas que pueden ser modelados a través de funciones elementales; juzgará la necesidad del uso de la tecnología.

Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica	
Unidad 4: conjuntos y funciones lineales	
Objetivos generales del área	**Objetivos del área por subnivel**
OG.M.1. – OG.M.6.	O.M.4.2.
Objetivos de subnivel	**Valores**
OI.4.1. – OI.4.12.	• El compromiso (I.2.),
Criterios de evaluación	**Indicadores de evaluación**
CE.M.4.2. – CE.M.4.3. – CE.M.4.4.	I.M.4.3.2 – I.M.4.3.3. – I.M.4.3.4.

Objetivos de la unidad

- Representar en forma gráfica y algebraica las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento entre conjuntos.
- Representar como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos e identifica las relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia de un subconjunto de dicho producto.
- Resolver problemas mediante la elaboración modelos matemáticos sencillos como funciones, emplea gráficas para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema.
- Determinar el comportamiento de las funciones lineales en Z, en base a su formulación algebraica, tabla de valores o en gráficas.

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Álgebra y funciones	• Definir y reconocer conjuntos y sus características para operar con ellos (unión, intersección, diferencia, complemento) de forma gráfica y algebraica. • Reconocer e identificar relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia sobre un subconjunto del producto cartesiano.	• Recuerde inicialmente a los estudiantes, las formas de determinación de conjuntos y su representación en diagramas de Veen, establezca las relaciones de contenencia e igualdad presentándoles un ejemplo con tres conjuntos numéricos. • Defina las operaciones unión e intersección de conjuntos con diagramas específicas de cada operación. Se debe tomar en cuenta el conjunto universal para definir el conjunto complemento y diferencia simétrica, es importante que se aplique a problemas cotidianos que propone el texto.	• Representa en forma gráfica y algebraica las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento entre conjuntos. • Representa como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos e identifica las relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia de un subconjunto de dicho producto.	**Actividad:** resuelve problemas que conducen a la aplicación de los conjuntos y funciones.

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Álgebra y funciones	• Definir y reconocer funciones de manera algebraica y de manera gráfica con diagramas de Venn determinando su dominio y recorrido en Z. • Reconocer funciones crecientes y decrecientes a partir de su representación gráfica o tabla de valores. • Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica con el empleo de la tecnología. • Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales y resuelve problemas.	• Explique a los estudiantes que una relación de equivalencia se da en un mismo conjunto y debe cumplir con las propiedades simétrica, reflexiva y transitiva. Según el diagrama sagital, determine si la relación R es de equivalencia. • Recuerde a los estudiantes el concepto de función y pídales determinar, entre varias gráficas cartesianas, cuáles corresponden a funciones. Luego determine la notación de funciones y establezca el dominio y rango de las mismas. • Defina función afín y escriba la forma generalizada: $y = mx + n$ con m y n números reales. Solicite que comparen las funciones lineales con las afines y saquen conclusiones. Acláreles que la pendiente de una función afín sigue siendo un patrón que determina si la función es creciente o decreciente según el signo que tenga. Elabore una tabla resumen con las diferencias o similitudes entre la función lineal y la función afín. Confirme que observen que la representación de una función afín interseca al eje Y, en el punto b.	• Resuelve problemas mediante la elaboración modelos matemáticos sencillos como funciones, emplea gráficas para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema. • Determina el comportamiento de las funciones lineales en Z, en base a su formulación algebraica, tabla de valores o en gráficas, valora el empleo de la tecnología. • Analiza las características geométricas de la función lineal (pendiente e intersecciones). • Reconoce cuándo un problema puede ser modelado utilizando una función lineal.	**Técnica:** observación **Instrumento:** registro descriptivo.

Recursos: Materiales del medio, Tic, Texto Guía, Cuaderno de trabajo.

Bibliografía: Mason, J., Burton, L. (1992), Stacey Pensar matemáticamente Madrid: Ediciones/Labor..

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Recuerde inicialmente a los y las estudiantes, los conjuntos de números estudiados, los números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales. Posteriormente, recuérdeles el conjunto de los números primos, la relación de pertenencia, la determinación de un conjunto, su representación y notación. Utilice las figuras cerradas para mostrar la representación y relaciones de pertenencia e inclusión.

b. En esta oportunidad, es necesario dar algunas convenciones para el trabajo. Por ejemplo: se considerarán letras mayúsculas para nombrar los conjuntos, llaves y comas en tabular conjuntos finitos e infinitos.

Ampliación conceptual

Teoría de conjuntos

El concepto de conjunto es uno de los más fundamentales en matemáticas, incluso más que la operación de contar, pues se puede encontrar implícita o explícitamente, en todas las ramas de las matemáticas puras y aplicadas.

En su forma explícita, los principios y terminología de los conjuntos se utilizan para construir proposiciones matemáticas más claras y precisas y para explicar conceptos abstractos como el infinito.

1 Conjuntos

Explora

El conjunto de los números primos está formado por aquellos números que solo tienen dos divisores: la unidad y el mismo.

- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto de números primos que son pares?

Si *A* es el conjunto de los números primos que son pares, entonces la característica común de los elementos de *A* es "ser número primo par".

Ya que 2 es un número par y primo, se puede afirmar que 2 **pertenece a** *A*. Para esta afirmación se utiliza la expresión "$2 \in A$".

El conjunto *A* solo tiene un elemento, pues 2 es el único número par que es primo. Por lo anterior, se puede decir que $4 \notin A$, pues es par pero no es primo. Esto se lee: "4 no pertenece a *A*".

Un **conjunto** es una colección bien definida de objetos. Los objetos de la colección se denominan **elementos** y se dice que estos pertenecen a dicho conjunto.

Usualmente, los conjuntos se simbolizan mediante letras mayúsculas (como *A, B, C*…) y los elementos se denotan por medio de letras minúsculas (como *a, b, c*…).

Ejemplo 1

El conjunto *S* de los días de la semana tiene siete elementos: lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado y domingo.

Se dice que cada uno de estos días pertenece al conjunto *S*.

Ejemplo 2

Sobre el conjunto *I* de los números naturales que son impares y menores que 15, se pueden establecer algunos enunciados como:

$3 \in I$, pues 3 es un número impar menor que 15.
$4 \notin I$, pues aunque es menor que 15 no es impar.
$17 \notin I$, pues aunque es impar no es menor que 15.
$15 \notin I$, pues aunque es impar no es menor que 15.
$11 \in I$, pues es a la vez impar y menor que 15.

1.1 Determinación de un conjunto

Un conjunto se determina de dos maneras: por extensión y por comprensión.

Un conjunto se determina **por extensión** cuando se hace un listado de todos los elementos que pertenecen a él, separados por comas y encerrados entre llaves {...}.

Un conjunto se determina **por comprensión** cuando se indica una propiedad común a todos los elementos del conjunto y solo a ellos. Si la propiedad que cumplen los elementos de un conjunto *A* es *P*, se elige un elemento *a* y se usa una expresión de la forma:

$$A = \{a / P(a)\}$$

la cual se lee: "*A* es el conjunto de todos los elementos *a* tales que cumplen la propiedad *P*".

Ejemplo 3

Para determinar por extensión el conjunto *V* de las vocales, se escribe:

$$V = \{a, e, i, o, u\}$$

Para determinar *V* por comprensión, se escribe:

$$V = \{x / x \text{ es vocal}\}$$

CULTURA del Buen Vivir

La justicia

Es un conjunto de valores esenciales sobre los cuales se debe basar una sociedad y el Estado. Esos valores son el respeto, la equidad, la igualdad y la libertad.

- Nombra un acto de justicia basado en la igualdad.

Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer conjuntos y sus características.

1.2 Representación de un conjunto

Los conjuntos se representan gráficamente mediante una curva cerrada a la que se le denomina **diagrama de Venn**, donde los elementos que pertenecen al conjunto se representan dentro de la curva.

A los elementos que no pertenecen al conjunto se les representa fuera de la curva.

Los diagramas de Venn fueron creados por John Venn, matemático y filósofo inglés, quien con su uso provocó un gran revuelo en el mundo de la lógica formal.

La representación gráfica de un conjunto es muy útil para representar algunos hechos matemáticos y extraer información de forma rápida.

Ejemplo 4

En la Figura 1 se observa la representación gráfica del conjunto *A*, cuyos elementos son los números naturales menores que 7, y del conjunto universal *U* de los números naturales.

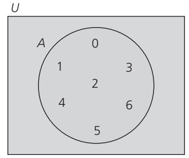


Figura 1

Ejemplo 5

En la Figura 2 se representan dentro del círculo los números pares menores que 10, y en su exterior los números impares menores que 10.

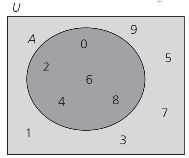


Figura 2

Ejemplo 6

A partir de la Figura 3 se puede determinar cada conjunto (*A*, *B* y *C*) por extensión, así: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 4, 5\}$ y $C = \{3, 6\}$.

De este diagrama de Venn se pueden deducir los siguientes hechos:

- 7 no pertenece a ninguno de los tres conjuntos.
- Los conjuntos *A* y *B* tienen la misma cantidad de elementos, pero no son iguales.
- El conjunto *C* tiene un elemento menos que el conjunto *B*.
- El número de elementos que hay en total entre los conjuntos *A*, *B* y *C* es seis.

Ejemplo 7

En la Figura 4, el conjunto *M* corresponde a los números primos. Los tres puntos seguidos indican que la secuencia de esos números continúa.

Es importante observar que en el interior del conjunto *M* se ha representado un conjunto *N*, cuyo único elemento es 2. Esto indica que el único número primo par es precisamente 2.

Los diagramas de Venn aportan mayor legibilidad a la comprensión de algunas relaciones que de otra manera resultan más difíciles de interpretar. Estos diagramas resultaron como la extensión de trabajos en el campo de la lógica formal que trascendieron por su simplicidad y valor práctico.

Ten en cuenta

Los elementos de todos los conjuntos pertenecen a un gran conjunto fijo llamado **conjunto universal**, denotado por *U*.

Ten en cuenta

La idea de la representación gráfica mediante un rectángulo se le debe a Lewis Carrol, matemático y autor de *Alicia en el país de las maravillas*.

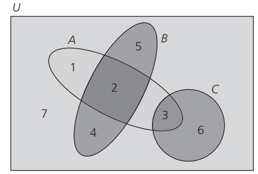


Figura 3

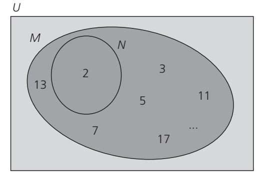


Figura 4

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. ¿Cuál de las siguientes agrupaciones define un conjunto? Si define un conjunto, identifique si es vacío, unitario, finito o infinito.
   a. Los números con más suerte en la lotería
   b. Los números pares mayores que tres
   c. Los libros más interesantes de matemática
   d. Un número primo par
2. Conjuntos y relaciones entre conjuntos
   Determina los elementos de cada conjunto. Luego, clasifica cada conjunto según el número de elementos.
   a. B = {x/x es jugador de la selección de Ecuador}
   b. G ={x/x es fruta amarilla}
   c. P = {k/k es un parque natural de Ecuador}
   d. L ={x/x es un número par y primo}

Actividades TIC

Ingresa a ese link:

http://objetos.unam.mx/matematicas/conjuntos/conjuntos.swf

Busca determinación y clases de conjuntos y resuelve los problemas propuestos.

Actividades colaborativas

Forme grupos de cuatro estudiantes, pídales que resuelvan el ejercicio 7 de la página 143 del texto.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Clases de conjuntos

Conjunto Finito: Es el conjunto al que se le puede determinar su cardinalidad o puede llegar a contar su último elemento.

Ejemplo:

M= {*/x es divisor de 24}

M= {1,2,3,4,6,8,12,24}

Conjunto Infinito: Es el conjunto que, por tener muchisimos elementos, no se le puede llegar a contar su ultimo elemento.

Ejemplo:

A= {*/x sea número real}

Conjunto Vacío: Es el conjunto cuya cardinalidad es cero ya que carece de elementos. El símbolo del conjunto vacío Ø o { }.

Ejemplo:

C={*/x sea mayor que 3 y menor que 2}

Conjunto Unitario: Es el conjunto que solo tiene un elemento. Su cardinalidad es uno (1).

Ejemplo:

D={*/x sea vocal de la palabra "pez"}

1 Conjuntos

Ten en cuenta

Todo conjunto **unitario** es finito, pues cuenta con un único elemento.

El conjunto **vacío** es finito, ya que tiene cero elementos.

1.3 Clases de conjuntos

Los conjuntos se pueden clasificar de acuerdo con el número de elementos que poseen en: finitos, infinitos, unitarios o vacíos.

- Un conjunto es **finito** cuando todos sus elementos pueden ser contados.
- Un conjunto es **infinito** cuando no es finito.
- Un conjunto **unitario** es aquel que tiene un único elemento.
- Un conjunto es **vacío** si carece de elementos.

Ejemplo 8

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5...\}$ representa el conjunto infinito de los números naturales.

$B = \{m, u, r, c, i, e, l, a, g, o\}$ es un conjunto finito que consta de diez elementos.

$C = \{Luna\}$ es un conjunto unitario, cuyo único elemento es la Luna.

$D = \{\}$ es un conjunto vacío porque no tiene elementos.

También se puede establecer qué tipo de conjunto se tiene sin necesidad de determinarlo por extensión.

Ejemplo 9

$A = \{x/x$ es un número impar$\}$ es un conjunto infinito.

$B = \{x/x$ es un divisor de 15$\}$ es un conjunto finito, pues tiene cuatro elementos: 1, 3, 5 y 15.

$C = \{x/x$ es un número primo par$\}$ es unitario, pues 2 es el único número que cumple esta condición.

$D = \{x/x$ es un número natural entre 3 y 4$\}$ es vacío, pues no hay ningún número natural mayor que 3 y menor que 4.

$E = \{x/x$ es un número impar divisible por 2$\}$ es un conjunto vacío porque no existe algún número que cumpla esta propiedad.

Ten en cuenta

Aunque pueda parecer que el conjunto de **números naturales** tiene más elementos que el conjunto de **números pares**, la verdad es que ambos conjuntos son infinitos.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Clasifica cada conjunto según sea infinito, finito, unitario o vacío.

a. $P = \{x/x$ es mes del año terrestre$\}$

b. $M = \{x/x$ es capital de Ecuador$\}$

c. $D = \{x/x$ es un ser humano con 200 años de edad$\}$

d. $T = \{x/x$ es un número natural par$\}$

e. $N = \{x/x$ es un día de la semana$\}$

f. $O = \{x/x$ es un número primo mayor que 20 y menor que 25$\}$

g. $Q = \{x/x$ es un número par menor que 2$\}$

Solución:

a. P es un conjunto finito que tiene doce elementos (los meses del año).

b. M es un conjunto unitario cuyo único elemento es Quito.

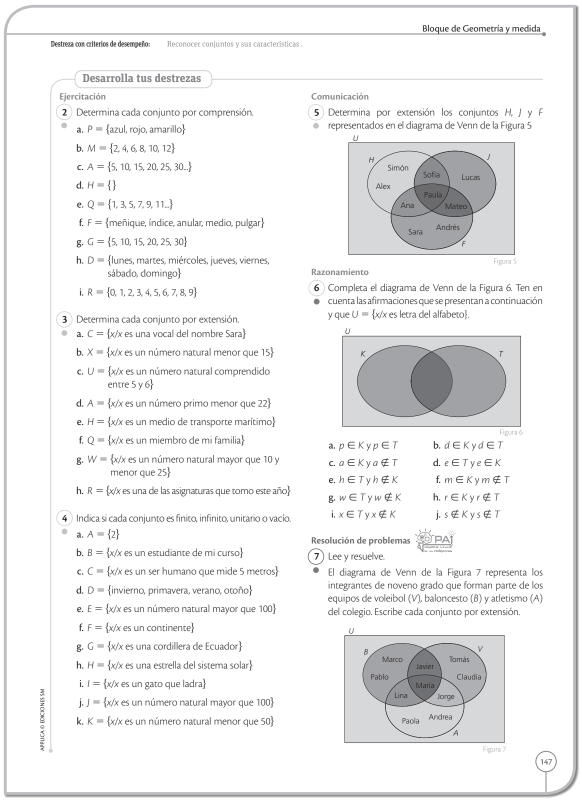
c. D es un conjunto vacío porque ningún ser humano vive 200 años.

d. T es un conjunto infinito, pues no existe un último número natural par.

e. N es un conjunto finito que tiene siete elementos (los días de la semana).

f. O es un conjunto unitario cuyo único elemento es 23.

g. Q es un conjunto unitario, pues 0 que es un número par, es menor que 2.



Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer conjuntos y sus características .

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Determina cada conjunto por comprensión.

a. $P = \{$azul, rojo, amarillo$\}$

b. $M = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

c. $A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30...\}$

d. $H = \{\}$

e. $Q = \{1, 3, 5, 7, 9, 11...\}$

f. $F = \{$meñique, índice, anular, medio, pulgar$\}$

g. $G = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

h. $D = \{$lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo$\}$

i. $R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

3 Determina cada conjunto por extensión.

a. $C = \{x/x$ es una vocal del nombre Sara$\}$

b. $X = \{x/x$ es un número natural menor que 15$\}$

c. $U = \{x/x$ es un número natural comprendido entre 5 y 6$\}$

d. $A = \{x/x$ es un número primo menor que 22$\}$

e. $H = \{x/x$ es un medio de transporte marítimo$\}$

f. $Q = \{x/x$ es un miembro de mi familia$\}$

g. $W = \{x/x$ es un número natural mayor que 10 y menor que 25$\}$

h. $R = \{x/x$ es una de las asignaturas que tomo este año$\}$

4 Indica si cada conjunto es finito, infinito, unitario o vacío.

a. $A = \{2\}$

b. $B = \{x/x$ es un estudiante de mi curso$\}$

c. $C = \{x/x$ es un ser humano que mide 5 metros$\}$

d. $D = \{$invierno, primavera, verano, otoño$\}$

e. $E = \{x/x$ es un número natural mayor que 100$\}$

f. $F = \{x/x$ es un continente$\}$

g. $G = \{x/x$ es una cordillera de Ecuador$\}$

h. $H = \{x/x$ es una estrella del sistema solar$\}$

i. $I = \{x/x$ es un gato que ladra$\}$

j. $J = \{x/x$ es un número natural mayor que 100$\}$

k. $K = \{x/x$ es un número natural menor que 50$\}$

Comunicación

5 Determina por extensión los conjuntos H, J y F representados en el diagrama de Venn de la Figura 5

Figura 5

Razonamiento

6 Completa el diagrama de Venn de la Figura 6. Ten en cuenta las afirmaciones que se presentan a continuación y que $U = \{x/x$ es letra del alfabeto$\}$.

Figura 6

a. $p \in K$ y $p \in T$ b. $d \in K$ y $d \in T$

c. $a \in K$ y $a \notin T$ d. $e \in T$ y $e \in K$

e. $h \in T$ y $h \notin K$ f. $m \in K$ y $m \notin T$

g. $w \in T$ y $w \notin K$ h. $r \in K$ y $r \notin T$

i. $x \in T$ y $x \notin K$ j. $s \notin K$ y $s \notin T$

Resolución de problemas

7 Lee y resuelve.

El diagrama de Venn de la Figura 7 representa los integrantes de noveno grado que forman parte de los equipos de voleibol (V), baloncesto (B) y atletismo (A) del colegio. Escribe cada conjunto por extensión.

Figura 7

147

APPLICA © EDICIONES SM

Ejercitación

2. **a.** $P = \{x/x$ es un color primario$\}$

b. $M = \{x/x$ es un número par mayor o igual que 2 y menor o igual que 12$\}$

c. $A = \{x/x$ es un múltiplo de 5 diferente de 0$\}$

d. Posible solución: $H = \{x/x$ es un número par e impar a la vez$\}$

e. $Q = \{x/x$ es un número impar$\}$

f. $F = \{x/x$ es un dedo de la mano$\}$

g. $G = \{x/x$ es un múltiplo de 5 diferente de 0 y menor que 35$\}$

h. $D = \{x/x$ es un día de la semana$\}$

i. $R = \{x/x$ es un número dígito$\}$

3. **a.** $C = \{a\}$

b. $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,10, 11, 12, 13, 14\}$

c. $U = \{\ \}$

d. $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$

e. $H = \{$barco, yate, balsa, crucero$\}$

f. $Q = \{$papá, mamá, hermano$\}$

g. $W = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$

h. $R = \{$matemáticas, sociales, ciencias, castellano$\}$

4. **a.** Unitario **b.** Finito **c.** Vacío

d. Finito **e.** Infinito **f.** Finito

g. Finito **h.** Finito **i.** Vacío

j. Infinito **k.** Finito

Comunicación

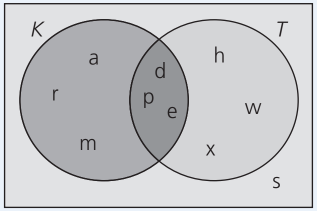
5. $H = \{$Simón, Álex, Sofía, Paula, Ana$\}$;

$J = \{$Sofía, Lucas, Mateo, Paula$\}$;

$F = \{$Paula, Mateo, Sara, Andrés, Ana$\}$

Razonamiento

6.



Resolución de problemas

7. $B = \{$Marco, Pablo, Javier, María, Lina$\}$

$V = \{$ Javier, María, Jorge, Claudia, Tomás$\}$

$A = \{$Lina, María, Jorge, Andrea, Paola$\}$

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Recuerde inicialmente a los y las estudiantes, las formas de determinación de conjuntos y su representación en diagramas de Veen, establezca las relaciones de contenencia e igualdad presentándoles un ejemplo con tres conjuntos numéricos. .

b. Defina algunas propiedades de contenencia de conjuntos y compruebe que se cumplan las relaciones con ejemplos. Determine cuándo dos conjuntos son disyuntos. Utilice las representaciones en diagramas de Venn estudiados anteriormente y demuestre que no tiene elementos comunes los conjuntos disyuntos.

Actividades TIC

Ingresa a ese link:

http://objetos.unam.mx/matematicas/conjuntos/conjuntos.swf

Busca igualdad y pertenencia de conjuntos y resuelve los problemas propuestos.

Actividades colaborativas

Forme grupos de cuatro estudiantes, pídales que resuelvan el ejercicio 5 de la página 145 del texto.

2 Relaciones entre conjuntos

Explora

Sean los conjuntos:

$P = \{1, 2, 3\}$

$Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y

$V = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

- ¿Qué relación existe entre los elementos de P con respecto a los elementos de Z y entre los elementos de V con respecto a los de Z?

Ten en cuenta

Para definir las relaciones de contenencia e igualdad entre conjuntos se utilizan los siguientes símbolos.

Contenencia

$A \subseteq B \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$

Igualdad

$A = B \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)$

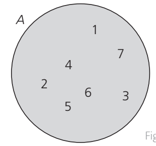


Figura 1

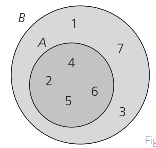


Figura 2

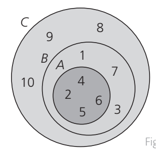


Figura 3

2.1 Relaciones de contenencia e igualdad

Al comparar los conjuntos $P = \{1, 2, 3\}$, $Z = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $V = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, se puede afirmar que:

- Todos los elementos de P pertenecen al conjunto Z; entonces, se dice que el conjunto P es subconjunto de V (o que P está contenido en V).
- Como los elementos 0 y 8 pertenecen a V pero no a Z, se puede afirmar que V no está contenido en Z (o que no es subconjunto de Z).

Sean A y B dos conjuntos, se dice que ***A* está contenido en *B*** (o que **A es subconjunto de *B***) si cada elemento que pertenece al conjunto A también pertenece al conjunto B. Esta relación se simboliza con $A \subseteq B$.

Ejemplo 1

El conjunto de los números pares es un subconjunto de los números naturales, porque todo número par es natural.

De otra parte, el conjunto de los números pares no es un subconjunto de los números primos, pues por ejemplo, 4 es un número par pero no es primo.

La **contenencia** de conjuntos satisface algunas propiedades:

- **Propiedad reflexiva**. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

  En la Figura 1 es evidente que cada elemento de A es elemento del mismo conjunto A.
- **Propiedad antisimétrica**. Si A y B son dos conjuntos diferentes y A está contenido en B, entonces B no puede estar contenido en A.

  En la Figura 2 se observa que todo elemento de A es elemento de B, pero existen elementos de B que no son elementos de A; es decir, A está contenido en B, pero B no está contenido en A.
- **Propiedad transitiva**. Si un conjunto A está contenido en un conjunto B y, a su vez, B está contenido en C, entonces A está contenido en C.

  En la Figura 3 se ve que cada elemento de A es elemento de B y de C al mismo tiempo, así que A está contenido en B y en C.

Dos conjuntos ***A* y *B* son iguales** si tienen los mismos elementos. Esta relación se denota por $A = B$.

Ejemplo 2

Dados los conjuntos $A = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ y $C = \{3, 4, 7, 8\}$, se puede establecer que $A = B$ porque los dos conjuntos tienen los mismos elementos, mientras que $C \neq A$ (C es diferente de A) y $C \neq B$ (C es diferente de B).

2.2 Conjuntos disyuntos

Dos conjuntos A y B son **disyuntos** si no tienen elementos en común.

Ejemplo 3

Entre los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ no hay elementos comunes, por lo tanto, A y B son disyuntos.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer conjuntos y sus características .

Ejemplo 4

El conjunto $P = \{x/x$ es un número natural par$\}$ y el conjunto $M = \{x/x$ es un número natural impar$\}$ son disyuntos, pues no existe un número natural que a la vez sea par e impar.

Para representar dos conjuntos disyuntos se usan dos líneas curvas cerradas independientes sin ningún elemento en común, tal como se sugiere en la Figura 4.

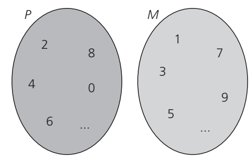


Figura 4

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Decide si cada par de conjuntos son disyuntos.

a. A es el conjunto de los números primos y B es el de los números pares

b. M es el conjunto de números impares y N es el conjunto de múltiplos de 4

c. G es el conjunto de múltiplos de 7 y Q es el conjunto de sus divisores

Solución:

a. A y B no son disyuntos, pues 2 es un número par y primo a la vez

b. M y N son disyuntos, pues todos los múltiplos de 4 son pares

c. G y Q no son disyuntos, pues 7 es múltiplo y divisor de 7 al mismo tiempo

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2 Observa la Figura 5 e indica si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tus respuestas.

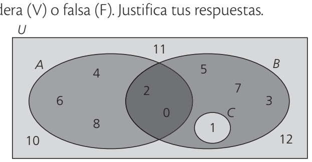


Figura 5

a. $0 \in A$ ( )

b. $B \in U$ ( )

c. $B \subseteq C$ ( )

d. $B = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$ ( )

e. $U = \{10, 11, 12\}$ ( )

f. Los conjuntos A y C son disyuntos ( )

g. El conjunto C es unitario ( )

3 Escribe con símbolos la relación que hay entre los conjuntos A y B en cada caso.

a. $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$

b. $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

c. $A = \{6, 8, 10\}$ y $B = \{2\}$

d. $A = \{10, 11, 12, 13\}$ y $B = \{12, 13\}$

e. $A = \{2, 4, 5, 6, 7\}$ y $B = \{4\}$

f. $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{a, b, d, e\}$

Comunicación

4 Indica si cada uno de los siguientes pares de conjuntos son disyuntos. Explica cada respuesta.

a. V es el conjunto de las vocales del alfabeto castellano y C el de consonantes del mismo idioma.

b. I es el conjunto de insectos y M el conjunto de mamíferos.

c. E es el conjunto de países europeos y A el conjunto de países de América.

d. P es el conjunto de países de habla portuguesa y A el conjunto de países de América.

e. Y es el conjunto de números primos y Z el de números naturales entre 14 y 16.

f. R es el conjunto de divisores de 11 y S el de divisores de 5.

Resolución de problemas

5 Da un ejemplo de un conjunto que sea disyunto con cada uno de los conjuntos dados. Ten en cuenta el conjunto universal en cada caso.

a. Múltiplos del número 5

b. Divisores del número 10

c. Números primos terminados en 1

d. Números impares menores que 15

e. Números pares mayores que 2 pero menores que 50

f. Números pares primos

Razonamiento

2 **a.** V **b.** F **c.** F **d.** V

e. F **f.** V **g.** V

3. **a.** $A = B$ **b.** $A \subseteq B$

c. $A \neq B$ **d.** $B \subseteq A$

e. $B \subseteq A$ **f.** $A \neq B$

Razonamiento

4. **a.** Disyuntos

b. Disyuntos

c. Disyuntos

d. No son disyuntos. Brasil es un elemento común a los dos conjuntos.

e. Disyuntos.

g. No son disyuntos. El 1 es divisor de todos los números naturales.

Resolución de problemas

5. En cada caso la respuesta es abierta. Verifique la pertinencia de cada solución y evalúe que se haya considerado el conjunto universal correspondiente.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Retome lo explicado mostrándoles en forma analítica y gráfica de diagramas de Veen la pertenencia de conjuntos, igualdad, inclusión y exclusión de elementos entre conjuntos.

b. Presente un ejemplo muy sencillo de unión e intersección de conjuntos con elementos en común y no comunes de con elementos numéricos y con letras.

c. Defina las operaciones unión e intersección de conjuntos con diagramas específicos de cada operación. Se debe tomar en cuenta el conjunto universal para definir el conjunto complemento y diferencia simétrica, es importante que se aplique a problemas cotidianos que propone el texto.

3 Operaciones entre conjuntos

Explora

Representa en un diagrama de Venn los conjuntos $A = \{h, e, l, n, a\}$ y $B = \{a, m, l, i\}$.

- ¿Dónde se ubican los elementos comunes de dichos conjuntos?

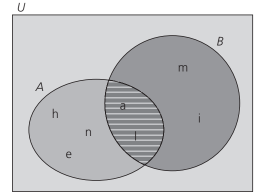
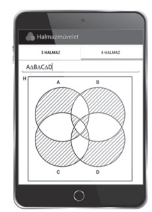


Figura 1

App

Operaciones entre conjuntos

Abre la aplicación *Set operations* y observa la representación gráfica de diversas operaciones entre conjuntos.



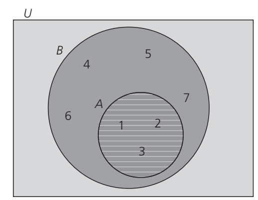


Figura 4

3.1 Intersección de conjuntos

En la Figura 1 se muestra la representación de los conjuntos A y B en un diagrama de Venn. Los elementos en común de estos conjuntos se encuentran en la intersección de los conjuntos (región sombreada).

A la intersección de $A = \{h, e, l, n, a\}$ y $B = \{a, m, l, i\}$ pertenecen los elementos que están en A y en B a la vez; esto es, a y l.

La **intersección** de dos conjuntos A y B es el conjunto de elementos comunes entre A y B. La intersección se nota como $A \cap B$ y se define como: $A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$.

Por lo tanto, $A \cap B = \{a, l\}$.

Ejemplo 1

El conjunto M de todos los múltiplos de 2 y el conjunto N de todos los divisores de 5 son disyuntos y, por lo tanto, su intersección es vacía.

$M = \{0, 2, 4, 6, 8, 10...\}$ y $N = \{1, 5\}$ M = intersección $N = \{\ \}$

La intersección de conjuntos cumple con las siguientes **propiedades**:

- La intersección de un conjunto consigo mismo es el propio conjunto. En la Figura 2 se observa que $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, y es claro que $A \cap A = A$.

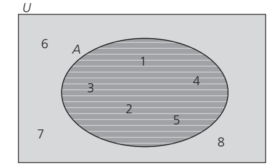


Figura 2

- La intersección de dos conjuntos es subconjunto de cada uno de estos.

  En la Figura 3 se tiene que $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$; entonces, el conjunto intersección $A \cap B = \{4, 5\}$ está contenido tanto en A como en B.

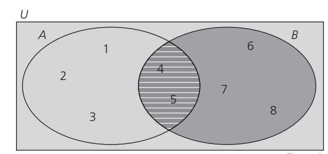


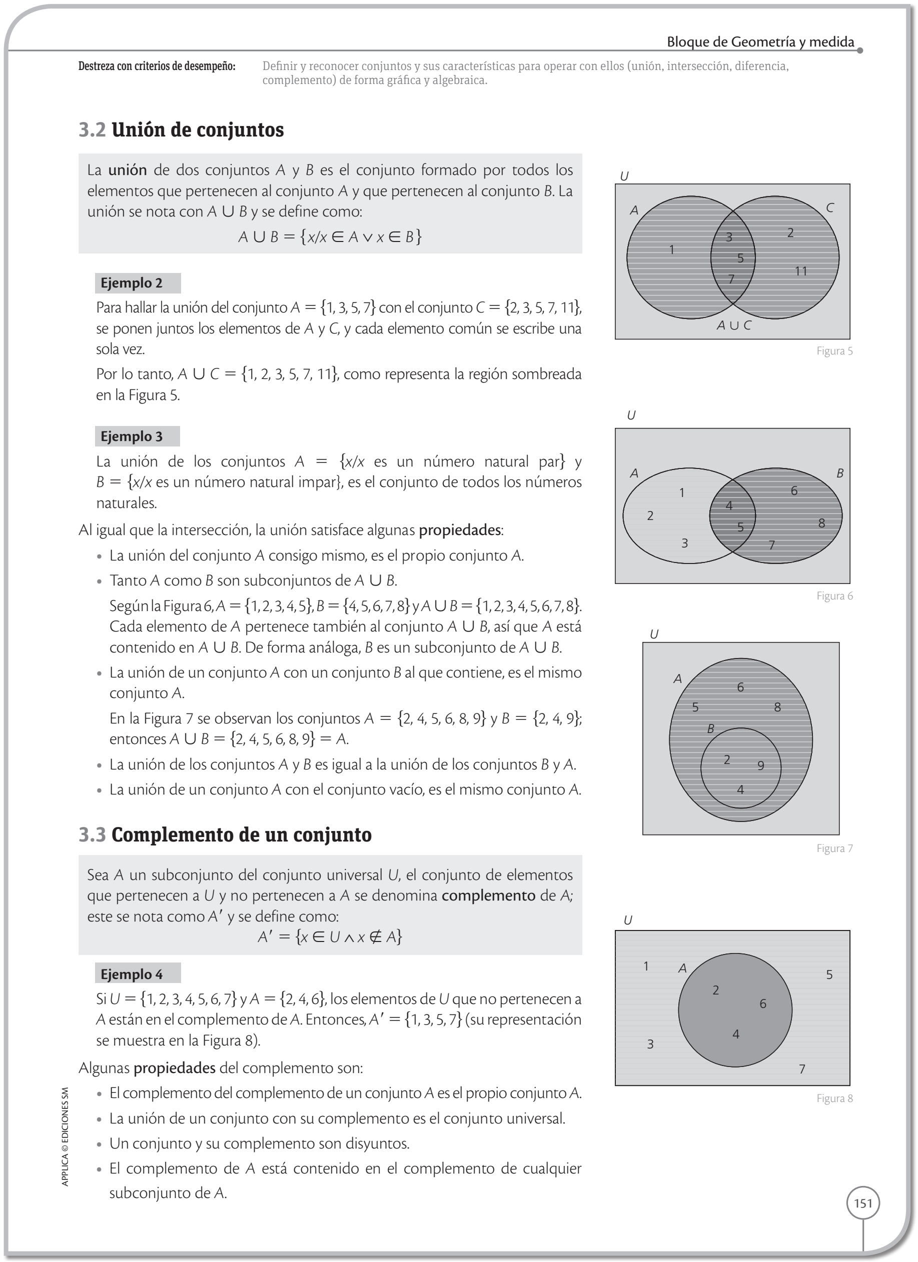
Figura 3

- La intersección de un conjunto con un subconjunto suyo, es el mismo subconjunto.

  En la Figura 4, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $A \cap B = \{1, 2, 3\} = A$.

- La intersección de dos conjuntos A y B es igual a la intersección de los conjuntos B y A.

- La intersección de un conjunto con el conjunto vacío es el conjunto vacío, pues al carecer este último de elementos, no puede tener ninguno en común con otros conjuntos.



Destreza con criterios de desempeño: Definir y reconocer conjuntos y sus características para operar con ellos (unión, intersección, diferencia, complemento) de forma gráfica y algebraica.

3.2 Unión de conjuntos

La **unión** de dos conjuntos *A* y *B* es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto *A* y que pertenecen al conjunto *B*. La unión se nota con $A \cup B$ y se define como:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Ejemplo 2

Para hallar la unión del conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$ con el conjunto $C = \{2, 3, 5, 7, 11\}$, se ponen juntos los elementos de *A* y *C*, y cada elemento común se escribe una sola vez.

Por lo tanto, $A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$, como representa la región sombreada en la Figura 5.

Figura 5

Ejemplo 3

La unión de los conjuntos $A = \{x/x$ es un número natural par$\}$ y $B = \{x/x$ es un número natural impar$\}$, es el conjunto de todos los números naturales.

Al igual que la intersección, la unión satisface algunas **propiedades**:

- La unión del conjunto *A* consigo mismo, es el propio conjunto *A*.
- Tanto *A* como *B* son subconjuntos de $A \cup B$.

  Según la Figura 6, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ y $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Cada elemento de *A* pertenece también al conjunto $A \cup B$, así que *A* está contenido en $A \cup B$. De forma análoga, *B* es un subconjunto de $A \cup B$.
- La unión de un conjunto *A* con un conjunto *B* al que contiene, es el mismo conjunto *A*.

  En la Figura 7 se observan los conjuntos $A = \{2, 4, 5, 6, 8, 9\}$ y $B = \{2, 4, 9\}$; entonces $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 9\} = A$.
- La unión de los conjuntos *A* y *B* es igual a la unión de los conjuntos *B* y *A*.
- La unión de un conjunto *A* con el conjunto vacío, es el mismo conjunto *A*.

Figura 6

Figura 7

3.3 Complemento de un conjunto

Sea *A* un subconjunto del conjunto universal *U*, el conjunto de elementos que pertenecen a *U* y no pertenecen a *A* se denomina **complemento** de *A*; este se nota como A' y se define como:

$$A' = \{x \in U \wedge x \notin A\}$$

Ejemplo 4

Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ y $A = \{2, 4, 6\}$, los elementos de *U* que no pertenecen a *A* están en el complemento de *A*. Entonces, $A' = \{1, 3, 5, 7\}$ (su representación se muestra en la Figura 8).

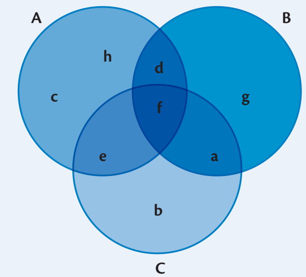
Algunas **propiedades** del complemento son:

- El complemento del complemento de un conjunto *A* es el propio conjunto *A*.
- La unión de un conjunto con su complemento es el conjunto universal.
- Un conjunto y su complemento son disyuntos.
- El complemento de *A* está contenido en el complemento de cualquier subconjunto de *A*.

Figura 8

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

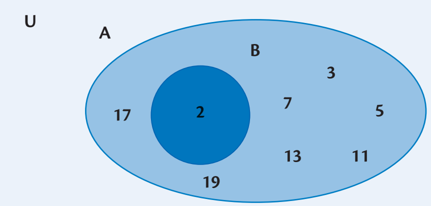
1. Observa el diagrama y encuentra los elementos de los conjuntos propuestos.



a. $A \cup B \cap C$ b. $A \cap B \cap C$

c. $A \cup C \cap B$ d. $A \cup B \cup C$

2. Observa el diagrama de Venn de la figura.



a. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto A?

b. ¿Qué tipo de números pertenecen al conjunto A?

c. ¿Qué clase de conjunto es B?

d. ¿Existe A B? Si es así, indica cuáles son sus elementos: si no existe, explica las razones.

e. ¿Cuál podría ser en este caso el conjunto U?

f. Halla $A \cup B$ y $B \cup A$, y escribe una conclusión.

g. Halla $A \cap B$ y $B \cap A$, y escribe una conclusión.

h. Halla $A - B$ y $B - A$, y escribe una conclusión.

i. ¿Cuál es el complemento de A?

j. ¿Cuál es el complemento de U?

k. ¿Cómo son $A \Delta B$ y $B \Delta A$? Explica.

Libro del alumno

Actividades TIC

Ingresa a ese link:

http://objetos.unam.mx/matematicas/conjuntos/conjuntos.swf

Busca operaciones entre conjuntos y resuelve los problemas propuestos.

Actividades colaborativas

1. Carlos, Catalina y Pedro están en el grupo de danzas. Luis, Diego y Pedro están en el de música. Luis, Catalina y Juan están en el de teatro.

   ¿Quiénes pertenecen a los tres grupos?

   ¿Quiénes pertenecen al grupo de teatro o danzas?

   ¿Quiénes pertenecen a la vez a los grupos de danzas y música?

2. En una encuesta realizada a 580 personas sobre el tipo de cine favorito se obtuvieron los siguientes resultados. A 150 personas les gustan la comedia, el terror y la ficción.
   A 25 personas les gustan la comedia y el terror; A 35 personas les gustan el terror y la ficción; A 10 personas Solo la ficción; A 75 personas Les gustan la comedia y la ficción.

   Al resto de personas les gusta solo la comedia.

   a. Representa la situación en un diagrama de Venn.
   b. ¿A cuántas personas les gusta solo la comedia?
   c. ¿A cuántas personas les gustan las películas de terror?

Bloque de Geometría y medida

3 Operaciones entre conjuntos

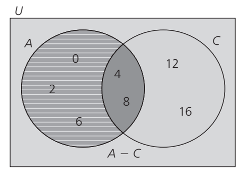


Figura 1

3.4 Diferencia de conjuntos

A la **diferencia de dos conjuntos** A y B pertenecen todos los elementos de A que no pertenecen a B. Esta operación se nota con $A - B$ y se define simbólicamente como:

$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ejemplo 5

Si $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ y $C = \{4, 8, 12, 16\}$, los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a C conforman el conjunto diferencia

$A - C = \{0, 2, 6\}$, que se representa en la región sombreada de la Figura 1

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/6smt01

Utiliza las operaciones entre conjuntos para resolver problemas.

3.5 Diferencia simétrica

A la **diferencia simétrica** entre un conjunto A y un conjunto B pertenecen todos los elementos que pertenecen a A o pertenecen a B, pero no a ambos simultáneamente. Se nota como $A \triangle B$ y se define como:

$$A \triangle B = \{x \in U/(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$$

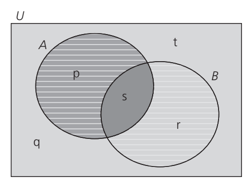


Figura 2

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Dados los conjuntos $U = \{p, q, r, s, t\}$, $A = \{p, s\}$ y $B = \{r, s\}$, encuentra la diferencia simétrica entre A y B.

Solución:

Se observa que p pertenece a A pero no a B y r pertenece a B pero no a A. Por tanto, $A \triangle B = \{p, r\}$, como lo muestra la parte sombreada de la Figura 2.

MatemaTICS

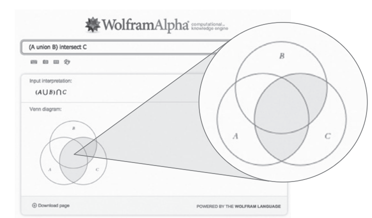
Representa operaciones entre conjuntos con WolframAlpha

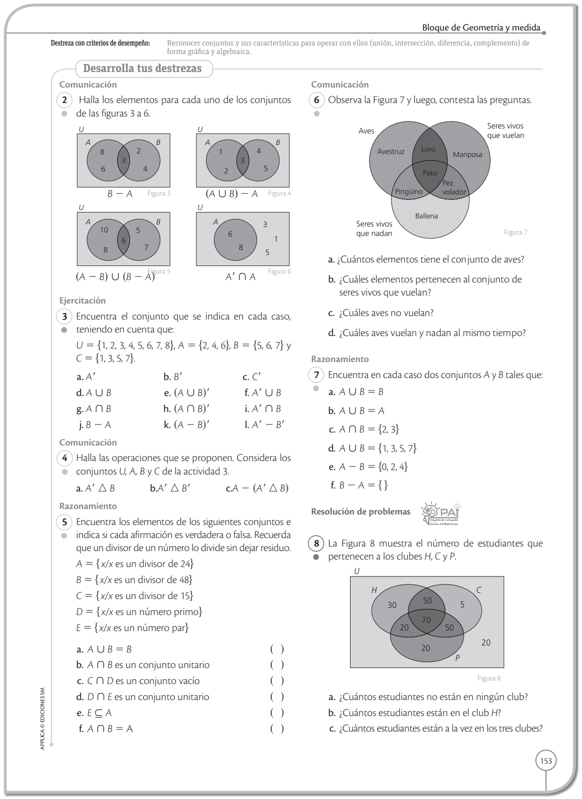
WolframAlpha representa operaciones entre conjuntos en diagramas de Venn. Para ello se utilizan los comandos *union, intersect, difference, symmetric difference of, complement* o los símbolos ∪, ∩, \, ϴ, ′, respectivamente.

Observa el procedimiento para representar la operación $(A \cup B) \cap C$.

Se escribe en el recuadro la operación y se da clic en ⊟.

Aparece una nueva ventana con la representación.




Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer conjuntos y sus características para operar con ellos (unión, intersección, diferencia, complemento) de forma gráfica y algebraica.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2. Halla los elementos para cada uno de los conjuntos de las figuras 3 a 6.

$B - A$ Figura 3 — $(A \cup B) - A$ Figura 4 — $(A - B) \cup (B - A)$ Figura 5 — $A' \cap A$ Figura 6

Ejercitación

3. Encuentra el conjunto que se indica en cada caso, teniendo en cuenta que: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ y $C = \{1, 3, 5, 7\}$.

a. A' b. B' c. C' d. $A \cup B$ e. $(A \cup B)'$ f. $A' \cup B$ g. $A \cap B$ h. $(A \cap B)'$ i. $A' \cap B$ j. $B - A$ k. $(A - B)'$ l. $A' - B'$

Comunicación

4. Halla las operaciones que se proponen. Considera los conjuntos U, A, B y C de la actividad 3.

a. $A' \triangle B$ b. $A' \triangle B'$ c. $A - (A' \triangle B)$

Razonamiento

5. Encuentra los elementos de los siguientes conjuntos e indica si cada afirmación es verdadera o falsa. Recuerda que un divisor de un número lo divide sin dejar residuo.

$A = \{x/x$ es un divisor de $24\}$
$B = \{x/x$ es un divisor de $48\}$
$C = \{x/x$ es un divisor de $15\}$
$D = \{x/x$ es un número primo$\}$
$E = \{x/x$ es un número par$\}$

a. $A \cup B = B$ ( )
b. $A \cap B$ es un conjunto unitario ( )
c. $C \cap D$ es un conjunto vacío ( )
d. $D \cap E$ es un conjunto unitario ( )
e. $E \subseteq A$ ( )
f. $A \cap B = A$ ( )

Comunicación

6. Observa la Figura 7 y luego, contesta las preguntas.

Figura 7

a. ¿Cuántos elementos tiene el conjunto de aves?
b. ¿Cuáles elementos pertenecen al conjunto de seres vivos que vuelan?
c. ¿Cuáles aves no vuelan?
d. ¿Cuáles aves vuelan y nadan al mismo tiempo?

Razonamiento

7. Encuentra en cada caso dos conjuntos A y B tales que:

a. $A \cup B = B$
b. $A \cup B = A$
c. $A \cap B = \{2, 3\}$
d. $A \cup B = \{1, 3, 5, 7\}$
e. $A - B = \{0, 2, 4\}$
f. $B - A = \{\}$

Resolución de problemas

8. La Figura 8 muestra el número de estudiantes que pertenecen a los clubes H, C y P.

Figura 8

a. ¿Cuántos estudiantes no están en ningún club?
b. ¿Cuántos estudiantes están en el club H?
c. ¿Cuántos estudiantes están a la vez en los tres clubes?

153

APPLICA © EDICIONES SM

Comunicación

2. a. $\{2, 4\}$ b. $\{4, 5\}$

c. $\{5, 7, 8, 10\}$ d. $\{\ \}$

Ejercitación

3. a. $\{1, 3, 5, 7, 8\}$

b. $\{1, 2, 3, 4, 8\}$

c. $\{2, 4, 6, 8\}$

d. $\{2, 4, 5, 6, 7\}$

e. $\{1, 3, 8\}$

f. $\{1, 3, 5, 6, 7, 8\}$

g. $\{6\}$

h. $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8\}$

i. $\{5, 7\}$ j. $\{5, 7\}$

k. $\{1, 3, 5, 7, 8\}$

l. $\{5, 7\}$

Comunicación

4. a. $\{1, 3, 6, 8\}$ b. $\{2, 4, 5, 7\}$ c. $\{2, 4\}$

Razonamiento

5. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$

$C = \{1, 3, 5, 15\}$ $D = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...\}$

$E = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14...\}$

a. V b. F c. F

d. V e. F f. V

Comunicación

6. a. 4

b. Mariposa, Loro, Pato y Pez volador

c. Pingüino y avestruz

d. Pato y pez volador

Razonamiento

7. a. Cualesquiera dos conjuntos A y B tales que A esté contenido en B.

b. Cualesquiera dos conjuntos A y B tales que B esté contenido en A.

c. Cualesquiera A y B que tengan a 2 y 3 como elementos en común.

d. Posible solución: $A = \{1, 3\}$ y $B = \{3, 5, 7\}$

e. Posible solución: $A = \{0, 2, 3\ 4\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$

f. Cualesquiera dos conjuntos A y B tales que $B = A$

Resolución de problemas

8. a. 20 estudiantes.

b. 170 estudiantes.

c. 70 estudiantes.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Para introducir el tema proponga una situación en la cual se empleen elementos de la aula, por ejemplo, hay dos estudiantes y tenemos cinco libros, dígales que formen las posibles parejas entre estudiantes y libros, teniendo en cuenta que todos los libros pueden ser escogidos por cada estudiante, es decir cada niño puede estar relacionado con todos los libros para obtener así diez parejas. Pueden ayudarse con una gráfica que represente esta situación.

b. Es importante que les explique que el producto cartesiano es una relación que se establece entre los elementos de dos conjuntos. Presente la representación gráfica mediante diagramas sagitales y acláreles que cuando los conjuntos que se usan para el producto cartesiano son numéricos como Z x Z, el diagrama cartesiano conforma el plano cartesiano.

c. Proponga ejercicios de refuerzo y pídales verificar que la cantidad de parejas ordenadas que se obtienen en un producto cartesiano es el producto de multiplicar de la cantidad de elementos del primer conjunto por la cantidad de elementos del segundo.

d. Explique a los estudiantes que una relación de equivalencia se da en un mismo conjunto y debe cumplir con las propiedades simétrica, reflexiva y transitiva. Según el diagrama sagital, determine si la relación R es de equivalencia.

4 Relaciones

Explora

Observa los elementos de los conjuntos A y B.

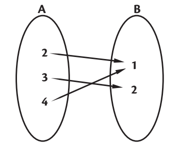


Figura 1

¿Cuántos pares ordenados se pueden formar?

Ten en cuenta

Producto cartesiano

El producto cartesiano A X B se define como:

$A \times B = \{(x, y)\ x \in A \text{ y } y \in B\}$

$A \times B \neq B \times A$

Si *A* define el número natural *n* y *B* define el número natural m, entonces *A* X *B* define el número *n* X *m*.

Ten en cuenta

Las relaciones son subconjuntos de pares ordenados que se forman del **producto cartesiano** entre los elementos de dos conjuntos, como se indica en el ejemplo 2.

4.1 Relaciones

Una relación de un conjunto **A** en un conjunto **B** es el conjunto **R** de pares ordenados que satisfacen una regla o propiedad y tales que, el primer elemento pertenece a **A** y el segundo elemento pertenece a **B**.

$$R \subseteq A \times B$$

El conjunto A se llama conjunto de partida y el conjunto B se llama conjunto de llegada (figura 1).

Ejemplo 1

Es una relación:

Cada persona está relacionada con un nombre

Esto es similar a decir que: A cada persona le corresponde un nombre.

Ejemplo 2

Sean los conjuntos A= {2,3,4} y B={1,2}

El producto cartesiano A X B = {(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)}

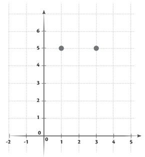
Del producto cartesiano A X B se podrían extraer varias relaciones como:

Relación 1: Conjunto de los pares ordenados tales que los dos elementos del par ordenado sean impares: {(1,5),(3,5)}

Relación 2: Conjunto de los pares ordenados tales que la suma de sus elementos sea impar: {(2,1),(3,2),(4,1)}

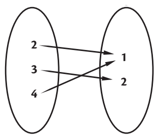
Las relaciones se representan gráficamente mediante el plano cartesiano o un diagrama sagital así:

Plano Cartesiano



Relación 1

Diagrama Sagital



Relación 2

Figura 2

Actividad resuelta

1 En referencia a la figura 1, escribe los pares ordenados de las siguientes relaciones:

a. Conjunto de los pares ordenados cuyo resultado de la suma de sus elementos sea 5 o 6.

b. Conjunto de los pares ordenados tales que el valor absoluto de la diferencia de sus elementos sea 1 o 2.

Solución

a. {(3,2),(4,2)}

b. {(2,1), (3,1), (3,2), (4,2)}

Destrezas con criterios de desempeño: Reconocer e identificar relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia sobre un subconjunto del producto cartesiano.

4.2 Relación definida en un conjunto

Relaciones de equivalencia. Una relación R definida sobre AxA se dice que es de equivalencia cuando es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo 3

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)\}$
Veamos si R es de equivalencia.

Solución

- Reflexiva.

  En efecto, $(1, 1) \in R$, $(2, 2)$, $\in R$ $(3, 3)$, $\in R$ y $(4, 4) \in R$ luego,

  $\forall x\ (x \in A \Rightarrow xRx)$es decir, R es reflexiva

- Simetría.

  En efecto, $(1, 2) \in R$ y, $(2, 1)$, $\in R$ $(3, 4)$, $\in R$ y $(4, 3) \in R$ luego,

  $\forall x, y \in A\ [(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R]$ es decir, la relación propuesta es simétrica

- Transitividad

  En efecto, $(1, 1) \in R$ y, $(1, 2), \in R \Rightarrow (1, 2), \in R$

  $(1, 2) \in R$ y, $(2, 1), \in R \Rightarrow (1, 1), \in R$

  $(1, 2) \in R$ y, $(2, 2), \in R \Rightarrow (1, 2), \in R$

  $(2, 1) \in R$ y, $(1, 1), \in R \Rightarrow (2, 1), \in R$

  $(2, 1) \in R$ y, $(1, 2), \in R \Rightarrow (2, 2), \in R$

  $(2, 2) \in R$ y, $(2, 1), \in R \Rightarrow (2, 1), \in R$

  $(3, 4) \in R$ y, $(4, 4), \in R \Rightarrow (3, 4), \in R$

  $(3, 3) \in R$ y, $(3, 4), \in R \Rightarrow (3, 4), \in R$

  $(4, 3) \in R$ y, $(3, 3), \in R \Rightarrow (4, 3), \in R$

  $(4, 4) \in R$ y, $(4, 3), \in R \Rightarrow (4, 3), \in R$ luego,

$\forall x, y, z \in A\ [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R]$ y la relación es transitiva.

Se concluye que la relación R es de equivalencia, ya que cumple con las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

CULTURA del Buen Vivir

El compromiso

Hacer y cumplir un compromiso, necesita de una voluntad fuerte y el deseo permanente de alcanzar dicha meta.

- Comenta un compromiso que hayas cumplido totalmente a pesar de los inconvenientes que tuviste para lograrlo.

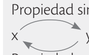
Ten en cuenta

En diagrama sagital se representan las propiedades así

Propiedad reflexiva:

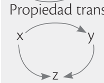
$(x,x) \in R$

Propiedad simétrica:



(x,y) ; $(y,x) \in R$

Propiedad transitiva:



(x,y) ; (y,z) ; $(x, z) \in R$

Ampliación conceptual

Relaciones

Consideramos que la siguiente situación:

Sean: A= {Juan, María, Antonio}y

B= {12 años, 13 años, 15 años}.

Supongamos que las edades de Juan, María y Antonio son:

12 años, 13 años y 15 años, respectivamente.

Si a cada elemento del conjunto A(personas) le asignamos un elemento del conjunto B (edades) en la siguiente forma:

A= {Juan, María, Antonio}

B={12, 13, 15}

Se tiene que llamaremos una relación (la relación consiste en la regla que asigna a cada persona su edad).

Esta regla de asignación puedes escribirse mediante parejas ordenadas, así:

{(Juan,12),(María,13),(Antonio,15)}.

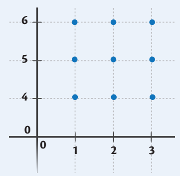
Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

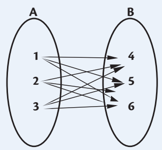
1. Sea A = {1, 2, 3, 4} y R = {(1, 1),(1, 2),(2, 1),(2, 2),(3, 4),(4, 3),(3, 3),(4, 4)} . Ver si R es de equivalencia y grafica en un diagrama sagital.

Actividades colaborativas

Forme grupos de cuatro estudiantes, pídales que resuelvan el ejercicio 13 de la pág,165

3. a { (1, 1,) (1, 2) (1, 3); (2, 1) (2, 2) (2, 3); (3, 1) (3, 2) (3, 3) }

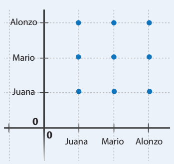
b 

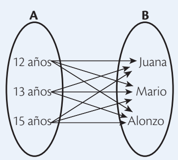
c 

4. **a.** {(Juana, 12 años,) (Juana, 13 años) (Juana, 15 años);

(Mario, 12 años) (Mario, 13 años) (Mario, 15 años);

(Alonzo, 12 años) (Alonzo, 13 años) (Alonzo, 15 años) }

b. 

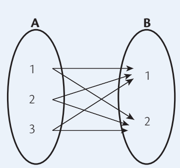
c. 

d. {(12 años, Juana) (13 años, Juana) (15 años, Juana);

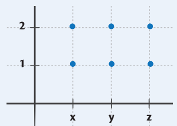
(12 años, Mario) (13 años, Mario) (15 años, Mario);

(12 años, Alonzo) (13 años, Alonzo) (15 años, Alonzo) }

5. **a.** { (1, 1,) (1, 2) (2, 1) (2, 2); (3, 1) (3, 2)}

b. 

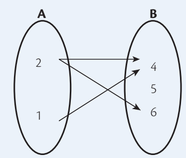
6. **a.** { (x, 1,) (x, 2) (y, 1) (y, 2); (z, 1) (z, 2)}

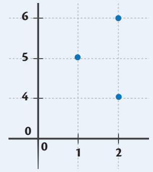
b 

7. A={ 1, 2, 3} y B = { 4, 5, 6 }

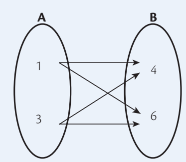
(x, y) ∈ A x B / x + y = # par

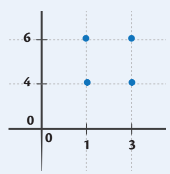
a. R1= {(2, 4); (2, 6); (1, 5)}



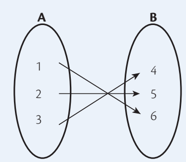


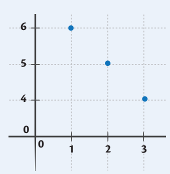
b. R2= {(1, 4); (1, 6); (3, 4) (3, 6)}



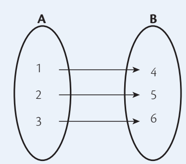


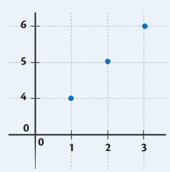
c. R3= {(1, 6); (2, 5); (3, 4)}

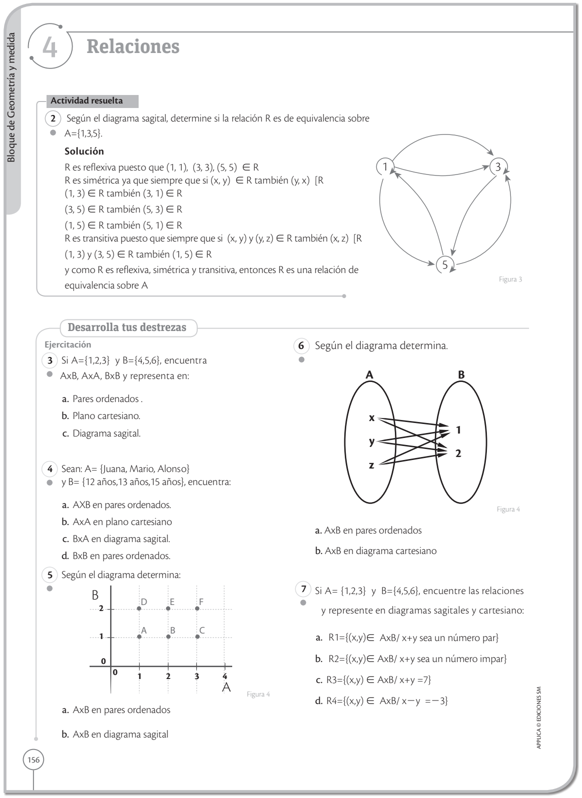




d. R4= {(1, 4); (2, 5); (3, 6)}






Bloque de Geometría y medida

4 Relaciones

Actividad resuelta

2 Según el diagrama sagital, determine si la relación R es de equivalencia sobre A={1,3,5}.

Solución

R es reflexiva puesto que (1, 1), (3, 3), (5, 5) ∈ R
R es simétrica ya que siempre que si (x, y) ∈ R también (y, x) [R
(1, 3) ∈ R también (3, 1) ∈ R
(3, 5) ∈ R también (5, 3) ∈ R
(1, 5) ∈ R también (5, 1) ∈ R
R es transitiva puesto que siempre que si (x, y) y (y, z) ∈ R también (x, z) [R
(1, 3) y (3, 5) ∈ R también (1, 5) ∈ R
y como R es reflexiva, simétrica y transitiva, entonces R es una relación de equivalencia sobre A

Figura 3

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Si A={1,2,3} y B={4,5,6}, encuentra AxB, AxA, BxB y representa en:

a. Pares ordenados .
b. Plano cartesiano.
c. Diagrama sagital.

4 Sean: A= {Juana, Mario, Alonso} y B= {12 años,13 años,15 años}, encuentra:

a. AXB en pares ordenados.
b. AxA en plano cartesiano
c. BxA en diagrama sagital.
d. BxB en pares ordenados.

5 Según el diagrama determina:

Figura 4

a. AxB en pares ordenados
b. AxB en diagrama sagital

6 Según el diagrama determina.

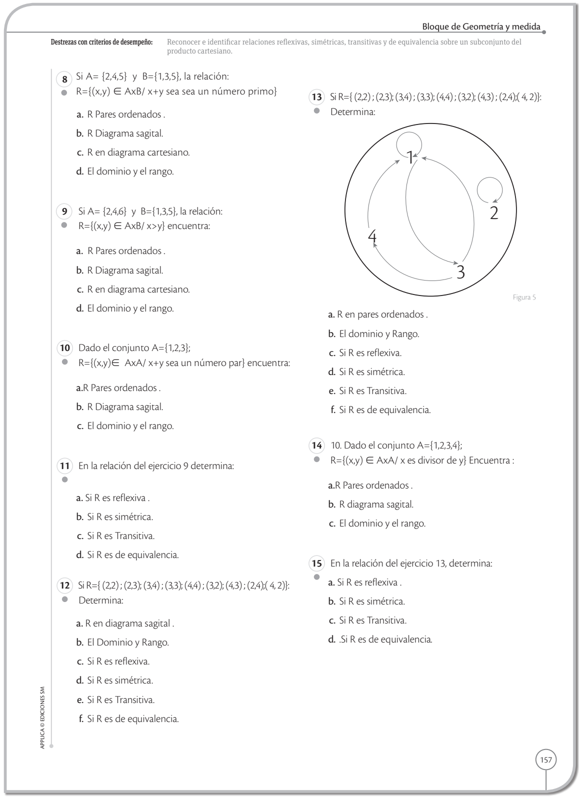
Figura 4

a. AxB en pares ordenados
b. AxB en diagrama cartesiano

7 Si A= {1,2,3} y B={4,5,6}, encuentre las relaciones y represente en diagramas sagitales y cartesiano:

a. R1={(x,y)∈ AxB/ x+y sea un número par}
b. R2={(x,y)∈ AxB/ x+y sea un número impar}
c. R3={(x,y) ∈ AxB/ x+y =7}
d. R4={(x,y) ∈ AxB/ x−y =−3}

156



Bloque de Geometría y medida

Destrezas con criterios de desempeño: Reconocer e identificar relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia sobre un subconjunto del producto cartesiano.

8 Si A= {2,4,5} y B={1,3,5}, la relación:
R={(x,y) ∈ AxB/ x+y sea sea un número primo}

a. R Pares ordenados .
b. R Diagrama sagital.
c. R en diagrama cartesiano.
d. El dominio y el rango.

9 Si A= {2,4,6} y B={1,3,5}, la relación:
R={(x,y) ∈ AxB/ x>y} encuentra:

a. R Pares ordenados .
b. R Diagrama sagital.
c. R en diagrama cartesiano.
d. El dominio y el rango.

10 Dado el conjunto A={1,2,3};
R={(x,y)∈ AxA/ x+y sea un número par} encuentra:

a.R Pares ordenados .
b. R Diagrama sagital.
c. El dominio y el rango.

11 En la relación del ejercicio 9 determina:

a. Si R es reflexiva .
b. Si R es simétrica.
c. Si R es Transitiva.
d. Si R es de equivalencia.

12 Si R={ (2,2) ; (2,3); (3,4) ; (3,3); (4,4) ; (3,2); (4,3) ; (2,4);(4, 2)}:
Determina:

a. R en diagrama sagital .
b. El Dominio y Rango.
c. Si R es reflexiva.
d. Si R es simétrica.
e. Si R es Transitiva.
f. Si R es de equivalencia.

13 Si R={ (2,2) ; (2,3); (3,4) ; (3,3); (4,4) ; (3,2); (4,3) ; (2,4);(4, 2)}:
Determina:

Figura 5

a. R en pares ordenados .
b. El dominio y Rango.
c. Si R es reflexiva.
d. Si R es simétrica.
e. Si R es Transitiva.
f. Si R es de equivalencia.

14 10. Dado el conjunto A={1,2,3,4};
R={(x,y) ∈ AxA/ x es divisor de y} Encuentra :

a.R Pares ordenados .
b. R diagrama sagital.
c. El dominio y el rango.

15 En la relación del ejercicio 13, determina:

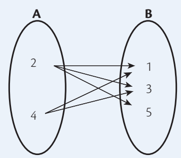
a. Si R es reflexiva .
b. Si R es simétrica.
c. Si R es Transitiva.
d. .Si R es de equivalencia.

APPLICA © EDICIONES SM

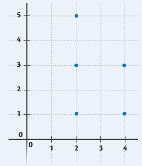
157

8. a. R= { (2, 1) (2, 3) (2, 5) (4, 1) (4, 3)}

b.



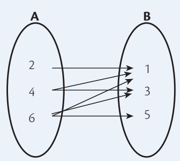
c.



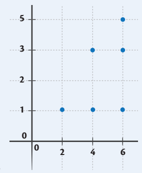
d. D= { 2, 4 } R= {1, 3, 5}

9. a. R= { (2, 1) (4, 1) (4, 3) (6, 1) (6, 3) (6, 5)}

b.



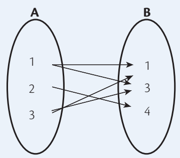
c.



d. D= { 2, 4, 6 } R= {1, 3, 5}

10. a. R= { (1, 1) (1, 3) (2, 4) (3, 1) (3, 3)}

b.



c. D= { 1, 2, 3 } R= {1, 3, 4}

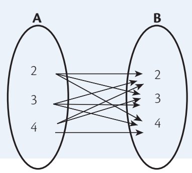
11. a. no es reflexiva

b. no es simétrica

c. no es transitiva

d. R no es de equivalencia

12. a.



b. D= { 2, 3, 4 } R= {2, 3, 4}

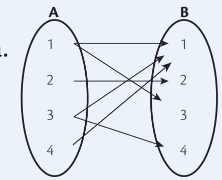
c. si es reflexiva

d. si es simétrica

e. si es transitiva

f. R si es de equivalencia

13. a.



b. D= { 1, 2, 3, 4 } R= {1, 2, 3, 4}

c. si es reflexiva

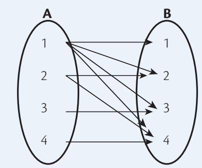
d. si es simétrica

e. si es transitiva

f. R si es de equivalencia

14. a. R= { (1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 2) (2, 4) (3, 3) (4, 4)}

b.



c. D= { 1, 2, 3, 4 } R= {1, 2, 3, 4}

15. a. si es reflexiva

b. si es simétrica

c. si es transitiva

d. R si es de equivalencia

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Recuerde a los y las estudiantes el concepto de función y pídales determinar, entre varias gráficas cartesianas, cuáles corresponden a funciones. Luego determine la notación de funciones y establezca el dominio y rango de las mismas.

b. Después de la actividad anterior, indique que las funciones se pueden representar mediante un enunciado o expresión verbal de la dependencia entre las dos variables, una tabla, una expresión algebraica o fórmula y una gráfica.

c. Asegúrese de que los y las estudiantes comprendan que para representar una función gráficamente debe trazar los ejes X e Y del plano cartesiano, ubicar las parejas ordenadas de la forma (x, y) obtenidas al dar valores a la variable x y calcular su respectiva imagen y.

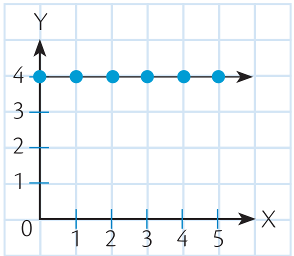
d. Escriba una tabla de valores y solicite a sus estudiantes que representen las parejas de puntos. Pídales que escriban la ecuación.

Ampliación conceptual

Función y = k

La función expresada por: $y = f(x) = mx + b$ en donde la pendiente $m = 0$, toma la forma $y = k$, siendo $b = k$ un número real constante, se denomina función constante. La gráfica de f es una recta horizontal paralela al eje x, y corta al eje Y en $k = 4$

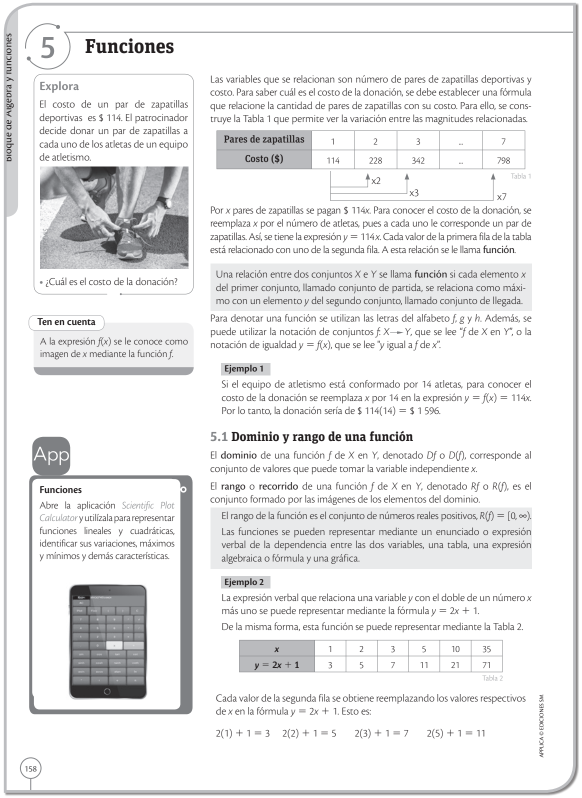
x	y
1	4
2	4
3	4
4	4



Actividades TIC

El link contiene un vi En la sección MatemaTICS, representaremos funciones con GeoGebra, selecciona Vista Algebraica y escribe la fórmula que representa la función. $F(x)= (2x+1)^{1/2}$. Luego, oprime la tecla Enter.

Se representará gráficamente la función consigno positivo del radical.
deo sobre los conjuntos.
https://www.youtube.com/watch?v=arFHd_ZiOFc


Bloque de Álgebra y funciones

5 Funciones

Explora

El costo de un par de zapatillas deportivas es $ 114. El patrocinador decide donar un par de zapatillas a cada uno de los atletas de un equipo de atletismo.

• ¿Cuál es el costo de la donación?

Ten en cuenta

A la expresión $f(x)$ se le conoce como imagen de x mediante la función f.

App

Funciones

Abre la aplicación *Scientific Plot Calculator* y utilízala para representar funciones lineales y cuadráticas, identificar sus variaciones, máximos y mínimos y demás características.

Las variables que se relacionan son número de pares de zapatillas deportivas y costo. Para saber cuál es el costo de la donación, se debe establecer una fórmula que relacione la cantidad de pares de zapatillas con su costo. Para ello, se construye la Tabla 1 que permite ver la variación entre las magnitudes relacionadas.

Pares de zapatillas	1	2	3	...	7
Costo ($)	114	228	342	...	798

x2 x3 x7

Tabla 1

Por x pares de zapatillas se pagan $ $114x$. Para conocer el costo de la donación, se reemplaza x por el número de atletas, pues a cada uno le corresponde un par de zapatillas. Así, se tiene la expresión $y = 114x$. Cada valor de la primera fila de la tabla está relacionado con uno de la segunda fila. A esta relación se le llama **función**.

Una relación entre dos conjuntos X e Y se llama **función** si cada elemento x del primer conjunto, llamado conjunto de partida, se relaciona como máximo con un elemento y del segundo conjunto, llamado conjunto de llegada.

Para denotar una función se utilizan las letras del alfabeto f, g y h. Además, se puede utilizar la notación de conjuntos $f: X \rightarrow Y$, que se lee "f de X en Y", o la notación de igualdad $y = f(x)$, que se lee "y igual a f de x".

Ejemplo 1

Si el equipo de atletismo está conformado por 14 atletas, para conocer el costo de la donación se reemplaza x por 14 en la expresión $y = f(x) = 114x$. Por lo tanto, la donación sería de $ 114(14) = $ 1 596.

5.1 Dominio y rango de una función

El **dominio** de una función f de X en Y, denotado Df o $D(f)$, corresponde al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente x.

El **rango** o **recorrido** de una función f de X en Y, denotado Rf o $R(f)$, es el conjunto formado por las imágenes de los elementos del dominio.

El rango de la función es el conjunto de números reales positivos, $R(f) = [0, \infty)$.

Las funciones se pueden representar mediante un enunciado o expresión verbal de la dependencia entre las dos variables, una tabla, una expresión algebraica o fórmula y una gráfica.

Ejemplo 2

La expresión verbal que relaciona una variable y con el doble de un número x más uno se puede representar mediante la fórmula $y = 2x + 1$.

De la misma forma, esta función se puede representar mediante la Tabla 2.

x	1	2	3	5	10	35
$y = 2x + 1$	3	5	7	11	21	71

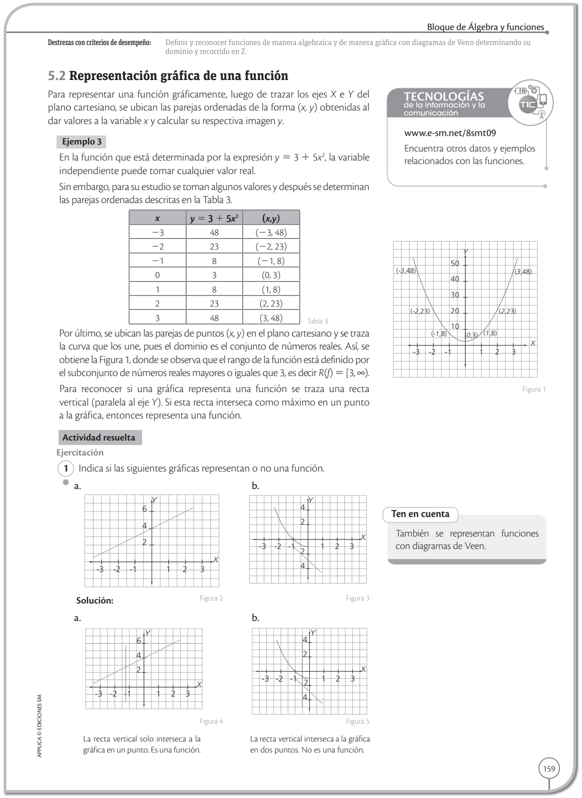
Tabla 2

Cada valor de la segunda fila se obtiene reemplazando los valores respectivos de x en la fórmula $y = 2x + 1$. Esto es:

$2(1) + 1 = 3 \quad 2(2) + 1 = 5 \quad 2(3) + 1 = 7 \quad 2(5) + 1 = 11$

APPLICA © EDICIONES SM

158


Bloque de Álgebra y funciones

Destrezas con criterios de desempeño: Definir y reconocer funciones de manera algebraica y de manera gráfica con diagramas de Venn determinando su dominio y recorrido en Z.

5.2 Representación gráfica de una función

Para representar una función gráficamente, luego de trazar los ejes X e Y del plano cartesiano, se ubican las parejas ordenadas de la forma (x, y) obtenidas al dar valores a la variable x y calcular su respectiva imagen y.

Ejemplo 3

En la función que está determinada por la expresión $y = 3 + 5x^2$, la variable independiente puede tomar cualquier valor real.

Sin embargo, para su estudio se toman algunos valores y después se determinan las parejas ordenadas descritas en la Tabla 3.

x	$y = 3 + 5x^2$	(x,y)
−3	48	(−3, 48)
−2	23	(−2, 23)
−1	8	(−1, 8)
0	3	(0, 3)
1	8	(1, 8)
2	23	(2, 23)
3	48	(3, 48)

Tabla 3

Por último, se ubican las parejas de puntos (x, y) en el plano cartesiano y se traza la curva que los une, pues el dominio es el conjunto de números reales. Así, se obtiene la Figura 1, donde se observa que el rango de la función está definido por el subconjunto de números reales mayores o iguales que 3, es decir $R(f) = [3, \infty)$.

Para reconocer si una gráfica representa una función se traza una recta vertical (paralela al eje Y). Si esta recta interseca como máximo en un punto a la gráfica, entonces representa una función.

Figura 1

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt09

Encuentra otros datos y ejemplos relacionados con las funciones.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Indica si las siguientes gráficas representan o no una función.

a. Figura 2

b. Figura 3

Solución:

a. Figura 4

La recta vertical solo interseca a la gráfica en un punto. Es una función.

b. Figura 5

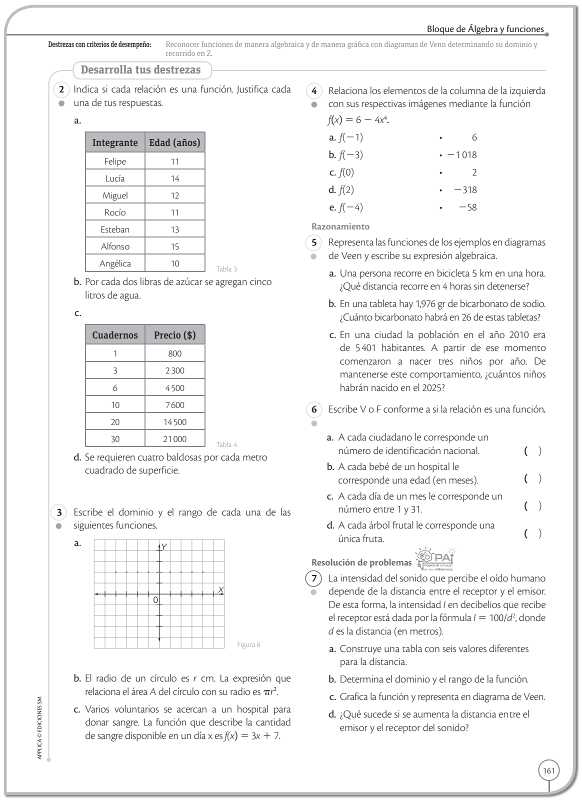
La recta vertical interseca a la gráfica en dos puntos. No es una función.

Ten en cuenta

También se representan funciones con diagramas de Veen.

APPLICA © EDICIONES SM

159



Destrezas con criterios de desempeño: Reconocer funciones de manera algebraica y de manera gráfica con diagramas de Venn determinando su dominio y recorrido en Z.

Desarrolla tus destrezas

2 Indica si cada relación es una función. Justifica cada una de tus respuestas.

a.

Integrante	Edad (años)
Felipe	11
Lucía	14
Miguel	12
Rocío	11
Esteban	13
Alfonso	15
Angélica	10

Tabla 3

b. Por cada dos libras de azúcar se agregan cinco litros de agua.

c.

Cuadernos	Precio ($)
1	800
3	2 300
6	4 500
10	7 600
20	14 500
30	21 000

Tabla 4

d. Se requieren cuatro baldosas por cada metro cuadrado de superficie.

3 Escribe el dominio y el rango de cada una de las siguientes funciones.

a.

Figura 6

b. El radio de un círculo es r cm. La expresión que relaciona el área A del círculo con su radio es πr^2.

c. Varios voluntarios se acercan a un hospital para donar sangre. La función que describe la cantidad de sangre disponible en un día x es $f(x) = 3x + 7$.

4 Relaciona los elementos de la columna de la izquierda con sus respectivas imágenes mediante la función $f(x) = 6 - 4x^4$.

a. $f(-1)$ • 6
b. $f(-3)$ • $-1\,018$
c. $f(0)$ • 2
d. $f(2)$ • -318
e. $f(-4)$ • -58

Razonamiento

5 Representa las funciones de los ejemplos en diagramas de Veen y escribe su expresión algebraica.

a. Una persona recorre en bicicleta 5 km en una hora. ¿Qué distancia recorre en 4 horas sin detenerse?

b. En una tableta hay 1,976 gr de bicarbonato de sodio. ¿Cuánto bicarbonato habrá en 26 de estas tabletas?

c. En una ciudad la población en el año 2010 era de 5 401 habitantes. A partir de ese momento comenzaron a nacer tres niños por año. De mantenerse este comportamiento, ¿cuántos niños habrán nacido en el 2025?

6 Escribe V o F conforme a si la relación es una función.

a. A cada ciudadano le corresponde un número de identificación nacional. ( )

b. A cada bebé de un hospital le corresponde una edad (en meses). ( )

c. A cada día de un mes le corresponde un número entre 1 y 31. ( )

d. A cada árbol frutal le corresponde una única fruta. ( )

Resolución de problemas PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

7 La intensidad del sonido que percibe el oído humano depende de la distancia entre el receptor y el emisor. De esta forma, la intensidad I en decibelios que recibe el receptor está dada por la fórmula $I = 100/d^2$, donde d es la distancia (en metros).

a. Construye una tabla con seis valores diferentes para la distancia.

b. Determina el dominio y el rango de la función.

c. Grafica la función y representa en diagrama de Veen.

d. ¿Qué sucede si se aumenta la distancia entre el emisor y el receptor del sonido?

Ejercitación

2. **a.** No **b.** Sí **c.** Sí **d.** Sí

3. **a.** $D(f) = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$; $R(f) = \{2\}$

b. $D(f) = R$; $R(f) = [0, \infty)$ **c.** $D(f) = R$; $R(f) = R$

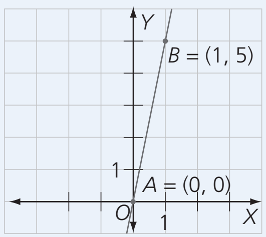
4. **a.** $f(-1) = 2$ **b.** $f(-3) = -318$ **c.** $f(0) = 6$

d. $f(2) = -58$ **e.** $f(-4) = -1\,018$

Razonamiento

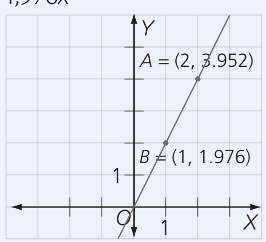
5. **a.** En 4 horas sin detenerse recorre 20km

$f(x) = 5x$



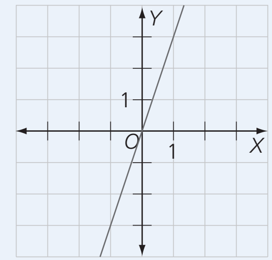
b. En 26 tabletas hay 51,376 g de bicarbonato de sodio

$f(x) = 1{,}976x$



c. En el 2025 habrán nacido 45 niños

$f(x) = 3x$



6. **a.** V **b.** F **c.** V **d.** V

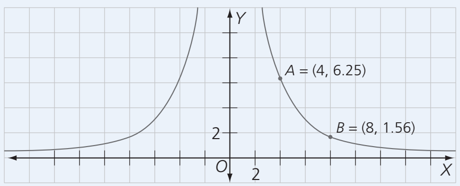
Resolución de problemas

7. **a.** Múltiples soluciones, por ejemplo:

d	1 m	8 m	50 m	30 m	100 m	1000 m
$I = \frac{100}{d^2}$	100	1,5625	0,04	0,11111	0,01	0,0001

b. $D(f) = R - \{0\}$; $R(f) = (0, \infty)$

c.



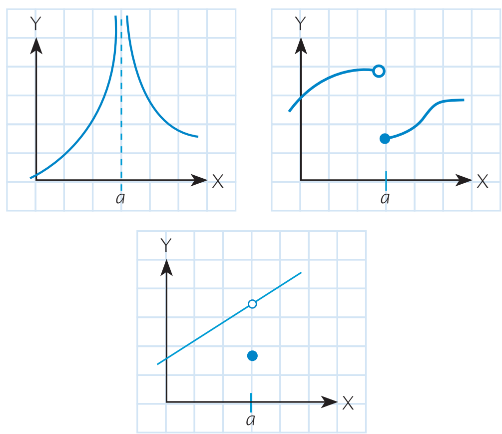
d. Si se aumenta la distancia entre el emisor y el receptor del sonido, la intensidad en decibelios que recibe el receptor disminuye.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. En el análisis sobre funciones y gráficas se usa la frase "estos puntos se unen con una curva suave". Esta frase invoca la imagen que es una curva continua agradable; en otras palabras, una curva sin rupturas, saltos o huecos. En efecto, una función continua a menudo se describe como una función cuya gráfica puede trazarse sin levantar el lápiz del papel.

b. Antes de proporcionar la definición, que en el texto consta de función continua, se ilustran algunos ejemplos intuitivos de funciones que no son continuas en a.



Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. En los problemas, determine si la función f es continua en el intervalo indicado.
   a. f (x) =x2 +1 , en el intervalo [-1, 4]
   b. f (x) = 1/x, en el intervalo (0,∞)

Bloque de Álgebra y funciones

6 Continuidad y variación de funciones

Explora

Un ciclista sube una montaña por carretera. En su camino se encuentra con que un puente se ha caído debido a condiciones climáticas adversas.

- ¿Es posible para el ciclista realizar la hazaña sin desviarse del camino que había trazado?

Ten en cuenta

La tasa de variación *TV* de una función *f*(*x*) en un intervalo [*a*, *b*] indica el cambio (aumento o disminución) que experimenta la función cuando la variable independiente pasa del valor *a* al valor *b*.

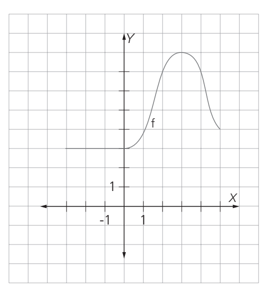


Figura 2

La única forma de continuar el recorrido de ascenso a la montaña sería dando un gran salto a través del puente que se derrumbó, y en la realidad este hecho es imposible.

Estas situaciones se pueden modelar por medio de gráficas de funciones discontinuas.

6.1 Continuidad de una función

La idea intuitiva de que una **función es continua** es que la gráfica de esta puede ser construida de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel.

La gráfica de una función continua en un intervalo no presenta saltos ni rupturas. Los puntos donde la función no es continua se llaman **puntos de discontinuidad.**

Ejemplo 1

Un café que se inauguró hace dos semanas pretende prestar sus servicios durante 24 horas toda la semana. Pero una falla en el servidor principal los obliga a hacer interrupciones para realizar el mantenimiento del equipo. Entonces, durante cada día de la tercera semana se suspende el servicio por cuatro horas; en la cuarta semana, se suspende por tres horas; y, a partir de la quinta semana se reanuda el servicio a tiempo completo. La información anterior se representa en la Figura 1.

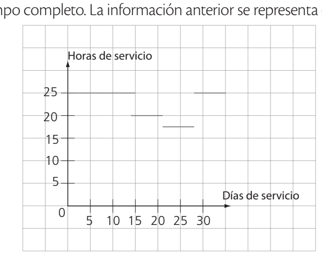


Figura 1

La gráfica presenta "saltos". Por lo tanto, la función es discontinua.

6.2 Variación de una función en un intervalo

La variación de una función en un intervalo está determinada por su tasa de variación, denotada *TV* y calculada mediante la fórmula $TV[a, b] = f(b) - f(a)$.

- Si la variable *y* aumenta a medida que aumenta *x*, la tasa de variación es positiva.
- Si la variable *y* disminuye a medida que aumenta *x*, la tasa de variación es negativa.
- Si la variable *y* permanece igual a medida que aumenta *x*, la tasa de variación es nula.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Determina la tasa de variación de la función en los intervalos de la Figura 2.

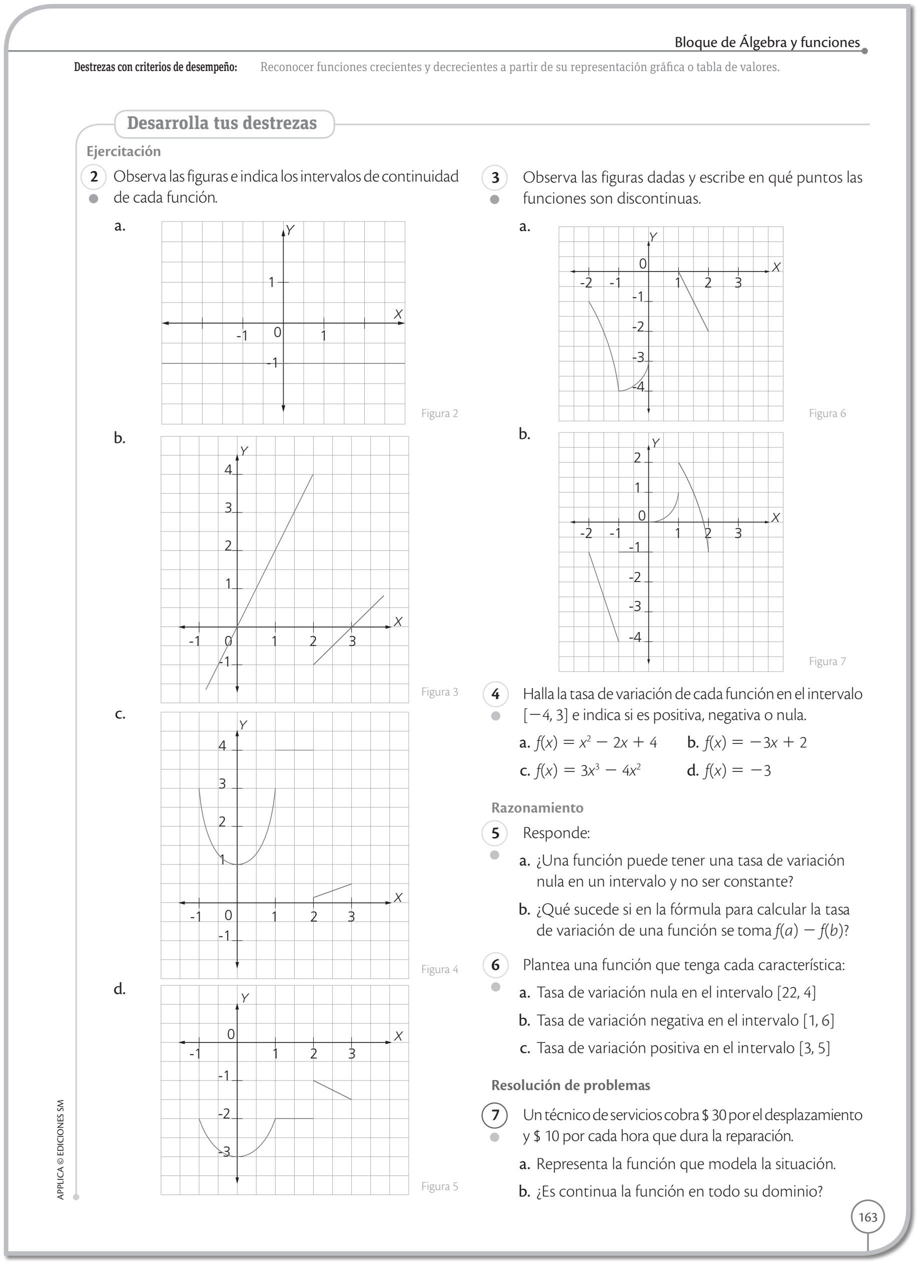
a. [23, 0] b. [0, 2] c. [2, 5]

Solución:

a. $TV[-3, 0] = f(0) - f(-3) = 3 - 3 = 0$ Tasa de variación nula

b. $TV[0, 2] = f(2) - f(0) = 7 - 3 = 4$ Tasa de variación positiva

c. $TV[2, 5] = f(5) - f(2) = 4 - 7 = -3$ Tasa de variación negativa


Bloque de Álgebra y funciones

Destrezas con criterios de desempeño: Reconocer funciones crecientes y decrecientes a partir de su representación gráfica o tabla de valores.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Observa las figuras e indica los intervalos de continuidad de cada función.

a. Figura 2

b. Figura 3

c. Figura 4

d. Figura 5

3 Observa las figuras dadas y escribe en qué puntos las funciones son discontinuas.

a. Figura 6

b. Figura 7

4 Halla la tasa de variación de cada función en el intervalo $[-4, 3]$ e indica si es positiva, negativa o nula.

a. $f(x) = x^2 - 2x + 4$ b. $f(x) = -3x + 2$

c. $f(x) = 3x^3 - 4x^2$ d. $f(x) = -3$

Razonamiento

5 Responde:

a. ¿Una función puede tener una tasa de variación nula en un intervalo y no ser constante?

b. ¿Qué sucede si en la fórmula para calcular la tasa de variación de una función se toma $f(a) - f(b)$?

6 Plantea una función que tenga cada característica:

a. Tasa de variación nula en el intervalo [22, 4]

b. Tasa de variación negativa en el intervalo [1, 6]

c. Tasa de variación positiva en el intervalo [3, 5]

Resolución de problemas

7 Un técnico de servicios cobra \$ 30 por el desplazamiento y \$ 10 por cada hora que dura la reparación.

a. Representa la función que modela la situación.

b. ¿Es continua la función en todo su dominio?

163

Ejercitación

2. a. (∞, ∞)

b. $(-1, 2)$

c. $(-1, 1), (1, 2), (2, 3)$

d. $(-1, 1), (1, 2), (2, 3)$

3. a. $(0 - 19);\ (2, 3)$ b. $(-1, 0);\ (2, 3)$

4. a. −531, tasa de variación negativa.

b. 14, tasa de variación positiva.

c. −43 821, tasa de variación negativa.

d. 0, tasa de variación nula.

Razonamiento

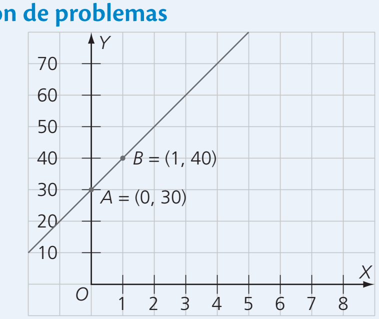
5. a. Sí

b. No es la fórmula para calcular la tasa de variación.

6. Respuesta libre

Resolución de problemas

7. a.



b. Sí

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Realice en esta oportunidad bosquejos de funciones de variación de temperatura, algunas crecientes y otras decrecientes. Pida a los estudiantes que las analicen y saquen conclusiones acerca del valor de la variación de la temperatura.

b. Después de escuchar las inferencias de los y las estudiantes en el ejercicio anterior, concluya explicando que el valor de la variación es un patrón que sigue la función. Si la variación es positiva, el patrón que sigue la función es de crecimiento, mientras que si la variación es negativa el patrón es de decrecimiento.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

Construye la gráfica con patrón de diferencia o decreciente. Completa la tabla de valores, gráfica y obtén la expresión algebraica, en cada caso.

a.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	−2	−4				

b.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	−3	−6				

7 Crecimiento y decrecimiento de funciones

Explora

Debido a los efectos climáticos que experimenta la Tierra desde hace algunas décadas, la temperatura de un glaciar ha pasado de −26 °C en el año 1955 a −10 °C en el año 2015.

• ¿Cómo está aumentando o disminuyendo la temperatura del glaciar?

La temperatura del glaciar pasó de −26 °C a −10 °C. Para determinar qué cambio tuvo se calcula la tasa de variación en el intervalo de tiempo [1955, 2015] así:

$$TV[1955, 2015] = -10 - (-26) = -10 + 26 = 16$$

Como la tasa de variación es positiva, entonces la temperatura aumentó en 16 °C.

Una función es **creciente** en un intervalo si para todo par de valores en ese intervalo la **tasa de variación es positiva** (Figura 1).

Una función es decreciente en un intervalo si para todo par de valores en ese intervalo la **tasa de variación en negativa** (Figura 2).

Una función es constante en un intervalo si para todo par de valores en ese intervalo, la **tasa de variación es nula** (Figura 3).

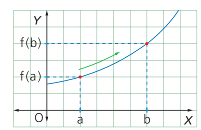


Figura 1

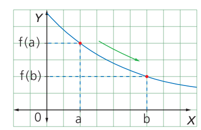


Figura 2

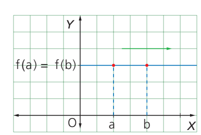


Figura 3

7.1 Máximos y mínimos

En una función continua se puede determinar un punto máximo o uno mínimo relativo según estas condiciones:

- **Máximo relativo**, si a su izquierda la función crece y a su derecha decrece.
- **Mínimo relativo**, si a su izquierda la función decrece y a su derecha crece.

Además, el mayor de todos los valores que tiene la función se llama **máximo absoluto** y el menor se llama **mínimo absoluto**.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 El número de personas conectadas a una página de internet desde las 8 a. m. hasta las 8 p. m. se muestra en la Figura 4 Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los puntos máximos y los puntos mínimos.

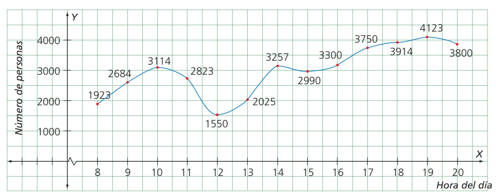


Figura 4

Solución:

La función es creciente en [8, 10], [12, 14] y [15, 19], pues la tasa de variación en estos intervalos es positiva. La función es decreciente en [10, 12], [14, 15] y [19, 20], ya que la tasa de variación es negativa en estos intervalos.

Antes de las 10 la función crece y luego decrece. La función presenta un máximo relativo en el punto $x = 10$. Al contrario, antes de las 12 la función decrece y luego crece. La función tiene un mínimo relativo en el punto $x = 12$.

A las 19 la conectividad es la más alta y por ende en este valor la función alcanza el máximo absoluto. De la misma forma, a las 12 está conectado el menor número de personas, y en este valor la función alcanza un mínimo absoluto.

Destreza con criterios de desempeño: Reconocer funciones crecientes y decrecientes a partir de su representación gráfica o tabla de valores.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Analiza el crecimiento o decrecimiento de la función dada en los intervalos.

a. $[-3, -1]$ b. $[0, 1]$

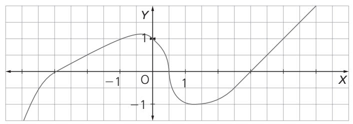


Figura 5

3 Determina los máximos y mínimos de la función.

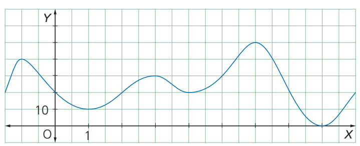


Figura 6

4 Indica los intervalos donde la función de la Figura 7 es creciente, constante y decreciente.

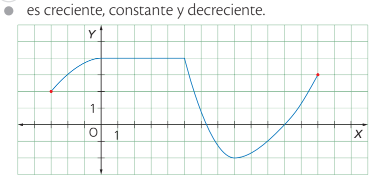


Figura 7

5 Observa la función de la Figura 8 y responde. ¿Cuáles son los máximos y mínimos de la función en el intervalo $[-2, 2]$? ¿Son absolutos o relativos?

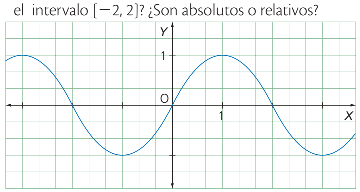


Figura 8

Razonamiento

6 Traza la gráfica de una función continua que cumpla con las siguientes condiciones:

- Que tenga un máximo en el punto (2, 1) y un mínimo en el punto (5, 6).

Modelación

7 Dibuja la gráfica de la función cuyas características son:

Dominio: [23, 3] Recorrido: [24, 5]

Mínimos en [22, 24] y [2, 24] Máximo en [0, 5]

8 Indica dónde alcanzará los máximos y los mínimos una función cuyo estudio del crecimiento es el siguiente:

Crece en los intervalos $[-\infty, -5]$ y $[-2, 4]$.

Decrece en los intervalos $[-5, -2]$ y $[4, \infty]$.

Resolución de problemas

9 Un bus universitario hace dos paradas en cada viaje, además de la inicial, para recoger estudiantes. En la Figura 9 se muestra su recorrido diario.

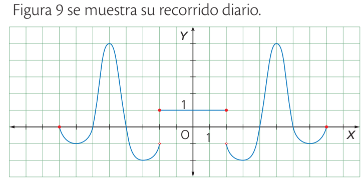


Figura 9

Determina:

a. El dominio y el recorrido.

b. Los intervalos de continuidad y discontinuidad.

c. La tasa de variación en los siguientes intervalos: $[-5, -3]$, $[-2, 0]$ y $[4, 5]$.

d. El crecimiento y el decrecimiento.

e. Los máximos y mínimos absolutos y relativos.

10 La Figura 10 representa la ruta de un bus universitario.

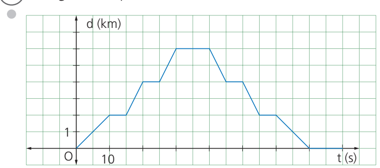


Figura 10

Responde:

a. ¿A cuántos kilómetros está la universidad?

b. ¿Cuánto tiempo tarda el trayecto a la universidad?

c. ¿Cuánto tiempo está parado el bus en su recorrido?

d. ¿Qué significa el decrecimiento de la gráfica?

2. a. Creciente

b. Decreciente

3. $-1, 1, 3, 6, 8$

4. $[-3, 0)$ Creciente $(0, 5)$ Constante

$(5, 8)$ Decreciente $(8, 13)$ Creciente

5. -2 mínimo absoluto y 2 máximo absoluto.

Razonamiento

6. Respuesta libre.

Modelación

7. Respuesta libre.

8. Respuesta libre.

Resolución de problemas

9. a. $D(f) = [-8, 8]$; $R(f) = [-2, 5]$

b. Continua en $(-8, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, 8)$

Discontinuidad $-8, -2, 2, 8$

c. -7 tasa de variación negativa; 0 tasa de variación constante; y, 5 tasa de variación positiva.

d. Crecimiento: $(-7, -5)$; $(-3, -2)$; $(3, 5)$; $(7, 8)$

Decrecimiento: $(-8, -7)$; $(-5, -3)$; $(2, 3)$; $(5, 7)$

e. Máximos absolutos: -5 y 5

Mínimos relativos: -1 y 1

Mínimos absolutos: -2 y 2

10. Respuesta libre

UNIDAD 4

Evaluación formativa

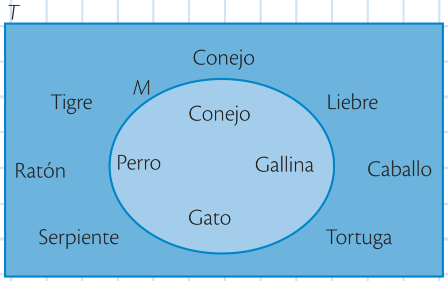
Nombre:...
Grado:................ . **Fecha:**................ .

1. Completa las expresiones, si sabes que A={1,2,3,4,5,6} y B={2,4,6,8,10}

A. A ∪ B = B. A ∩ B =

C. A – B = D. A ∆ B =

2. Observa el diagrama de Veen y escribe verdadero o falso según corresponda.



A. T es subconjunto de M
B. M es subconjunto de T
C. El elemento caballo pertenece a M
D. El elemento conejo pertenece a T

3. En un curso de 40 estudiantes, quince deben presentar la evaluación de matemáticas. quince deben presentar la evaluación de sociales y diez deben presentar las dos evaluaciones. Los demás no presentan ninguna evaluación. ¿Cuántos estudiantes no deben presentar ninguna evaluación?

A. 10 estudiantes B. 15 estudiantes

C. 20 estudiantes D. 25 estudiantes

4. Si A= {2,4,6} y B={1,3,5}, la relación: R={(x,y) / AxB/ x>y} encuentra: R Pares ordenados, diagrama sagital, el dominio y el rango.

5. Siendo los conjuntos A={a,b,c} y B={2,4,6}. son elementos del producto cartesiano B x A.

A. (a, 2), (b, 6) B. (c, b), (b, c)

C. (2, a), (c, 6) D. (4, c), (6, a)

6. Si A es el conjunto de partida y B es el conjunto de llegada. Hallar los pares ordenados de la función f.

A={–3, –2; –1; 0}, B={–1; 0; 1; 2}, f={(x; y) ∈ A x B / y = x +1}

7. ¿Cuáles de las siguientes relaciones representan una función?

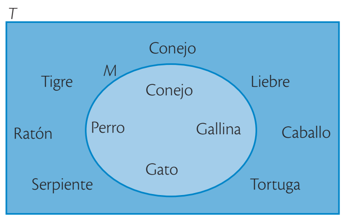
A. R1= {(1; 2),(1; 4),(3; 2),(5; 4)}
B. R2= {1; 2),(3; 2),(5; 2)}
C. R3= {(0; 2),(1; 2),(3; 4)}
D. R4= {(5; 2),(5; 4),(3; 2),(1; 4),(5; 7)}

1. Completa las expresiones, si sabes que A={1,2,3,4,5,6} y B={2,4,6,8,10}

A. A ∪ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10} B. A ∩ B = {2, 4, 6}

C. A – B = {1, 3, 5} D. A Δ B = {1, 3, 5, 8, 10}

2. Observa el diagrama de Veen y escribe verdadero o falso según corresponda.



A. T es subconjunto de M F

B. M es subconjunto de T V

C. El elemento caballo pertenece a M F

D. El elemento conejo pertenece a T V

3. En un curso de 40 estudiantes, quince deben presentar la evaluación de matemáticas. quince deben presentar la evaluación de sociales y diez deben presentar las dos evaluaciones. Los demás no presentan ninguna evaluación. ¿Cuántos estudiantes no deben presentar ninguna evaluación?

A. 10 estudiantes B. 15 estudiantes

C. 20 estudiantes D. 25 estudiantes

4. Si A= {2,4,6} y B={1,3,5}, la relación: R={(x,y) / AxB/ x>y} encuentra: R Pares ordenados, diagrama sagital, el dominio y el rango.

R={(2,1);(4,1);(4,3);(6,1);(6,3);(6,5)}

D={2,4,6}

R={1,3,5}

5. Siendo los conjuntos A={a,b,c} y B={2,4,6}. son elementos del producto cartesiano B x A

A. (a, 2), (b, 6) B. (c, b), (b, c)

C. (2, a), (c, 6) D. (4, c), (6, a)

6. Si A es el conjunto de partida y B es el conjunto de llegada. Hallar los pares ordenados de la función f.

A={–3, –2; –1; 0}, B={–1; 0; 1; 2}, f={(x; y) ∈ A x B / y = x +1}

(2; -1); (-1; 0); (0; 1)

7. ¿Cuáles de las siguientes relaciones representan una función?

A. R1= {(1; 2),(1; 4),(3; 2),(5; 4)}

B. R2= {1; 2),(3; 2),(5; 2)}

C. R3= {(0; 2),(1; 2),(3; 4)}

D. R4= {(5; 2),(5; 4),(3; 2),(1; 4),(5; 7)}

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.°	N.° de aciertos	N.° de desaciertos	Refuerzo sí / no
Representa en forma gráfica y algebraica las operaciones de unión, intersección, diferencia y complemento entre conjuntos.	1, 2 y 3			
Representa como pares ordenados el producto cartesiano de dos conjuntos e identifica las relaciones reflexivas, simétricas, transitivas y de equivalencia de un subconjunto de dicho producto.	4 y 5			
Resuelve problemas mediante la elaboración modelos matemáticos sencillos como funciones, emplea gráficas para representar funciones y analizar e interpretar la solución en el contexto del problema.	6 y 7			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Dadas dos variables X y Y, Y es (directamente) proporcional a X (X y Y varían directamente, o X y Y están en variación directa) si hay una constante k distinta de cero tal que: y = k x y la razón constante y/x es llamada constante de proporcionalidad.

Para ilustrar, supongamos que si dividimos el peso de una muestra de hierro por su volumen, el resultado será el mismo que el obtenido al dividir el peso de cualquier otra muestra por su volumen, dicho cociente corresponde a la constante de proporcionalidad.

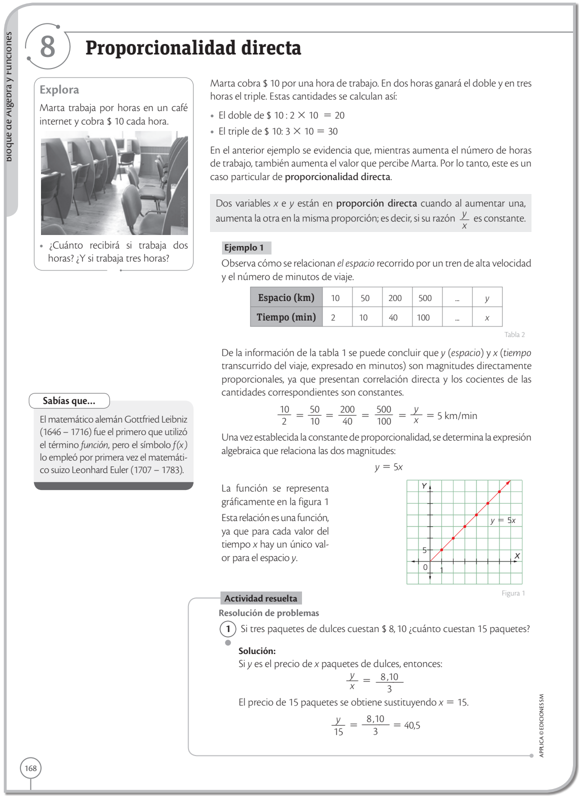
La receta de un pastel de vainilla indica que para cuatro personas se necesitan 200 g de harina, 150g de mantequilla, cuatro huevos y 120g de azúcar. ¿Cómo adaptar la receta para cinco personas? Según varios estudios, la mayoría de la gente calcularía las cantidades para una persona (dividiendo entre cuatro) y luego las multiplicaría por el número real de personas, cinco, otras solo le sumarían lo que a una persona le corresponde. Una minoría no siente la necesidad de pasar por las cantidades unitarias (es decir por persona) y multiplicaría los números de la receta por 5/4 = 1,25 (lo que equivale a añadir cinco huevos, 250g de harina; 187,5g de mantequilla y 150g de azúcar).

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Recuérdeles a los y las estudiantes el concepto de función y pídales determinar, entre varias gráficas cartesianas, cuáles corresponden a funciones. Luego clasifique las que son funciones lineales.

b. Después de la actividad anterior, defina función lineal e indíqueles el significado de variación de función como la de pendiente, además que las funciones lineales permiten estudiar las relaciones de proporcionalidad entre dos magnitudes.

c. Escriba la expresión general de la función lineal: y = mx. Asegúrese de que los y las estudiantes comprendan que para representar una función lineal, basta con ubicar dos de sus puntos.



Bloque de Álgebra y funciones

8 Proporcionalidad directa

Explora

Marta trabaja por horas en un café internet y cobra $ 10 cada hora.

- ¿Cuánto recibirá si trabaja dos horas? ¿Y si trabaja tres horas?

Marta cobra $ 10 por una hora de trabajo. En dos horas ganará el doble y en tres horas el triple. Estas cantidades se calculan así:

- El doble de $ 10 : 2 × 10 = 20
- El triple de $ 10: 3 × 10 = 30

En el anterior ejemplo se evidencia que, mientras aumenta el número de horas de trabajo, también aumenta el valor que percibe Marta. Por lo tanto, este es un caso particular de **proporcionalidad directa**.

Dos variables x e y están en **proporción directa** cuando al aumentar una, aumenta la otra en la misma proporción; es decir, si su razón $\frac{y}{x}$ es constante.

Ejemplo 1

Observa cómo se relacionan *el espacio* recorrido por un tren de alta velocidad y el número de minutos de viaje.

Espacio (km)	10	50	200	500	...	y
Tiempo (min)	2	10	40	100	...	x

Tabla 2

De la información de la tabla 1 se puede concluir que y (*espacio*) y x (*tiempo* transcurrido del viaje, expresado en minutos) son magnitudes directamente proporcionales, ya que presentan correlación directa y los cocientes de las cantidades correspondientes son constantes.

$$\frac{10}{2} = \frac{50}{10} = \frac{200}{40} = \frac{500}{100} = \frac{y}{x} = 5 \text{ km/min}$$

Una vez establecida la constante de proporcionalidad, se determina la expresión algebraica que relaciona las dos magnitudes:

$$y = 5x$$

La función se representa gráficamente en la figura 1 Esta relación es una función, ya que para cada valor del tiempo x hay un único valor para el espacio y.

Figura 1

Sabías que...

El matemático alemán Gottfried Leibniz (1646 – 1716) fue el primero que utilizó el término *función*, pero el símbolo $f(x)$ lo empleó por primera vez el matemático suizo Leonhard Euler (1707 – 1783).

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. Si tres paquetes de dulces cuestan $ 8, 10 ¿cuánto cuestan 15 paquetes?

Solución:

Si y es el precio de x paquetes de dulces, entonces:

$$\frac{y}{x} = \frac{8{,}10}{3}$$

El precio de 15 paquetes se obtiene sustituyendo $x = 15$.

$$\frac{y}{15} = \frac{8{,}10}{3} = 40{,}5$$

APPLICA © EDICIONES SM

168

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

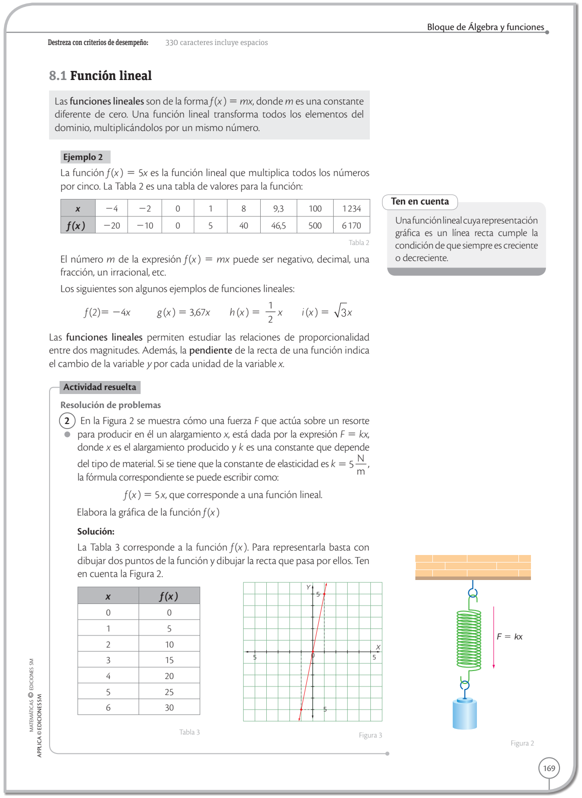
Encuentra la constante de proporcionalidad y escribe la función que relaciona las dos variables.

a.

x	10	15	20	25	30	35
$f(x)$	1	1,5	2	2,5	3	3,5

b.

Distancia (*km*)	3	6	9	12	15	18
Tiempo(*s*)	2,5	5	7,5	10	12,5	15



Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: 330 caracteres incluye espacios

8.1 Función lineal

Las **funciones lineales** son de la forma $f(x) = mx$, donde m es una constante diferente de cero. Una función lineal transforma todos los elementos del dominio, multiplicándolos por un mismo número.

Ejemplo 2

La función $f(x) = 5x$ es la función lineal que multiplica todos los números por cinco. La Tabla 2 es una tabla de valores para la función:

x	−4	−2	0	1	8	9,3	100	1 234
$f(x)$	−20	−10	0	5	40	46,5	500	6 170

Tabla 2

El número m de la expresión $f(x) = mx$ puede ser negativo, decimal, una fracción, un irracional, etc.

Los siguientes son algunos ejemplos de funciones lineales:

$$f(2) = -4x \qquad g(x) = 3{,}67x \qquad h(x) = \frac{1}{2}x \qquad i(x) = \sqrt{3}x$$

Las **funciones lineales** permiten estudiar las relaciones de proporcionalidad entre dos magnitudes. Además, la **pendiente** de la recta de una función indica el cambio de la variable y por cada unidad de la variable x.

Ten en cuenta

Una función lineal cuya representación gráfica es un línea recta cumple la condición de que siempre es creciente o decreciente.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

2. En la Figura 2 se muestra cómo una fuerza F que actúa sobre un resorte para producir en él un alargamiento x, está dada por la expresión $F = kx$, donde x es el alargamiento producido y k es una constante que depende del tipo de material. Si se tiene que la constante de elasticidad es $k = 5\frac{\text{N}}{\text{m}}$, la fórmula correspondiente se puede escribir como:

$$f(x) = 5x, \text{ que corresponde a una función lineal.}$$

Elabora la gráfica de la función $f(x)$

Solución:

La Tabla 3 corresponde a la función $f(x)$. Para representarla basta con dibujar dos puntos de la función y dibujar la recta que pasa por ellos. Ten en cuenta la Figura 2.

x	$f(x)$
0	0
1	5
2	10
3	15
4	20
5	25
6	30

Tabla 3

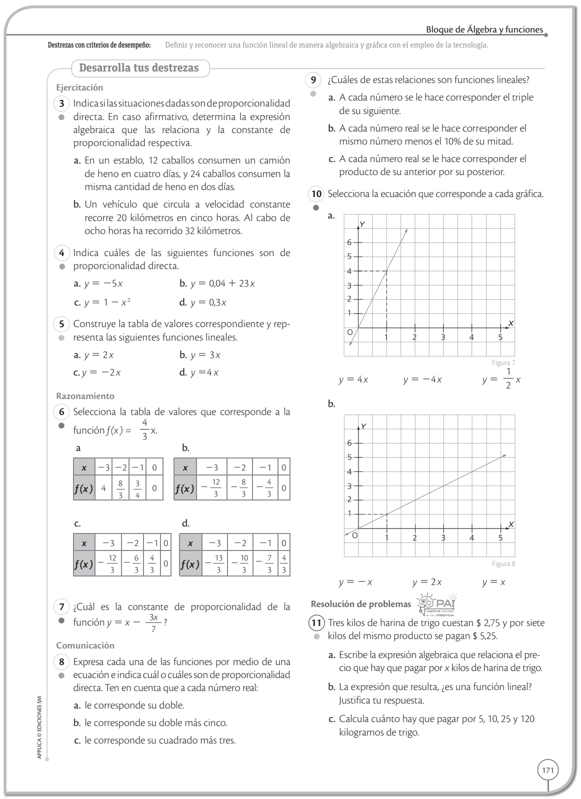
Figura 3

Figura 2

MATEMÁTICAS © EDICIONES SM

APPLICA © EDICIONES SM

169


Bloque de Álgebra y funciones

Destrezas con criterios de desempeño: Definir y reconocer una función lineal de manera algebraica y gráfica con el empleo de la tecnología.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Indica si las situaciones dadas son de proporcionalidad directa. En caso afirmativo, determina la expresión algebraica que las relaciona y la constante de proporcionalidad respectiva.

a. En un establo, 12 caballos consumen un camión de heno en cuatro días, y 24 caballos consumen la misma cantidad de heno en dos días.

b. Un vehículo que circula a velocidad constante recorre 20 kilómetros en cinco horas. Al cabo de ocho horas ha recorrido 32 kilómetros.

4 Indica cuáles de las siguientes funciones son de proporcionalidad directa.

a. $y = -5x$ b. $y = 0{,}04 + 23x$

c. $y = 1 - x^2$ d. $y = 0{,}3x$

5 Construye la tabla de valores correspondiente y representa las siguientes funciones lineales.

a. $y = 2x$ b. $y = 3x$

c. $y = -2x$ d. $y = 4x$

Razonamiento

6 Selecciona la tabla de valores que corresponde a la función $f(x) = \frac{4}{3}x$.

a

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{3}{4}$	0

b.

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$-\frac{12}{3}$	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0

c.

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$-\frac{12}{3}$	$-\frac{6}{3}$	$\frac{4}{3}$	0

d.

x	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$-\frac{13}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{7}{3}$	$\frac{4}{3}$

7 ¿Cuál es la constante de proporcionalidad de la función $y = x - \frac{3x}{7}$?

Comunicación

8 Expresa cada una de las funciones por medio de una ecuación e indica cuál o cuáles son de proporcionalidad directa. Ten en cuenta que a cada número real:

a. le corresponde su doble.

b. le corresponde su doble más cinco.

c. le corresponde su cuadrado más tres.

9 ¿Cuáles de estas relaciones son funciones lineales?

a. A cada número se le hace corresponder el triple de su siguiente.

b. A cada número real se le hace corresponder el mismo número menos el 10% de su mitad.

c. A cada número real se le hace corresponder el producto de su anterior por su posterior.

10 Selecciona la ecuación que corresponde a cada gráfica.

a.

Figura 7

$y = 4x$ $y = -4x$ $y = \frac{1}{2}x$

b.

Figura 8

$y = -x$ $y = 2x$ $y = x$

Resolución de problemas

11 Tres kilos de harina de trigo cuestan \$ 2,75 y por siete kilos del mismo producto se pagan \$ 5,25.

a. Escribe la expresión algebraica que relaciona el precio que hay que pagar por x kilos de harina de trigo.

b. La expresión que resulta, ¿es una función lineal? Justifica tu respuesta.

c. Calcula cuánto hay que pagar por 5, 10, 25 y 120 kilogramos de trigo.

APPLICA © EDICIONES SM

171

Ejercitación

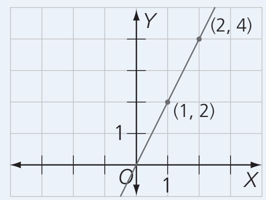
3. **a.** No es proporcionalidad directa.

b. 4 km/h. $y = 4x$

4. **a.** No **b.** Sí **c.** No **d.** Sí

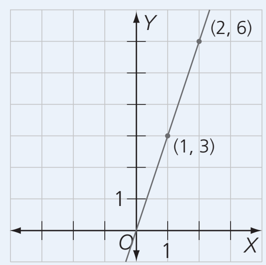
5. **a.**

x	-10	-5	0	5	10
$f(x)$	-20	-10	0	10	20



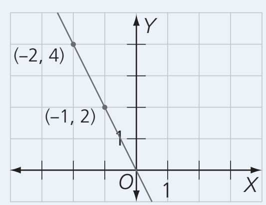
b.

x	-12	-6	-3	0	5	10
$f(x)$	-36	-18	-9	0	15	30



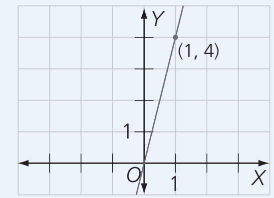
c.

x	-10	-5	0	5	10
$f(x)$	20	10	0	-10	-20



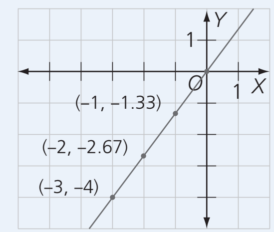
d.

x	-13	-5	-2	0	6	11
$f(x)$	-52	-20	-8	0	24	44



Razonamiento

6. b



7. $\frac{4}{7}$

Comunicación

8. **a.** Directa. $y = 2x$

b. Directa. $y = 2x + 5$

c. Directa. $y = x^2 + 3$

9. **a.** Sí **b.** Sí **c.** No

10. **a.** $y = 4x$ **b.** $y = x$

Resolución de problemas

11. **a.** $y = 0{,}91x$

b. Sí

c. 4,6; 9,2; 23; 10,4

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Proponga, en este caso, funciones cuya gráfica es una línea recta que no pasa por el origen de coordenadas. Pídales a sus estudiantes que las analicen.

b. Defina función afín y escriba la forma generalizada: y = mx + n con m y n números reales. Solicite que comparen las funciones lineales con las afines y saquen conclusiones. Acláreles que la pendiente de una función afín sigue siendo un patrón que determina si la función es creciente o decreciente según el signo que tenga. Elabore una tabla resumen con las diferencias o similitudes entre la función lineal y la función afín. Confirme que observen que la representación de una función afín interseca al eje Y, en el punto b.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

Identifica cuáles de las siguientes funciones son afines. Analiza la pendiente, la ordenada al origen y grafica.

a. $y = 3x$

b. $y = x + 11$

c. $y = \frac{6}{7}x + 7$

d. $y = 3x11$

e. $y = \frac{5}{3}x\ \frac{2}{5}$

Actividades colaborativas

Forma grupos de trabajo y propón que resuelvan el ejercicio 9 de la pág.180 y solicita que determinen sus características.

9 Función afín

Explora

La temperatura de un globo aerostático baja 1 °C por cada 200 m que sube.

- Si al inicio del ascenso marca 16 °C, ¿qué pasará cuando ascienda 0, 200... 800 m?

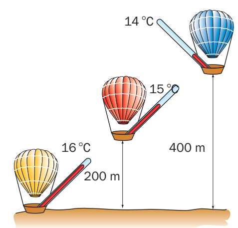


Figura 1

Para saber la temperatura del globo a medida que asciende, se puede construir la Tabla 1 con los valores de la Figura 1.

Altura (m)	0	200	400	600	800
Temperatura (°C)	16	15	14	13	12

Tabla 1

O se podría escribir la relación que hay entre la altura y su temperatura (Tabla 2).

Altura (m)	0	200	400	600	800
Temperatura (°C)	16	$16 - 1$	$16 - 2$	$16 - 3$	$16 - 4$
	16	$16 - \frac{200}{200}$	$16 - \frac{400}{200}$	$16 - \frac{600}{200}$	$16 - \frac{800}{200}$

Tabla 2

Esta relación se puede generalizar mediante el planteamiento de una función.

Las funciones de la forma $\boldsymbol{y = mx + n}$ con $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ números reales se llaman **funciones afines de la función $\boldsymbol{y = mx}$.** Su gráfica corresponde a una línea **recta**.

Ejemplo 1

Para plantear la expresión algebraica de la relación que se plantea en la Tabla 2, se tiene en cuenta una variable $\boldsymbol{y}$ que represente la altura en metros y otra variable $\boldsymbol{x}$ que represente la temperatura en grados centígrados. Así,

$y = 16 - \frac{x}{200}$ o $y = -0{,}005x + 16$

La Figura 2. representa esta función.

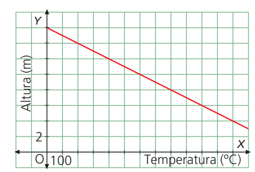


Figura 2

9.1 Caracterización de funciones afines

En las funciones afines $y = mx + n$, m es la **pendiente** de la recta y n es la ordenada para $x = 0$, este punto se llama **ordenada en el origen**.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Representa gráficamente la función $y = 2x + 3$ y determina sus características.

Solución:

a. Se construye una tabla de valores (Tabla 3) y se ubican los pares de valores en un sistema de coordenadas (Figura 3).

b. Al observar la Figura 3 se determina que sus características son:

- Por cada unidad que aumenta la variable x, la variable y aumenta dos.
- La pendiente m en la función $y = 2x + 3$ es 2. Es el coeficiente de x.
- El punto de corte con el eje y es la ordenada de la función para $x = 0$ es decir, $y = 2(0) + 3 = 3$
- La recta interseca al eje y en el punto (0, 3) y el valor 3 coincide con el valor del término independiente.

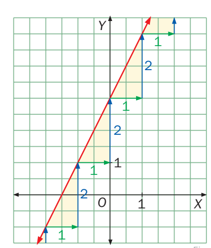
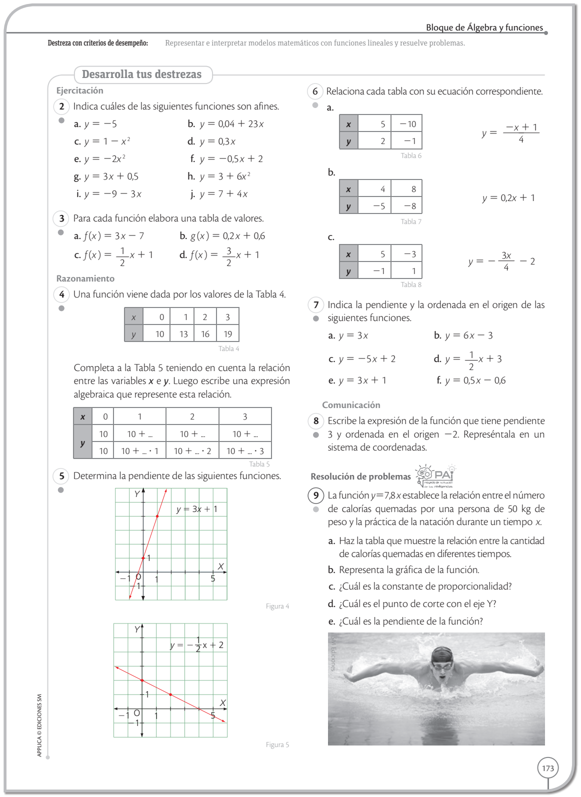


Figura 3

x	−1	0	1	2
$y = 2x + 3$	1	3	5	7

Tabla 3



Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales y resuelve problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Indica cuáles de las siguientes funciones son afines.

a. $y = -5$ b. $y = 0{,}04 + 23x$
c. $y = 1 - x^2$ d. $y = 0{,}3x$
e. $y = -2x^2$ f. $y = -0{,}5x + 2$
g. $y = 3x + 0{,}5$ h. $y = 3 + 6x^2$
i. $y = -9 - 3x$ j. $y = 7 + 4x$

3 Para cada función elabora una tabla de valores.

a. $f(x) = 3x - 7$ b. $g(x) = 0{,}2x + 0{,}6$
c. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ d. $f(x) = \frac{3}{2}x + 1$

Razonamiento

4 Una función viene dada por los valores de la Tabla 4.

x	0	1	2	3
y	10	13	16	19

Tabla 4

Completa a la Tabla 5 teniendo en cuenta la relación entre las variables **x** e **y**. Luego escribe una expresión algebraica que represente esta relación.

x	0	1	2	3
y	10	10 + ...	10 + ...	10 + ...
	10	10 + ... · 1	10 + ... · 2	10 + ... · 3

Tabla 5

5 Determina la pendiente de las siguientes funciones.

Figura 4

Figura 5

6 Relaciona cada tabla con su ecuación correspondiente.

a.

x	5	−10
y	2	−1

Tabla 6

$y = \frac{-x+1}{4}$

b.

x	4	8
y	−5	−8

Tabla 7

$y = 0{,}2x + 1$

c.

x	5	−3
y	−1	1

Tabla 8

$y = -\frac{3x}{4} - 2$

7 Indica la pendiente y la ordenada en el origen de las siguientes funciones.

a. $y = 3x$ b. $y = 6x - 3$
c. $y = -5x + 2$ d. $y = \frac{1}{2}x + 3$
e. $y = 3x + 1$ f. $y = 0{,}5x - 0{,}6$

Comunicación

8 Escribe la expresión de la función que tiene pendiente 3 y ordenada en el origen −2. Represéntala en un sistema de coordenadas.

Resolución de problemas PAI

9 La función $y = 7{,}8x$ establece la relación entre el número de calorías quemadas por una persona de 50 kg de peso y la práctica de la natación durante un tiempo x.

a. Haz la tabla que muestre la relación entre la cantidad de calorías quemadas en diferentes tiempos.
b. Representa la gráfica de la función.
c. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?
d. ¿Cuál es el punto de corte con el eje Y?
e. ¿Cuál es la pendiente de la función?

SM Ediciones

APPLICA © EDICIONES SM

173

Ejercitación

2. b, f, g, i, j

3. Múltiples respuestas. Por ejemplo:

a.

x	−100	−9	−8	0	1	55
$f(x)$	−307	−214	−31	−7	−4	158

b.

x	−99	−55	0	3	96	122
$f(x)$	−19,2	−10,4	0,6	1,2	19,8	25

c.

x	−50	−30	−20	0	20	48
$f(x)$	−24	−14	−9	1	11	25

d.

x	−10	−20	−30	0	10	20
$f(x)$	−14	−29	−44	1	16	4

Razonamiento

4.

x	0	1	2	3
y	10	10 + 3	10 + 6	10 + 9
	10	10 + 3 · 1	10 + 3 · 2	10 + 3 · 3

Luego la expresión algebraica es: $y = 10 + 3x$

5. $3, -\frac{1}{2}$

6. a. $y = 0{,}2 + 1$ b. $y = -\frac{3x}{4} - 2$

c. $y = \frac{-x+1}{4}$

7. a. $m = 3$, ordenada en el origen 0

b. $m = 6$, ordenada en el origen -3

c. $m = -5$, ordenada en el origen 2

d. $m = \frac{1}{2}$, ordenada en el origen 3

e. $m = 3$, ordenada en el origen 1

f. $m = 0{,}5$ ordenada en el origen 0,6

Comunicación

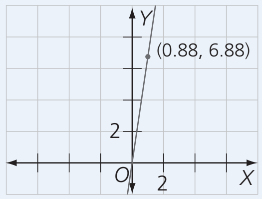
8. $y = 3x - 2$

Resolución de problemas

9. a.

Tiempo	0	5	10	15	20	25
Calorías quemadas	0	39	78	117	156	195

b.



c. 7, 8 d. (0, 0) e. 7, 8

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Pida a los estudiantes que propongan ejemplos de funciones de la forma y =mx y y = k, luego de graficarlas indique que las describan.

b. Asegure que los estudiantes interpreten cada una de las funciones desde su fórmula general: y = x es de la forma y = mx, siendo m 5=1; y = k es de la forma y = mx + n, siendo m = 0.

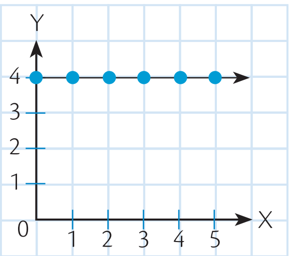
c. Recuerde a los estudiantes los conceptos de rectas paralelas y perpendiculares y pídales que las representen en el cuaderno solicíteles representar las funciones: $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x + 2$, $y = \frac{1}{2}x - 3$ en el mismo plano cartesiano, y en otro plano, las funciones; $y = 3x - 2$, $y = -\frac{1}{3}x + 2$. Indique que observen las representaciones y las comparen.

Ampliación conceptual

Función identidad y = k

La función expresada por: y = f (x) = mx + b en donde la pendiente m = 0, toma la forma y 5 k, siendo b 5 k un número real constante, se denomina función constante. La gráfica de f es una recta horizontal paralela al eje x, y corta al eje Y en k=4.

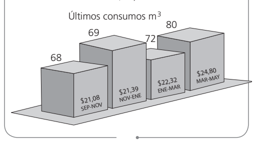
x	y
1	4
2	4
3	4
4	4



10 Representación de funciones lineales y afines

Explora

La factura del consumo de agua relaciona la cantidad de agua consumida en metros cúbicos con su costo. En este caso el valor unitario de cada metro cúbico es $ 0,31.



Los datos de la gráfica se pueden representar mediante la función lineal $y = 0{,}31x$, cuyos valores se pueden tabular así:

Metros cúbicos	1	68	69	72	80
Valor de la factura	0,31	21,08	21,39	22,32	24,80

Tabla 1

Para representar los datos en una gráfica lineal, basta con tomar dos parejas ordenadas, por ejemplo, (1, 0,31) y (69, 21,37), ubicarlas en un sistema de cordenadas y unirlas mediante una línea recta.

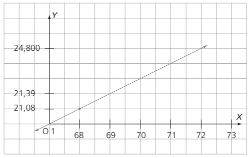


Figura 1

Ten en cuenta

Los Gráficos de bastones son muy similares a los de barras, se recomienda su uso para variables cualitativas o cuantitativas discretas cuando sus respectivas categorías son numerosas.

Puesto que por dos puntos distintos pasa una única recta, para representar una **función lineal** o una **función afín** basta con ubicar dos puntos de la misma y trazar a continuación la recta que pasa por ellos.

Ejemplo 1

Representa la función afín que tiene por ecuación $y = -3x + 4$.

Se construye la Tabla 2 con un par de valores y se traza la recta que pasa por los puntos obtenidos.

Es conveniente elegir puntos fáciles de calcular, por ejemplo el que tiene $x = 0$.

x	$y = -3x + 4$
0	4
2	−2

Tabla 2

Ten en cuenta

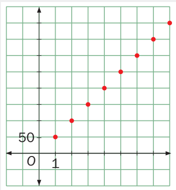


Figura 2

Si la variable independiente sólo toma valores naturales (0, 1, 2, ...), su representación gráfica está dada por puntos alineados que no se deben unir.

x	$y = \frac{1}{2}x$	$y = \frac{1}{2}x + 2$	$y = \frac{1}{2}x - 3$
0	0	2	−3
2	1	3	−2

Tabla 3

10.1 Rectas paralelas

Dos rectas que tienen la misma pendiente son **paralelas** y, recíprocamente, si son paralelas significa que tienen la misma pendiente.

$$m_1 = m_2$$

Ejemplo 2

Representa las funciones $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x + 2$ e $y = \frac{1}{2}x - 3$.

Se construye una tabla con dos puntos (Tabla 3). Se representan los puntos en el plano cartesiano y se traza la recta (Figura 3).

Observa que las gráficas de las funciones afines de la forma $f(x) = \frac{1}{2}x + n$ representan rectas paralelas a la gráfica de la función lineal $f(x) = \frac{1}{2}$

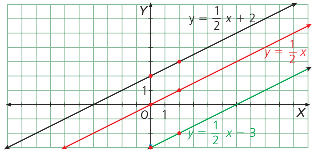
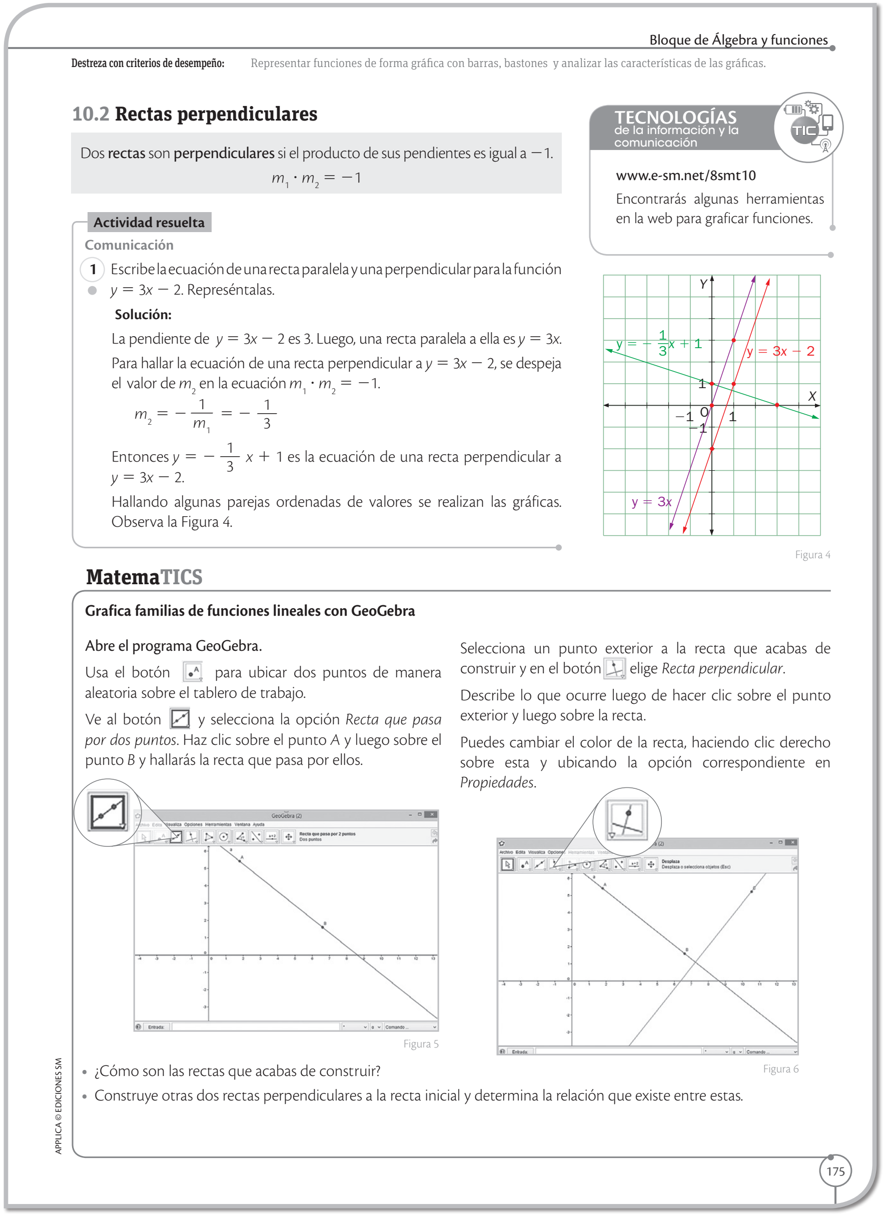


Figura 3


Bloque de Álgebra y funciones

Destreza con criterios de desempeño: Representar funciones de forma gráfica con barras, bastones y analizar las características de las gráficas.

10.2 Rectas perpendiculares

Dos **rectas** son **perpendiculares** si el producto de sus pendientes es igual a -1.

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$

Actividad resuelta

Comunicación

1 Escribe la ecuación de una recta paralela y una perpendicular para la función $y = 3x - 2$. Represéntalas.

Solución:

La pendiente de $y = 3x - 2$ es 3. Luego, una recta paralela a ella es $y = 3x$.

Para hallar la ecuación de una recta perpendicular a $y = 3x - 2$, se despeja el valor de m_2 en la ecuación $m_1 \cdot m_2 = -1$.

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{3}$$

Entonces $y = -\frac{1}{3}x + 1$ es la ecuación de una recta perpendicular a $y = 3x - 2$.

Hallando algunas parejas ordenadas de valores se realizan las gráficas. Observa la Figura 4.

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación TIC

www.e-sm.net/8smt10

Encontrarás algunas herramientas en la web para graficar funciones.

Figura 4

MatemaTICS

Grafica familias de funciones lineales con GeoGebra

Abre el programa GeoGebra.

Usa el botón para ubicar dos puntos de manera aleatoria sobre el tablero de trabajo.

Ve al botón y selecciona la opción *Recta que pasa por dos puntos*. Haz clic sobre el punto *A* y luego sobre el punto *B* y hallarás la recta que pasa por ellos.

Selecciona un punto exterior a la recta que acabas de construir y en el botón elige *Recta perpendicular*.

Describe lo que ocurre luego de hacer clic sobre el punto exterior y luego sobre la recta.

Puedes cambiar el color de la recta, haciendo clic derecho sobre esta y ubicando la opción correspondiente en *Propiedades*.

Figura 5

Figura 6

- ¿Cómo son las rectas que acabas de construir?
- Construye otras dos rectas perpendiculares a la recta inicial y determina la relación que existe entre estas.

APPLICA © EDICIONES SM

175

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

Indica en cada caso si las rectas son paralelas o perpendiculares y grafica.

a. $Y = 5x + \frac{1}{2}$ $\quad y = 5x - 1$

b. $Y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ $\quad y = 3x + 1$

Actividades TIC

En el link:

http://www.extremate.es/ESO/Definitivo%20Funciones/textoafin.swf

Descubre la información y utiliza esta herramienta para aplicar las funciones afines.

Actividades colaborativas

Pide a los estudiantes que en grupo identifiquen los elementos y resuelvan el problema:

Un móvil se desplaza a una velocidad constante de 30 km/h.

a. Escribe la ecuación de la función que relaciona el tiempo con el espacio recorrido.

b. ¿De qué tipo es? Obtén su gráfica.

c. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 200 km?

Ejercitación

2. a.

x	-10	-5	0	5	10
$f(x)$	-40	-20	0	20	40

b.

x	-10	-5	0	5	10
$f(x)$	$-6{,}67$	$-3{,}33$	0	$3{,}333$	$6{,}667$

c.

x	-10	-5	0	5	10
$f(x)$	60	30	0	-30	-60

d.

x	-10	-5	0	5	10
$f(x)$	10	5	0	-5	-10

e.

x	-10	-5	0	5	10
$f(x)$	-39	-19	1	21	41

f.

x	-10	-5	0	5	10
$f(x)$	7	$4{,}5$	2	$-0{,}5$	-3

g.

x	-10	-5	0	5	10
$f(x)$	-51	-26	-1	24	49

h.

x	-10	-5	0	5	10
$f(x)$	$20{,}67$	$10{,}67$	$0{,}667$	$-9{,}33$	$-19{,}3$

i.

x	-10	-5	0	5	10
$f(x)$	28	18	8	-2	-12

j.

x	-10	-5	0	5	10
$f(x)$	-49	-24	1	26	51

3. Múltiples soluciones, por ejemplo

a. $y = 2x, y = 2x + 5$

b. $y = 3x + 1, y = 3x + 10$

c. $y = -x + 13, y = -x - 1$

d. $y = -5x, y = -5x - 8$

4. Múltiples soluciones, por ejemplo

$y = -\dfrac{1}{2x} + 4$

5. a. $y = -\dfrac{1}{2x}, y = -\dfrac{1}{2x} - 2$

b. $y = -\dfrac{1}{5x}, y = -\dfrac{1}{5x} + 5$

c. $y = x, y = x - 3$

d. $y = x, y = x + 3$

6. d

7. $m = -2$

8. $y = -\dfrac{1}{5x} - \dfrac{19}{5}$

9. $y = -\dfrac{6}{5x} + 12$

10. $y = -\dfrac{1}{2x}$

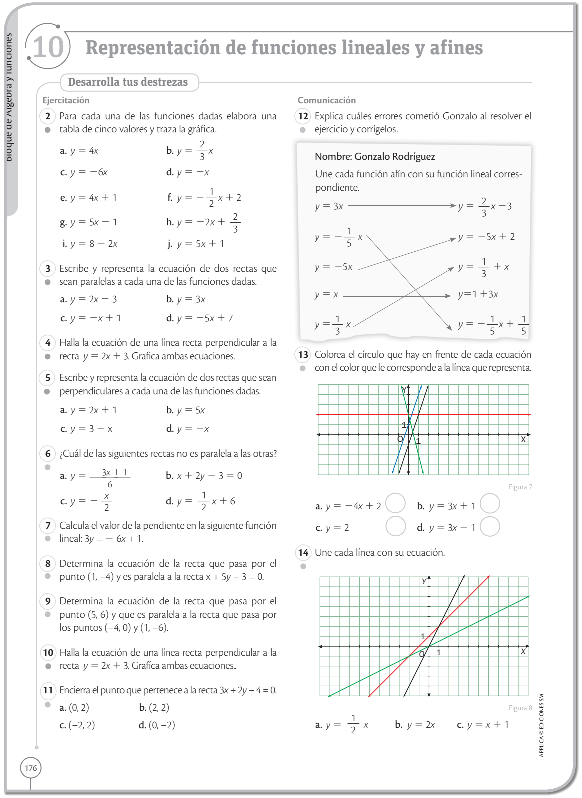
11. a

Comunicación

12. Respuesta libre

13. a. Verde b. Negra
c. Roja d. Azul

14. a. verde b. negra c. roja



Bloque de Álgebra y funciones

10 Representación de funciones lineales y afines

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Para cada una de las funciones dadas elabora una tabla de cinco valores y traza la gráfica.
a. $y = 4x$ b. $y = \frac{2}{3}x$
c. $y = -6x$ d. $y = -x$
e. $y = 4x + 1$ f. $y = -\frac{1}{2}x + 2$
g. $y = 5x - 1$ h. $y = -2x + \frac{2}{3}$
i. $y = 8 - 2x$ j. $y = 5x + 1$

3 Escribe y representa la ecuación de dos rectas que sean paralelas a cada una de las funciones dadas.
a. $y = 2x - 3$ b. $y = 3x$
c. $y = -x + 1$ d. $y = -5x + 7$

4 Halla la ecuación de una línea recta perpendicular a la recta $y = 2x + 3$. Grafica ambas ecuaciones.

5 Escribe y representa la ecuación de dos rectas que sean perpendiculares a cada una de las funciones dadas.
a. $y = 2x + 1$ b. $y = 5x$
c. $y = 3 - x$ d. $y = -x$

6 ¿Cuál de las siguientes rectas no es paralela a las otras?
a. $y = \frac{-3x + 1}{6}$ b. $x + 2y - 3 = 0$
c. $y = -\frac{x}{2}$ d. $y = \frac{1}{2}x + 6$

7 Calcula el valor de la pendiente en la siguiente función lineal: $3y = -6x + 1$.

8 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, -4)$ y es paralela a la recta $x + 5y - 3 = 0$.

9 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, 6)$ y que es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-4, 0)$ y $(1, -6)$.

10 Halla la ecuación de una línea recta perpendicular a la recta $y = 2x + 3$. Grafica ambas ecuaciones.

11 Encierra el punto que pertenece a la recta $3x + 2y - 4 = 0$.
a. $(0, 2)$ b. $(2, 2)$
c. $(-2, 2)$ d. $(0, -2)$

Comunicación

12 Explica cuáles errores cometió Gonzalo al resolver el ejercicio y corrígelos.

Nombre: Gonzalo Rodríguez
Une cada función afín con su función lineal correspondiente.
$y = 3x$ → $y = \frac{2}{3}x - 3$
$y = -\frac{1}{5}x$ → $y = -5x + 2$
$y = -5x$ → $y = \frac{1}{3} + x$
$y = x$ → $y = 1 + 3x$
$y = \frac{1}{3}x$ → $y = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{5}$

13 Colorea el círculo que hay en frente de cada ecuación con el color que le corresponde a la línea que representa.

Figura 7

a. $y = -4x + 2$ b. $y = 3x + 1$
c. $y = 2$ d. $y = 3x - 1$

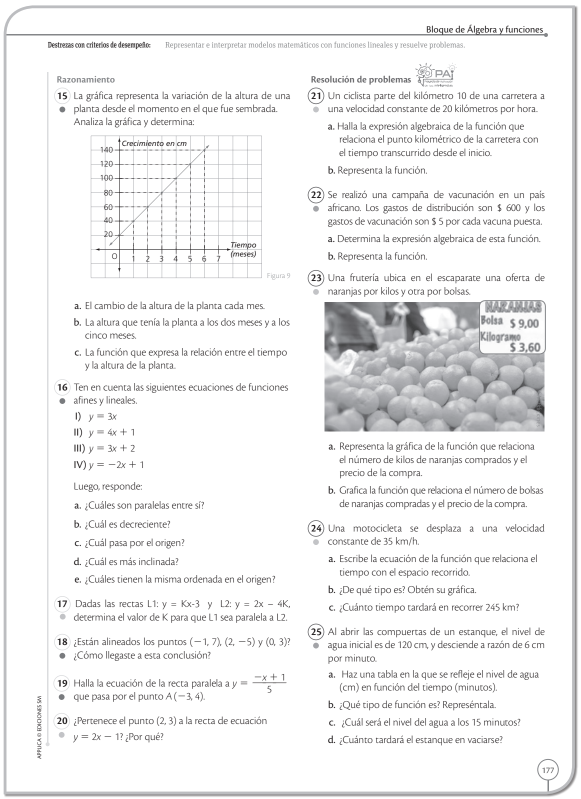
14 Une cada línea con su ecuación.

Figura 8

a. $y = \frac{1}{2}x$ b. $y = 2x$ c. $y = x + 1$

176

APPLICA © EDICIONES SM



Bloque de Álgebra y funciones

Destrezas con criterios de desempeño: Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales y resuelve problemas.

Razonamiento

15 La gráfica representa la variación de la altura de una planta desde el momento en el que fue sembrada. Analiza la gráfica y determina:

Figura 9

a. El cambio de la altura de la planta cada mes.
b. La altura que tenía la planta a los dos meses y a los cinco meses.
c. La función que expresa la relación entre el tiempo y la altura de la planta.

16 Ten en cuenta las siguientes ecuaciones de funciones afines y lineales.

I) $y = 3x$
II) $y = 4x + 1$
III) $y = 3x + 2$
IV) $y = -2x + 1$

Luego, responde:

a. ¿Cuáles son paralelas entre sí?
b. ¿Cuál es decreciente?
c. ¿Cuál pasa por el origen?
d. ¿Cuál es más inclinada?
e. ¿Cuáles tienen la misma ordenada en el origen?

17 Dadas las rectas L1: $y = Kx-3$ y L2: $y = 2x - 4K$, determina el valor de K para que L1 sea paralela a L2.

18 ¿Están alineados los puntos $(-1, 7)$, $(2, -5)$ y $(0, 3)$? ¿Cómo llegaste a esta conclusión?

19 Halla la ecuación de la recta paralela a $y = \frac{-x+1}{5}$ que pasa por el punto $A(-3, 4)$.

20 ¿Pertenece el punto $(2, 3)$ a la recta de ecuación $y = 2x - 1$? ¿Por qué?

Resolución de problemas PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

21 Un ciclista parte del kilómetro 10 de una carretera a una velocidad constante de 20 kilómetros por hora.

a. Halla la expresión algebraica de la función que relaciona el punto kilométrico de la carretera con el tiempo transcurrido desde el inicio.
b. Representa la función.

22 Se realizó una campaña de vacunación en un país africano. Los gastos de distribución son \$ 600 y los gastos de vacunación son \$ 5 por cada vacuna puesta.

a. Determina la expresión algebraica de esta función.
b. Representa la función.

23 Una frutería ubica en el escaparate una oferta de naranjas por kilos y otra por bolsas.

a. Representa la gráfica de la función que relaciona el número de kilos de naranjas comprados y el precio de la compra.
b. Grafica la función que relaciona el número de bolsas de naranjas compradas y el precio de la compra.

24 Una motocicleta se desplaza a una velocidad constante de 35 km/h.

a. Escribe la ecuación de la función que relaciona el tiempo con el espacio recorrido.
b. ¿De qué tipo es? Obtén su gráfica.
c. ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer 245 km?

25 Al abrir las compuertas de un estanque, el nivel de agua inicial es de 120 cm, y desciende a razón de 6 cm por minuto.

a. Haz una tabla en la que se refleje el nivel de agua (cm) en función del tiempo (minutos).
b. ¿Qué tipo de función es? Represéntala.
c. ¿Cuál será el nivel del agua a los 15 minutos?
d. ¿Cuánto tardará el estanque en vaciarse?

APPLICA © EDICIONES SM

177

15. a. 20 cm b. 60 cm y 120 cm
c. $y = 2x + 20$

16. a. I y III b. IV
c. I d. II e. II y IV

17. $K = 2$

18. Sí

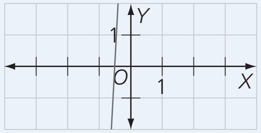
19. $y = -\frac{1}{5x} - \frac{17}{2x}$

20. Sí

Resolución de problemas

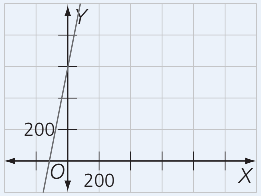
21. a. $y = 20x + 10$

b.

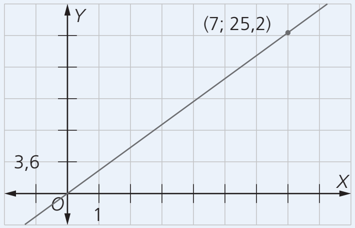


22. a. $y = 5x + 600$

23. a.



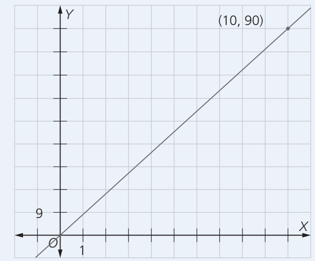
b.



24. a. $y = 35x$

b. Lineal.

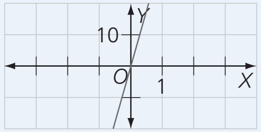
c. 7 horas



25. a.

Tiempo (minutos)	0	1	2	3	4
Nivel del agua (cm)	120	114	108	102	96

b. Función afín.



c. 30 cm d. 20 minutos

Libro del alumno

Ampliación conceptual

En cierto experimento, la temperatura inicial de una sustancia es de 20 °C, y luego aumenta 5 °C cada minuto.

¿Cuál es la función que expresa la relación entre la temperatura y el tiempo?

En la situación planteada, si la variable y representa la "temperatura" y la variable x, el "tiempo", la función que expresa la relación entre la temperatura y el tiempo es:

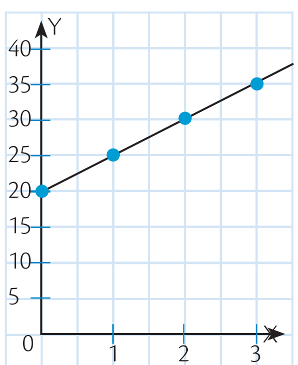
Aumento de la temperatura cada minuto

Temperatura final — $f(x) = 5x + 20$ — Temperatura inicial

La función $f(x) = 5x + 20$ se denomina función afín. Toda función de la forma y = mx; 1 + b, con m y b números reales constantes y diferentes de cero es una función afín.

Su gráfica es

x	y
0	20
1	25
2	30
3	35



Bloque de Álgebra y funciones

11 Aplicaciones de las funciones lineales y afines

Explora

Para pasar de grados Fahrenheit (°F) a grados centígrados (°C) se aplica la siguiente fórmula:

$$°C = \frac{(°F - 32) \cdot 5}{9}$$

Es decir,

$$f(x) = \frac{(x - 32) \cdot 5}{9}$$

- Según lo anterior, ¿cuántos grados centígrados equivalen a 18 grados Fahrenheit?

Para calcular la equivalencia que hay entre el número de grados centígrados y el de grados Fahrencheit, se sustituye *x* por 18 °F en la función, entonces:

$$f(18) = \frac{(18 - 32) \cdot 5}{9} \approx -7{,}8\ °C$$

En la Figura 1 se observa la representación gráfica de la función.

Como se evidencia, el estudio de las funciones ha sido de vital importancia al momento de registrar, analizar y precalcular valores relacionados con diferentes fenómenos de la cotidianidad.

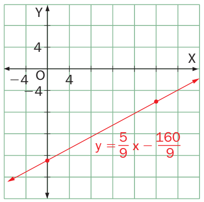


Figura 1

Las funciones de la forma:

$y =$ (parte proporcional) + (parte fija)

son funciones afines, cuya expresión es $y = mx + n$, donde mx es la parte proporcional y n es la parte fija. Tienen muchas aplicaciones en ciencias, economía, medicina, física, geología y astronomía.

11.1 Ejemplo de aplicaciones en las ciencias

Muchas ciencias se valen de funciones afines y lineales en la modelación y análisis de comportamientos como la velocidad de los objetos, la medida de distancias o el crecimiento proporcional de un elemento, entre otras.

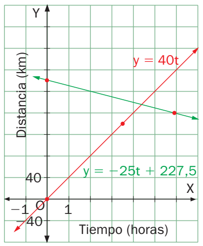


Figura 2

Ten en cuenta

- La velocidad se expresa como la razón de cambio de la distancia en un intervalo de tiempo: $v = \frac{d}{t}$.
- Así, la distancia se puede expresar como el producto de la velocidad y el tiempo: $d = v \cdot t$.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1 Dos ciudades *A* y *B* están a una distancia de 227,5 km. Si un carro rojo parte de la ciudad *A* hacia la ciudad *B*, con una velocidad de 40 km/h, y al mismo tiempo parte un carro verde de la ciudad *B* hacia la ciudad *A* con una velocidad de 25 km/h, ¿en qué lugar se cruzan los dos carros? ¿Cuánto tiempo emplean?

Solución:

- Se puede representar la información en una gráfica en la que se muestre la velocidad de los dos autos, tal como en la Figura 2 En este caso se observa que la ecuación $y = 40t$ representa la velocidad del carro rojo y la ecuación $y = -25t + 227{,}5$ representa la velocidad del carro verde. Observa que esta última ecuación corresponde a una función afín y la primera a una lineal. Esto se debe a que el segundo carro viaja en dirección contraria (por ello el signo negativo) y parte a 227,5 km del punto de referencia (la ciudad *A*).
- Para determinar con exactitud el tiempo en el que se cruzan, se igualan las ecuaciones que representan las velocidades de los autos.

$$40t = -25t + 227{,}5 \qquad t = \frac{227{,}5}{65} \qquad t = 3{,}5$$

Al reemplazar $t = 3{,}5$ en la ecuación $y = 40t$, se tiene que $y = 140$. Luego se concluye que los carros se cruzan a las tres horas y media a una distancia de 140 km de la ciudad *A*.

Destrezas con criterios de desempeño: Representar e interpretar modelos matemáticos con funciones lineales y resuelve problemas.

11.2 Ejemplo de aplicaciones en la economía

En economía se modelan funciones como costos, utilidades, demanda, ofecta, etc.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

2 Para revelar e imprimir las fotos de una cámara digital se pagan $ 2 000 por el procesado de la tarjeta de memoria, y un costo adicional de $ 250 por foto.

a. ¿Cuál es la expresión algebraica de esta función?

b. Representa gráficamente la función. ¿Se pueden unir los puntos?

Solución:

a. Si x es el número de fotos e y es el costo, la ecuación de la función es $y = 250x + 2\,000$.

b. No se pueden unir los puntos, puesto que no tendría sentido revelar, por ejemplo, 2,3 fotos.

CULTURA del Buen Vivir

El compromiso

Formular y llevar a cabalidad un compromiso necesita de un proceso de planeación y cumplimiento.

- ¿Cómo crees que el pensamiento matemático te ayuda a buscar y seguir procesos que te permitan cumplir tus metas?

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3 Observa la Figura 3 y propón la situación que se relaciona con la información que se presenta en ella.

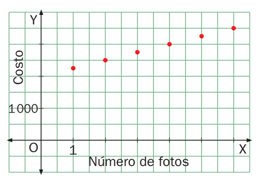


Figura 3

- Indica la fórmula de la función de cada tramo.

Modelación

4 En la Tabla 1 se relaciona el volumen de los cilindros de 10 cm de altura con el radio de su base.

x	10	20	30	40
y	0	30	60	90

Tabla 1

a. Halla la ecuación de la relación.

b. Construye la gráfica de la función que relaciona los datos de la tabla.

5 A un tanque que contiene 150 L de gas propano se le inyecta del mismo gas a razón de 3 L por segundo. Determina la función que relaciona las dos variables mencionadas y calcula el contenido del tanque a los 10 s de iniciar la inyección del gas.

Razonamiento

6 Observa la Figura 4

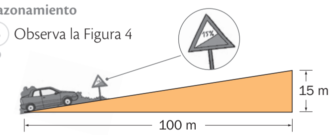


Figura 4

a. Calcula la pendiente de la recta sobre la que está ubicada la carretera por la que asciende el auto.

b. Explica el significado de la señal de tráfico que aparece en la carretera.

Resolución de problemas

7 Para colaborar con las personas sin techo, una ONG elabora un periódico de reparto callejero. Cada vendedor recibe un salario fijo de $ 75 al mes y, además, $ 15 por ejemplar vendido.

a. Escribe la fórmula y representa la gráfica de la función que relaciona el número de periódicos vendidos con el dinero recibido al mes.

b. ¿Es una función afín o lineal?

c. ¿Cuál es el valor de la pendiente?

d. ¿Cuál es el término independiente?

e. ¿Cuántos ejemplares tiene que vender un repartidor para cobrar en un mes $ 555 ?

8 Plantea un problema que se solucione con cada función.

a. $y = 40x + 10$

b. $y = 5x + 20$

Actividades TIC

En el link:
http://www.matemath.com/funcion1/juguetes.swf
Descubre la información y utiliza esta herramienta para aplicar en ejemplos varios de aplicación.

Actividades colaborativas

Pide a los estudiantes que en grupo escriban tres situaciones cotidianas, que puedan representarse como una función y analicen su dominio y recorrido.

Ejercitación

3. Respuesta libre.

Modelación

4. a. Validar la veracidad de las respuestas.

5. $y = 3x + 150$

Al pasar 10 segundos, el tanque contiene 180 L.

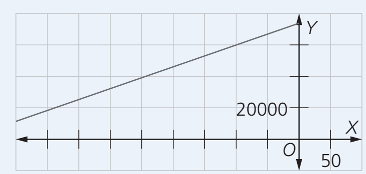
Razonamiento

6. a. $\frac{3}{20}$

b. Respuesta libre

Resolución de problemas

7. a. $y = 15x + 75$



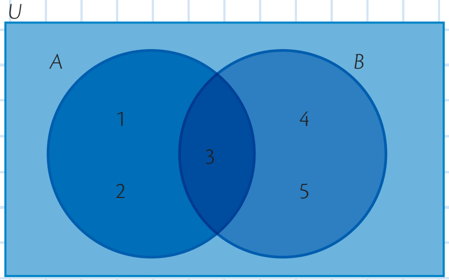
UNIDAD 4

Evaluación sumativa

Nombre:...

Grado:................. **Fecha:**................. .

1. Los elementos para los conjuntos de la figura son:



(A ∪ B) – A

A. {1, 2} B. {2, 3}

C. {3, 4} D. {4, 5}

2. Si U ={3, 4, 5, 6, 7, 8}, A = {2, 4,5,7 } y B ={5, 6, 7}. Los elementos de (A ∩ B)′ es:

A. {3, 4, 6}

B. {2, 4, 6}

C. {3, 5, 6}

D. {3, 5, 7}

3. En una escuela 18 niños juegan fútbol y básquet, y solamente cuatro juegan básquet. Si hay un total de 30 niños. ¿Cuántos de ellos juegan solamente fútbol?

A. 18 B. 8

C. 4 D. 14

4. Si A= {1,2,3} y B={4,5,6}, R={(x,y)/AxB/ x+y sea un número par} es:

A. {(1,5) ;(2,4); (2,6); (3,5)}

B. {(1,4) ;(2,4); (2,6); (3,5)}

C. {(1,5) ;(2,4); (2,6); (3,5)}

D. {(1,5) ;(2,4); (1,6); (3,5)}

5. 5. Si R = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 3), (3, 3), (4, 4)} y R es de equivalencia definida sobre A, los elementos del conjunto A son:

A. {1, 2, 3, 4}

B. {2, 3, 4}

C. {1, 2, 3, }

D. {1, 3, 4}

6. Una función lineal es decreciente cuando:

A. m es positiva

B. m es negativa

C. m es nula

D. m es inversa

7. El área de un triángulo de base 5 cm en términos de su altura. Expresado mediante una fórmula es:

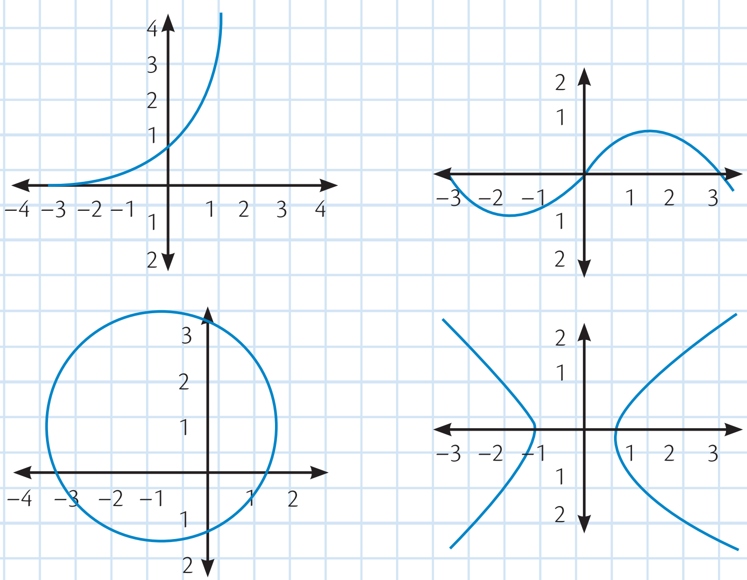
A. A= (5 x h)

B. A= (5 x h)/2

C. A= (5 + h)*2

D. A= (5 + h)/2

8. Las gráficas que son funciones son:



A. b y c B. b y c

C. a y c D. a y b

9. La función $f(x)= x^2 +4x - 2$ representa el movimiento de un objeto. La función tiene un máximo en:

A. 2 B. −2

C. 3 D. −3

10. Dada la función $y = 2x + 3$

A. Por cada unidad que aumenta la variable x, la variable y aumenta dos

B. La pendiente m en la función es 2

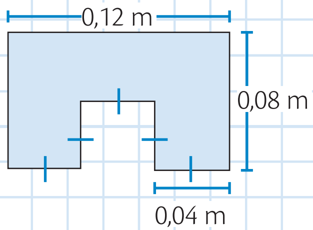
C. El punto de corte con el eje x es $-\frac{3}{2}$.

D. La recta interseca al eje y en el punto (0, 3)

UNIDAD 5 Evaluación diagnóstica

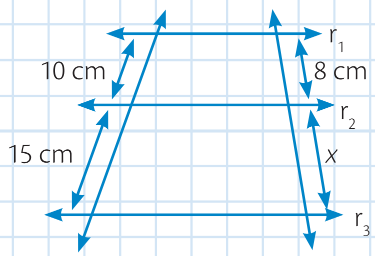
Nombre:...
Grado:................. **Fecha:**.................

1. El perímetro (en metros) de la siguiente figura es:



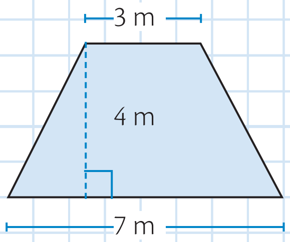
A. 0,48 m
B. 0,44 m
C. 0,52 m
D. 0,40 m

2. Aplica el teorema de Tales para hallar la longitud del segmento definido por la variable x.



A. 10 cm
B. 12 cm
C. 14 cm
D. 15 cm

3. El área de la figura es:



A. 20 m^2
B. 36 m^2
C. 30 m^2
D. 42 m^2

4. Carolina compra una caja de cartón cuya forma, es la de un prisma rectangular de 15 cm de largo, 10 cm de ancho y 4 cm de altura. Si ella la desarma. Su área total es:

A. 240 cm^2
B. 360 cm^2
C. 540 cm^2
D. 420 cm^2

5. El área lateral del cilindro cuyas dimensiones son: Radio: 2,5 cm; altura: 4 cm

A. 20 π cm^2
B. 22 π cm^2
C. 25 π cm^2
D. 28 π cm^2

6. El diámetro de una esfera cuya superficie es 1 m es:

A. 0,56m
B. 0,44 m
C. 0,52 m
D. 0,40 m

7. El radio del círculo, de área 4 π es:

A. 1 m
B. 2 m
C. 3 m
D. 4 m

Propósito de la unidad

Bloque de geometría y medida

El bloque geométrico abarca el tratamiento de las características y las propiedades de las figuras con diversas dimensiones y el análisis de sus características y construcción de triángulos, clasifiicación de los mismos, congruencias, semejanzas y diferencias para construir el concepto de cada una, de las figuras así como las relaciones existentes entre ellas.

El estudio de las transformaciones y las simetrías también es motivo de tratamiento en este bloque, para determinar las superficies y áreas de polígonos regulares e irregulares, también la generación de cuerpos redondos por la rotación en un eje de giro.

La resolución de problemas referidos a situaciones de localización, comprensión y representación espacial es el medio para desarrollar toda esta temática, así como la meta final de su utilidad.

Toda clase de geometría, en la que se practiquen relaciones y apliquen modelos matemáticos en la resolución de problemas, donde los estudiantes ponen en juego los saberes adquiridos.

Evaluaciones

Diagnóstica

La evaluación diagnóstica, además de ayudar a generar en los y las estudiantes curiosidad acerca de los temas que se estudiarán, permite anticipar o predecir los conceptos en los que se puede encontrar alguna dificultad. En este caso, los resultados le servirán al docente para planear las clases y proponer la metodología más conveniente para el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para iniciar la unidad se hace necesario recordar las nociones de líneas, planos, ángulo entre rectas, perímetros de figuras regulares e irregulares, superficies de triángulos y cuadriláteros. Se recomienda que las rectas y puntos notables de un triángulo se las desarrolle con la construcción de sus elementos y describir las características de cada uno, los estudiantes deben dominar estas destrezas estudiadas anteriormente.

Formativa

Es muy importante que analice los avances o las dificultades que tuvieron los estudiantes al desarrollar cada actividad. Qué aprendizajes nuevos tuvieron. Esto además de darle pistas del desarrollo de los y las estudiantes, le permitirá motivar procesos de metacognición muy valiosos para el aprendizaje.

La evaluación formativa contempla una serie de ejercicios y problemas que permitan verificar si desarrollaron las destrezas planteadas como: Construye triángulos dadas algunas medidas de ángulos o lados.

Dibuja sus rectas y puntos notables como estrategia para plantear y resolver problemas de perímetros y áreas de triángulos, cuadriláteros y circunferencias, comunica procesos y estrategias utilizadas.

Resuelve problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas de polígonos regulares e irregulares.

Sumativa

La función principal de esta evaluación es identificar lo que los estudiantes aprendieron durante el desarrollo de la unidad correspondiente. Esto, además de permitir analizar cuáles son las dificultades y las fortalezas del proceso de enseñanza y aprendizaje, servirá como evidencia de que alcanzaron los logros de aprendizaje que permitirán desarrollar con fluidez los conceptos de la unidad siguiente

Se presentan una serie de problemas que permiten evaluar los logros alcanzados al inicio de la unidad y las destrezas con criterio de desempeño posteriores como: aplica como estrategia de solución la descomposición en triángulos y/o la de cuerpos geométricos.

Explica los procesos de solución empleados en la construcción de polígonos regulares y cuerpos geométricos; juzga la validez de resultados.

Respuestas

Evaluación diagnóstica

1	2	3	4	5	6	7
A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D

Esquema conceptual

Conocimientos de la unidad

- Bloque de geometría y medida
  - Triángulos
    - Clasificación de triángulos
    - Construcción de triángulos
  - Líneas notables en el triángulo
  - Propiedades de los triángulos
    - Propiedades relacionadas con los ángulos del triángulo
    - Propiedades relacionadas con los lados del triángulo
  - Triángulos congruentes
    - Criterios de congruencia de triángulos
  - Cuadriláteros
    - Propiedades de las diagonales de los paralelogramos

Cultura del Buen Vivir

■ **Valor: La armonía**

Una persona con un carácter armonioso puede adaptarse con facilidad a las distintas manera de pensar, actuar, sentir y actuar de otras personas.

- Circunferencia y círculo
  - Elementos de la circunferencia
  - Posiciones de una recta y una circunferencia
  - Posiciones relativas de un punto y una circunferencia
  - Posiciones relativas entre dos circunferencia
  - Círculo
- Cuerpos redondos
- Áreas de cuadriláteros y triángulos
  - Áreas del rectángulo, del cuadrado y del paralelogramo
  - Área del triángulo
  - Área del rombo
  - Área del trapecio
- Áreas de polígonos regulares e irregulares
  - Área de polígonos regulares
  - Área de polígonos irregulares

Compromiso a lograr

Mediante el desarrollo de la unidad los estudiantes emplearán la congruencia y las características sobre las rectas y puntos notables, en la construcción de figuras. Asumirán los procesos de solución de problemas utilizando como argumento criterios de congruencia y las propiedades y elementos de triángulos. Expresarán con claridad los procesos seguidos y los razonamientos empleados, utilizará estrategias de descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras compuestas, y en el cálculo de cuerpos compuestos; aplicarán el teorema de Pitágoras para el cálculo de longitudes desconocidas de elementos de polígonos o cuerpos geométricos, como requerimiento previo a calcular áreas de polígonos regulares y áreas de cuerpos, en contextos geométricos o en situaciones reales.

Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica	
Unidad 5: geometría y medida	
Objetivos generales del área	**Objetivos del área por subnivel**
OG.M.1. – OG.M.6.	O.M.4.2.
Objetivos de subnivel	**Valores**
OI.4.1. – OI.4.12.	• La armonía (I.2.)
Criterios de evaluación	**Indicadores de evaluación**
CE.M.4.5. – CE.M.4.6.	I.M.4.5.2. – I.M.4.6.1. – I.M.4.6.2. – I.M.4.5.1. – I.M.4.6.3.

Objetivos de la unidad

- Construir triángulos dadas algunas medidas de ángulos o lados y dibujar sus rectas y puntos notables como estrategia para plantear y resolver problemas de perímetros y áreas de triángulos, cuadriláteros y circunferencias, comunica procesos y estrategias utilizadas.
- Resolver problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas de polígonos regulares e irregulares.
- Aplicar como estrategia de solución la descomposición en triángulos y/o la de cuerpos geométricos.

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Geometría y medida	• Clasificar y construir triángulos utilizando regla y compás dadas condiciones sobre ciertas medidas de lados y/o ángulos. • Definir y dibujar medianas y baricentro; mediatrices y circuncentro; alturas y ortocentro; bisectrices e incentro en un triángulo. • Plantear y resolver problemas que impliquen la identificación de las características de las rectas y puntos notables de un triángulo.	• Active los conocimientos sobre ángulos estudiados en el módulo anterior en lo referente a la construcción y clasificación de triángulos. • Enfatice en las clases de triángulos según la longitud de sus lados. • Presente los triángulos y sus alturas, bisectrices, medianas y mediatrices en diferentes posiciones para que los estudiantes los identifiquen en diferentes lugares del centro educativo, • Es importante el uso de los instrumentos para su construcción e identificación de las rectas notables en un triángulo. • Indique las características de triángulos congruentes respecto a la longitud de los lados y la amplitud de los ángulos y muéstreles con diseños o dibujos que, tanto en arquitectura como en ingeniería, se aplica continuamente este tipo de congruencia al diseñar estructuras triangulares que serán duplicados exactos de una estructura original.	• Construye triángulos dadas algunas medidas de ángulos o lados. • Dibuja sus rectas y puntos notables como estrategia para plantear y resolver problemas de perímetros y áreas de triángulos, cuadriláteros y circunferencias, comunica procesos y estrategias utilizadas.	**Actividad:** resuelve problemas que conducen al cálculo de perímetros y áreas de polígonos regulares e irregulares. **Técnica:** observación

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Geometría y medida	• Definir e identificar la congruencia de dos triángulos de acuerdo a criterios que consideran las medidas de sus lados y/o sus ángulos. • Definir, clasificar y analizar los elementos de los cuadriláteros. • Conocer las posiciones de una recta y una circunferencia. • Dibujar los cuerpos redondos que se obtienen de girar figuras y calcula su generatriz. • Calcular el área de triángulos en la resolución de problemas. • Calcular el área de polígonos regulares por descomposición en triángulos. • Calcular el área de polígonos regulares e irregulares por descomposición en triángulos.	• Pida a los y las estudiantes que nombren algunos sólidos geométricos que recuerden de cursos anteriores. Indique que los representen y que nombren algunas de sus características. Luego solicite que mencionen algunos sólidos que observen a su alrededor. Como actividad motivadora invite a los y las estudiantes a construir con regla y compás polígonos regulares como: pentágonos, hexágonos y octágonos. • Utilice las construcciones anteriores para mostrar cómo los polígonos regulares se pueden descomponer en triángulos isósceles congruentes, en donde n es el número de lados del polígono. • Así que es fácil inferir que el área de los polígonos regulares es la suma de las áreas de los triángulos en los cuales se descompuso el polígono.	• Resuelve problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas de polígonos regulares e irregulares. • Aplica como estrategia de solución la descomposición en triángulos y/o la de cuerpos geométricos. • Explica los procesos de solución empleados en la construcción de polígonos regulares y cuerpos geométricos; juzga la validez de resultados.	**Instrumento:** pruebas escritas de base estructurada **Libro del estudiante:** evaluación de la unidad

Recursos: Materiales del medio, Tic, Texto Guía, Cuaderno de trabajo.

Bibliografía: Mason, J., Burton, L. (1992), Stacey Pensar matemáticamente Madrid: Ediciones/Labor.

Ampliación conceptual

Muchas de las estructuras que vemos a nuestro alrededor están formadas a partir de triángulos unidos entre sí. ¿Qué clase de triángulo es el más usado en dichas estructuras?

El triángulo es la figura más utilizada en la construcción de estructuras porque ofrece rigidez y no se deforma con facilidad. Dentro de los triángulos más utilizados para estos fines, el que ofrece mayor resistencia es aquel cuyos lados son congruentes y cuyos tres ángulos tienen la misma medida.

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Recorte varias copias de triángulos y entregue a los y las estudiantes para que recuerden sus elementos y los clasifiquen según criterios determinados por ellos. Procure incluir triángulos de todas las clases.

b. Revise la clasificación hecha por los estudiantes y realice los ajustes necesarios. Haga cómo las clasificaciones pueden variar si se cambia el patrón de clasificación. Por ejemplo, según sus lados los triángulos son equiláteros, isósceles o escalenos, pero según sus ángulos son rectángulos, acutángulos u obtusángulos.

c. Recuerde a los estudiantes la definición de triángulo equilátero, y triángulo isósceles y algunas de sus características y propiedades. Para realizar la construcción de los triángulos es necesario repasar los pasos para su construcción. Posteriormente, pida que verifiquen las propiedades y características en su elaboración, haciendo uso del compás y la regla. Repase con los estudiantes la definición de triángulo escaleno. Una vez que conozcan los pasos para su construcción, proponga que busquen una estrategia para verificar la desigualdad triangular, sin necesidad de medir la longitud de los lados del triángulo.

1 Triángulos

Explora

Observa el triángulo de la Figura 1

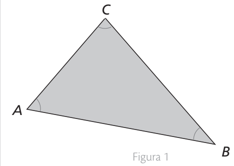


Figura 1

- Describe los elementos básicos que definen este triángulo.

En el $\triangle ABC$ se identifican los siguientes elementos.

- Los puntos de intersección *A*, *B* y *C* de los segmentos son los **vértices** del triángulo.
- Los tres **segmentos** son los lados del triángulo: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.
- Cada par de lados determinan los **ángulos interiores** $\measuredangle A$, $\measuredangle B$ y $\measuredangle C$.

El **triángulo** *ABC* es el conjunto formado por tres segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ que unen, respectivamente, tres puntos *A*, *B*, *C* no colineales. Estos dividen el plano en tres subconjuntos: el interior del triángulo, el exterior del triángulo y el mismo triángulo.

1.1 Clasificación de triángulos

Los triángulos pueden clasificarse según la longitud de sus lados o según la medida de sus ángulos, como se observa en la Tabla 1.

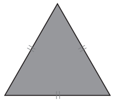
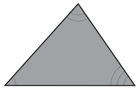
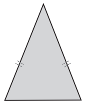
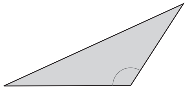
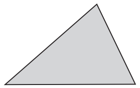
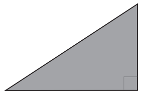
Clasificación de triángulos	
Según la longitud de sus lados	Según la amplitud de sus ángulos
Equilátero: sus tres lados son congruentes.  Figura 2	**Acutángulo:** sus tres ángulos son agudos.  Figura 3
Isósceles: tiene un par de lados congruentes.  Figura 4	**Obtusángulo:** tiene un ángulo obtuso.  Figura 5
Escaleno: sus tres lados tienen diferente longitud.  Figura 6	**Rectángulo:** uno de sus ángulos es recto.  Figura 7

Tabla 1

Ejemplo 1

El triángulo de la Figura 8 tiene sus tres ángulos congruentes.

Ese tipo de triángulo se conoce como **equiangular.**

Todo triángulo equiangular es acutángulo.

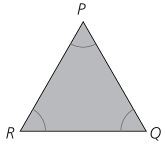


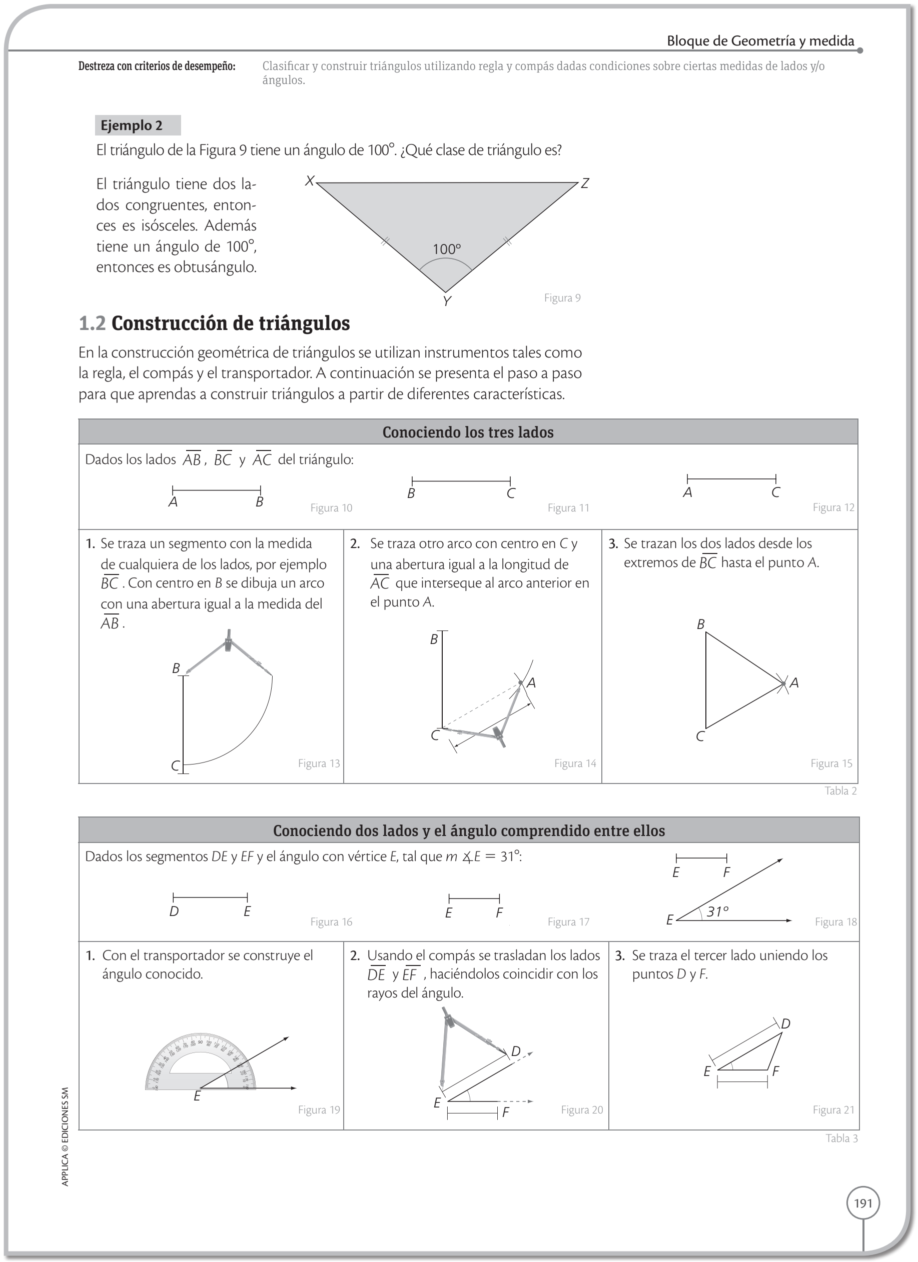
Figura 8

CULTURA del Buen Vivir

La armonía

Vivir en armonía es poder establecer un equilibrio entre lo material y lo espiritual. Es tener un balance exacto entre los diferentes aspectos de la vida humana.

- Para los platónicos, el triángulo equilátero estaba asociado con esta noción de la armonía . ¿Por qué crees que eligieron esta figura?



Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar y construir triángulos utilizando regla y compás dadas condiciones sobre ciertas medidas de lados y/o ángulos.

Ejemplo 2

El triángulo de la Figura 9 tiene un ángulo de 100°. ¿Qué clase de triángulo es?

El triángulo tiene dos lados congruentes, entonces es isósceles. Además tiene un ángulo de 100°, entonces es obtusángulo.

X Z 100° Y

Figura 9

1.2 Construcción de triángulos

En la construcción geométrica de triángulos se utilizan instrumentos tales como la regla, el compás y el transportador. A continuación se presenta el paso a paso para que aprendas a construir triángulos a partir de diferentes características.

Conociendo los tres lados		
Dados los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ del triángulo: A B Figura 10	B C Figura 11	A C Figura 12
1. Se traza un segmento con la medida de cualquiera de los lados, por ejemplo $\overline{BC}$. Con centro en *B* se dibuja un arco con una abertura igual a la medida del $\overline{AB}$. Figura 13	2. Se traza otro arco con centro en *C* y una abertura igual a la longitud de $\overline{AC}$ que interseque al arco anterior en el punto *A*. Figura 14	3. Se trazan los dos lados desde los extremos de $\overline{BC}$ hasta el punto *A*. Figura 15

Tabla 2

Conociendo dos lados y el ángulo comprendido entre ellos		
Dados los segmentos *DE* y *EF* y el ángulo con vértice *E*, tal que $m\measuredangle E = 31°$: D E Figura 16	E F Figura 17	E F E 31° Figura 18
1. Con el transportador se construye el ángulo conocido. Figura 19	2. Usando el compás se trasladan los lados $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$, haciéndolos coincidir con los rayos del ángulo. Figura 20	3. Se traza el tercer lado uniendo los puntos *D* y *F*. Figura 21

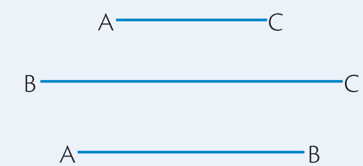
Tabla 3

APPLICA © EDICIONES SM

191

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Construye un triángulo ABC, si se sabe que sus lados AB, BC y AC son los que se muestran en la Figura.



Actividades TIC

Construye un triángulo equilátero de 4 cm con el programa GeoGebra.

• Selecciona el botón Polígono regular y marca dos puntos en el plano cartesiano.

• Cuando aparezca la caja de diálogo, cambia el número 4 (que aparece por defecto) por 3, que es el número de lados que tiene un triángulo.

• Selecciona Movimiento, ubica el cursor en uno de los vértices y arrástralo hasta obtener 4 cm. Al hacerlo, cada uno de los lados del triángulo quedará con esa medida, pues la base de la construcción es un polígono regular.

Actividades colaborativas

Forme grupos de cuatro estudiantes, pídales que resuelvan el ejercicio 11 de la página 199 del texto, además pídeles que intenten dibujar un triángulo de lados 12 cm, 8 cm y 22 cm. ¿Fue posible que lo hagan? Expliquen.

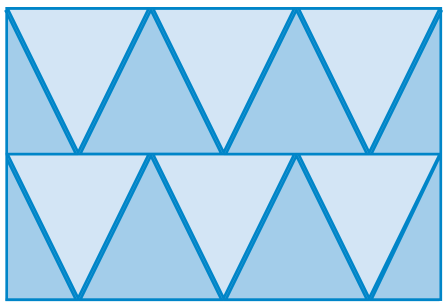
Libro del alumno

Ampliación conceptual

En las industrias del país las cerámicas para piso y pared tiene aplicación el diseño de ritmos modulares según una red de triángulos equiláteros e isósceles.

Con esta aplicación se pueden ir coloreando por procesos especiales los triángulos para diseñar módulos con diferentes ritmos, los cuales son comercializados y exportados.

¿Qué diseños puedes sugerir?



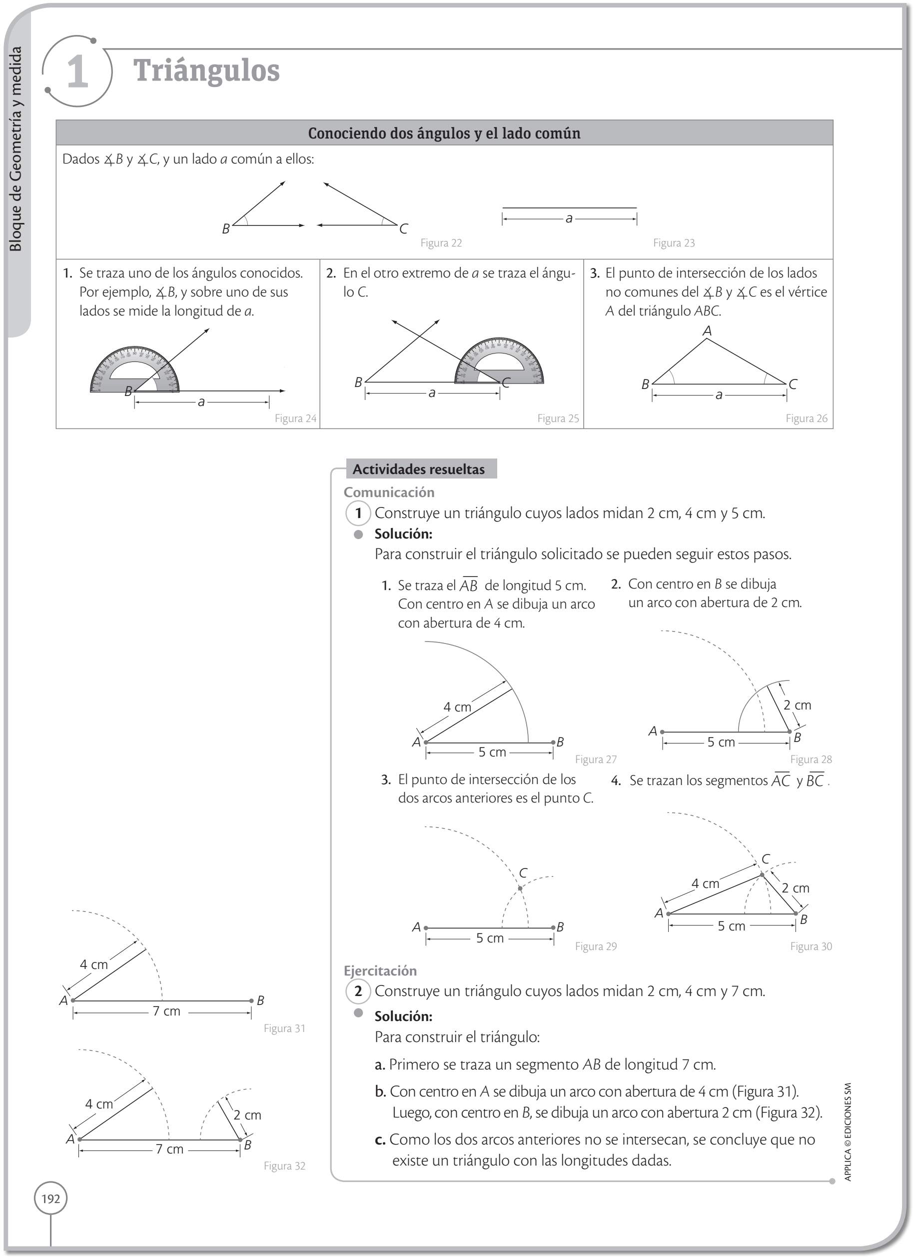
Antes y en la actualidad, ingenieros y científicos trabajan y desarrollan diseños y construcciones de aeronaves que surcarán la estratosfera en viajes intercontinentales cuya forma es básicamente triangular.

Actividades colaborativas

Forme grupos de cuatro estudiantes, pídales que resuelvan:

Traza un triángulo equilátero de lado 3 cm.

Construye un triángulo isósceles cuya base mida 4 cm.



Bloque de Geometría y medida

1 Triángulos

Conociendo dos ángulos y el lado común

Dados ∡*B* y ∡*C*, y un lado *a* común a ellos:

Figura 22 Figura 23

1. Se traza uno de los ángulos conocidos. Por ejemplo, ∡*B*, y sobre uno de sus lados se mide la longitud de *a*. Figura 24
2. En el otro extremo de *a* se traza el ángulo *C*. Figura 25
3. El punto de intersección de los lados no comunes del ∡*B* y ∡*C* es el vértice *A* del triángulo *ABC*. Figura 26

Actividades resueltas

Comunicación

1 Construye un triángulo cuyos lados midan 2 cm, 4 cm y 5 cm.

Solución:

Para construir el triángulo solicitado se pueden seguir estos pasos.

1. Se traza el $\overline{AB}$ de longitud 5 cm. Con centro en *A* se dibuja un arco con abertura de 4 cm. Figura 27
2. Con centro en *B* se dibuja un arco con abertura de 2 cm. Figura 28
3. El punto de intersección de los dos arcos anteriores es el punto *C*. Figura 29
4. Se trazan los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$. Figura 30

Ejercitación

2 Construye un triángulo cuyos lados midan 2 cm, 4 cm y 7 cm.

Solución:

Para construir el triángulo:

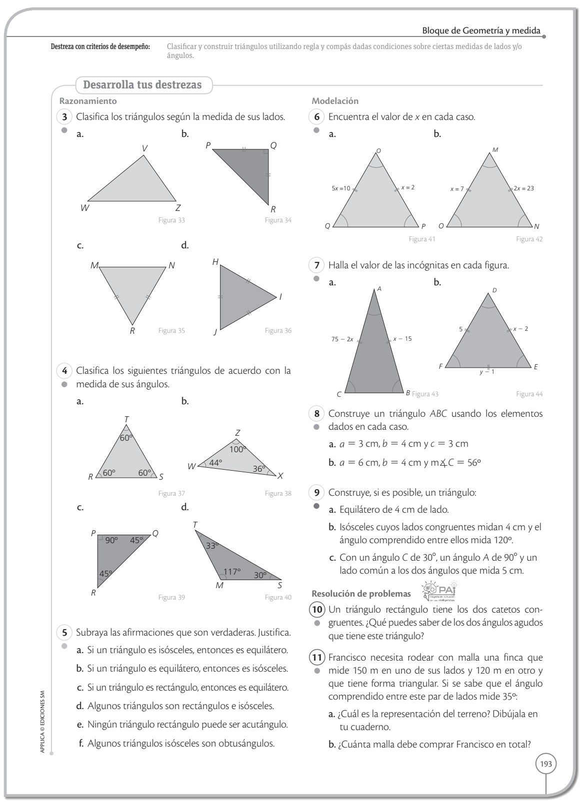
a. Primero se traza un segmento *AB* de longitud 7 cm.

b. Con centro en *A* se dibuja un arco con abertura de 4 cm (Figura 31). Luego, con centro en *B*, se dibuja un arco con abertura 2 cm (Figura 32).

c. Como los dos arcos anteriores no se intersecan, se concluye que no existe un triángulo con las longitudes dadas.

Figura 31 Figura 32

192


Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Clasificar y construir triángulos utilizando regla y compás dadas condiciones sobre ciertas medidas de lados y/o ángulos.

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

3 Clasifica los triángulos según la medida de sus lados.

a. Figura 33 b. Figura 34

c. Figura 35 d. Figura 36

4 Clasifica los siguientes triángulos de acuerdo con la medida de sus ángulos.

a. Figura 37 b. Figura 38

c. Figura 39 d. Figura 40

5 Subraya las afirmaciones que son verdaderas. Justifica.

a. Si un triángulo es isósceles, entonces es equilátero.
b. Si un triángulo es equilátero, entonces es isósceles.
c. Si un triángulo es rectángulo, entonces es equilátero.
d. Algunos triángulos son rectángulos e isósceles.
e. Ningún triángulo rectángulo puede ser acutángulo.
f. Algunos triángulos isósceles son obtusángulos.

Modelación

6 Encuentra el valor de x en cada caso.

a. Figura 41 b. Figura 42

7 Halla el valor de las incógnitas en cada figura.

a. Figura 43 b. Figura 44

8 Construye un triángulo ABC usando los elementos dados en cada caso.

a. $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 3$ cm
b. $a = 6$ cm, $b = 4$ cm y $m\measuredangle C = 56°$

9 Construye, si es posible, un triángulo:

a. Equilátero de 4 cm de lado.
b. Isósceles cuyos lados congruentes midan 4 cm y el ángulo comprendido entre ellos mida 120º.
c. Con un ángulo C de 30°, un ángulo A de 90° y un lado común a los dos ángulos que mida 5 cm.

Resolución de problemas

10 Un triángulo rectángulo tiene los dos catetos congruentes. ¿Qué puedes saber de los dos ángulos agudos que tiene este triángulo?

11 Francisco necesita rodear con malla una finca que mide 150 m en uno de sus lados y 120 m en otro y que tiene forma triangular. Si se sabe que el ángulo comprendido entre este par de lados mide 35º:

a. ¿Cuál es la representación del terreno? Dibújala en tu cuaderno.
b. ¿Cuánta malla debe comprar Francisco en total?

193

APPLICA © EDICIONES SM

Razonamiento

3. **a.** El triángulo *VZW* es escaleno.

b. El triángulo *PQR* es isoscéles.

c. El triángulo *MNR* es isoscéles.

d. El triángulo *HIJ* es equilatero.

4. **a.** El triángulo *TSR* es equiangular.

b. El triángulo *ZXW* es obtusángulo.

c. El triángulo *PQR* es rectángulo.

d. El triángulo *TMS* es obtusángulo.

5. Son verdaderas las afirmaciones: b, d, e, f.

Modelación

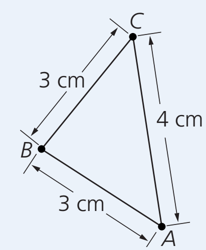
6. **a.** $x = 2$

b. $x = 7$

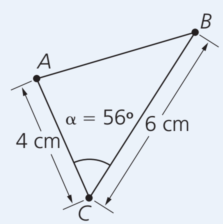
7. **a.** $x = 30$

b. $x = 7, y = 6$

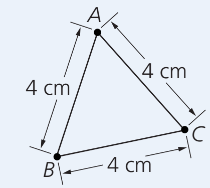
8. **a.**



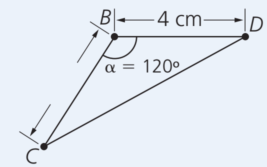
b.



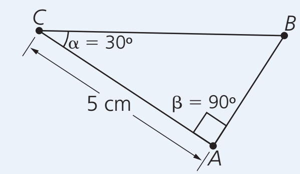
9. **a.**



b.



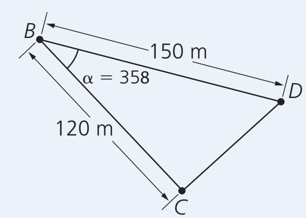
c.



Resolución de problemas

10. Los dos ángulos agudos que tiene este triángulo son congruentes.

11.a.



b. Francisco debe comprar 356 m de malla.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Active los conocimientos sobre ángulos estudiados en el módulo anterior en lo referente a la construcción y clasificación de triángulos.

b. Enfatice en las clases de triángulos según la longitud de sus lados. Presente los triángulos y sus alturas, bisectrices, medianas y mediatrices en diferentes posiciones para que los estudiantes identifiquen en diferentes lugares del centro educativo, hogar y entorno cercano; de esa forma será más efectiva su asimilación y podrán diferenciarlos e identificarlos. Es importante el uso de los instrumentos para su construcción e identificación de las líneas notables en un triángulo. Repase con los estudiantes la definición de todas las líneas notables de un triángulo, una vez que conozcan los pasos para su construcción verifique los puntos donde se intersecan las líneas notables de los triángulos coincidan con la definición de cada una

Actividades TIC

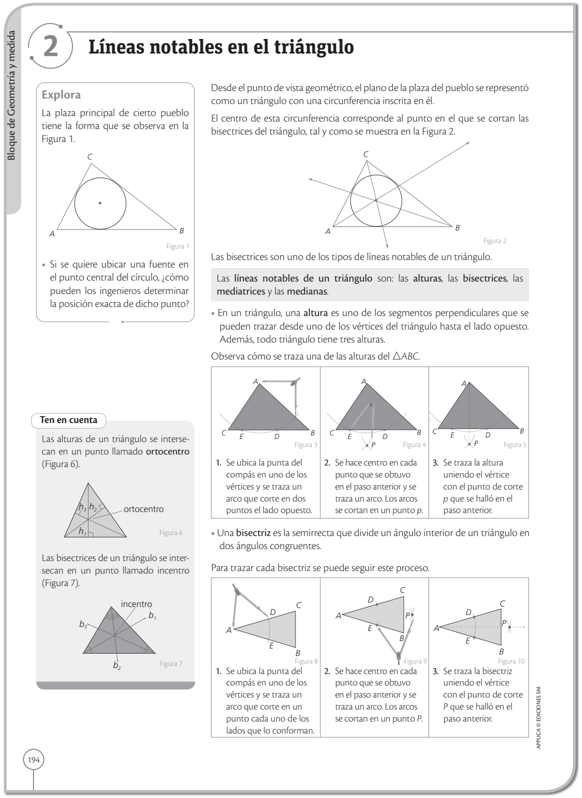
Ingrese al siguiente link

http://web.educastur.princast.es/ies/pravia/carpetas/recursos/mates/anaya1/datos/12/3.sw

Busque cualesquiera de las líneas notables de un triángulo, interactúe y modifique la ubicación de cada elemento, además resuelve los problemas propuestos.

Actividades colaborativas

Forme grupos de cuatro estudiantes, pídales que resuelvan el ejercicio 5 de la página 202 del texto. Para realizar esta actividad los estudiantes deben utilizar materiales apropiados como regla, compás graduador y escuadras de 45 y 60.



Bloque de Geometría y medida

2 Líneas notables en el triángulo

Explora

La plaza principal de cierto pueblo tiene la forma que se observa en la Figura 1.

Figura 1

• Si se quiere ubicar una fuente en el punto central del círculo, ¿cómo pueden los ingenieros determinar la posición exacta de dicho punto?

Desde el punto de vista geométrico, el plano de la plaza del pueblo se representó como un triángulo con una circunferencia inscrita en él.

El centro de esta circunferencia corresponde al punto en el que se cortan las bisectrices del triángulo, tal y como se muestra en la Figura 2.

Figura 2

Las bisectrices son uno de los tipos de líneas notables de un triángulo.

Las **líneas notables de un triángulo** son: las **alturas**, las **bisectrices**, las **mediatrices** y las **medianas**.

• En un triángulo, una **altura** es uno de los segmentos perpendiculares que se pueden trazar desde uno de los vértices del triángulo hasta el lado opuesto. Además, todo triángulo tiene tres alturas.

Observa cómo se traza una de las alturas del $\triangle ABC$.

Figura 3	Figura 4	Figura 5
1. Se ubica la punta del compás en uno de los vértices y se traza un arco que corte en dos puntos el lado opuesto.	2. Se hace centro en cada punto que se obtuvo en el paso anterior y se traza un arco. Los arcos se cortan en un punto *p*.	3. Se traza la altura uniendo el vértice con el punto de corte *p* que se halló en el paso anterior.

• Una **bisectriz** es la semirrecta que divide un ángulo interior de un triángulo en dos ángulos congruentes.

Para trazar cada bisectriz se puede seguir este proceso.

Figura 8	Figura 9	Figura 10
1. Se ubica la punta del compás en uno de los vértices y se traza un arco que corte en un punto cada uno de los lados que lo conforman.	2. Se hace centro en cada punto que se obtuvo en el paso anterior y se traza un arco. Los arcos se cortan en un punto *P*.	3. Se traza la bisectriz uniendo el vértice con el punto de corte *P* que se halló en el paso anterior.

Ten en cuenta

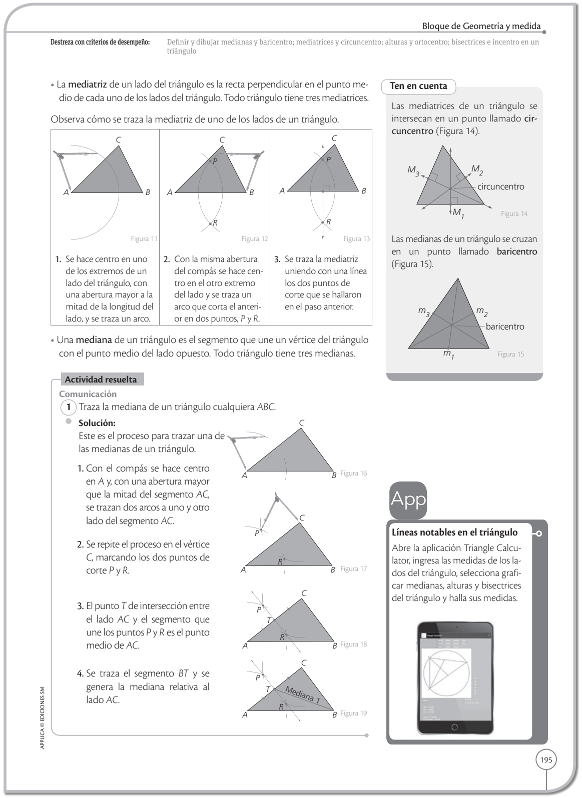
Las alturas de un triángulo se intersecan en un punto llamado **ortocentro** (Figura 6).

Figura 6

Las bisectrices de un triángulo se intersecan en un punto llamado incentro (Figura 7).

Figura 7

194



Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Definir y dibujar medianas y baricentro; mediatrices y circuncentro; alturas y ortocentro; bisectrices e incentro en un triángulo

• La **mediatriz** de un lado del triángulo es la recta perpendicular en el punto medio de cada uno de los lados del triángulo. Todo triángulo tiene tres mediatrices.

Observa cómo se traza la mediatriz de uno de los lados de un triángulo.

Figura 11	Figura 12	Figura 13
1. Se hace centro en uno de los extremos de un lado del triángulo, con una abertura mayor a la mitad de la longitud del lado, y se traza un arco.	2. Con la misma abertura del compás se hace centro en el otro extremo del lado y se traza un arco que corta el anterior en dos puntos, *P* y *R*.	3. Se traza la mediatriz uniendo con una línea los dos puntos de corte que se hallaron en el paso anterior.

• Una **mediana** de un triángulo es el segmento que une un vértice del triángulo con el punto medio del lado opuesto. Todo triángulo tiene tres medianas.

Actividad resuelta

Comunicación

1 Traza la mediana de un triángulo cualquiera *ABC*.

Solución:

Este es el proceso para trazar una de las medianas de un triángulo.

1. Con el compás se hace centro en *A* y, con una abertura mayor que la mitad del segmento *AC*, se trazan dos arcos a uno y otro lado del segmento *AC*.
2. Se repite el proceso en el vértice *C*, marcando los dos puntos de corte *P* y *R*.
3. El punto *T* de intersección entre el lado *AC* y el segmento que une los puntos *P* y *R* es el punto medio de *AC*.
4. Se traza el segmento *BT* y se genera la mediana relativa al lado *AC*.

Figura 16 · Figura 17 · Figura 18 · Figura 19

Ten en cuenta

Las mediatrices de un triángulo se intersecan en un punto llamado **circuncentro** (Figura 14).

Figura 14

Las medianas de un triángulo se cruzan en un punto llamado **baricentro** (Figura 15).

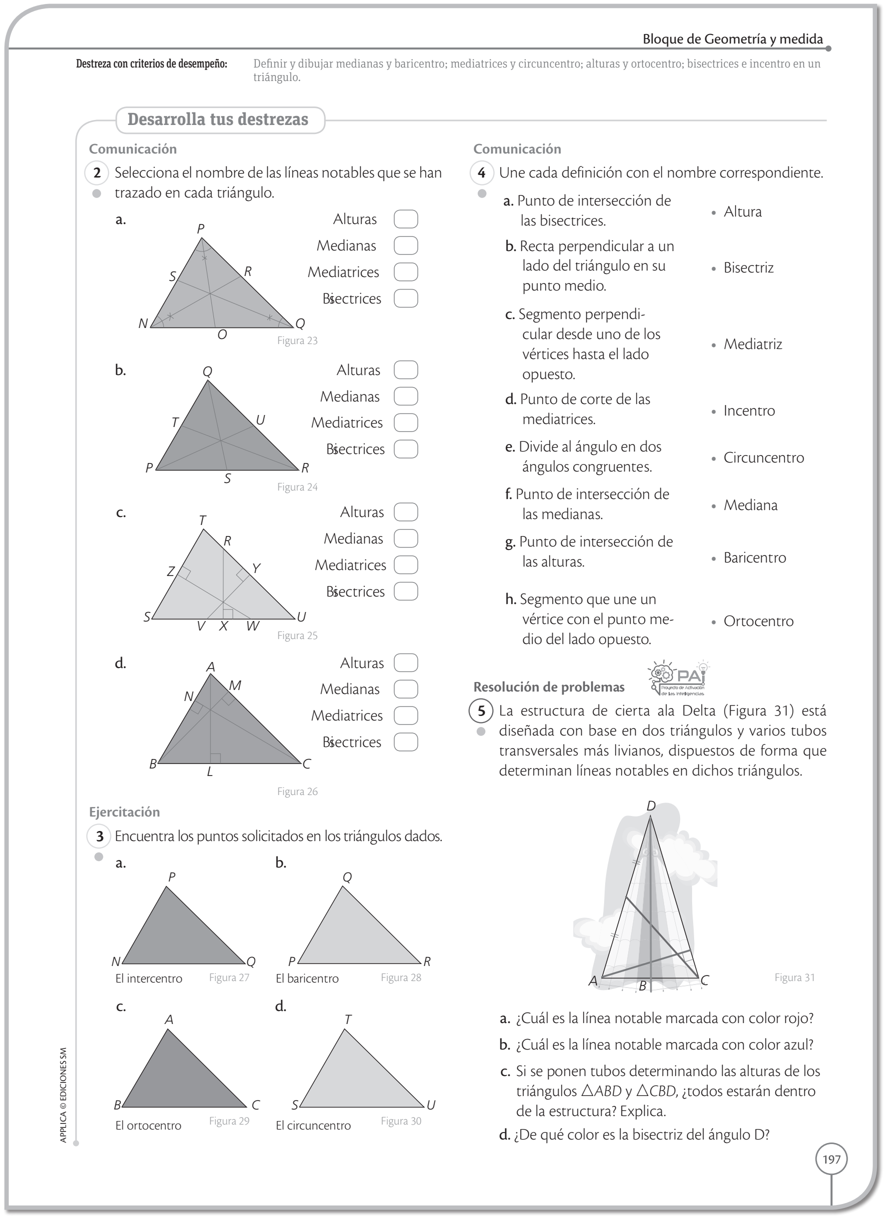
Figura 15

App

Líneas notables en el triángulo

Abre la aplicación Triangle Calculator, ingresa las medidas de los lados del triángulo, selecciona graficar medianas, alturas y bisectrices del triángulo y halla sus medidas.

195



Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Definir y dibujar medianas y baricentro; mediatrices y circuncentro; alturas y ortocentro; bisectrices e incentro en un triángulo.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2. Selecciona el nombre de las líneas notables que se han trazado en cada triángulo.

a. Alturas ☐ Medianas ☐ Mediatrices ☐ Bisectrices ☐ (Figura 23)

b. Alturas ☐ Medianas ☐ Mediatrices ☐ Bisectrices ☐ (Figura 24)

c. Alturas ☐ Medianas ☐ Mediatrices ☐ Bisectrices ☐ (Figura 25)

d. Alturas ☐ Medianas ☐ Mediatrices ☐ Bisectrices ☐ (Figura 26)

Ejercitación

3. Encuentra los puntos solicitados en los triángulos dados.

a. El intercentro (Figura 27)

b. El baricentro (Figura 28)

c. El ortocentro (Figura 29)

d. El circuncentro (Figura 30)

Comunicación

4. Une cada definición con el nombre correspondiente.

a. Punto de intersección de las bisectrices.
b. Recta perpendicular a un lado del triángulo en su punto medio.
c. Segmento perpendicular desde uno de los vértices hasta el lado opuesto.
d. Punto de corte de las mediatrices.
e. Divide al ángulo en dos ángulos congruentes.
f. Punto de intersección de las medianas.
g. Punto de intersección de las alturas.
h. Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.

• Altura • Bisectriz • Mediatriz • Incentro • Circuncentro • Mediana • Baricentro • Ortocentro

Resolución de problemas

5. La estructura de cierta ala Delta (Figura 31) está diseñada con base en dos triángulos y varios tubos transversales más livianos, dispuestos de forma que determinan líneas notables en dichos triángulos.

Figura 31

a. ¿Cuál es la línea notable marcada con color rojo?
b. ¿Cuál es la línea notable marcada con color azul?
c. Si se ponen tubos determinando las alturas de los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle CBD$, ¿todos estarán dentro de la estructura? Explica.
d. ¿De qué color es la bisectriz del ángulo D?

APPLICA © EDICIONES SM

197

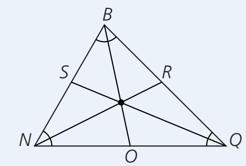
Comunicación

2. **a.** Bisectrices. **b.** Medianas.

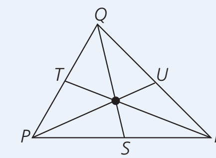
c. Mediatrices. **d.** Alturas.

Ejercitación

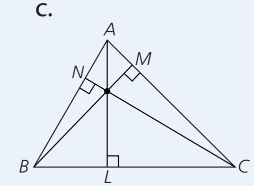
3. **a.**



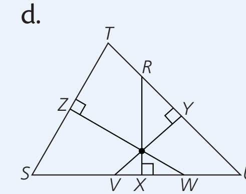
b.



c.



d.



4. **a.** Incentro **b.** Mediatriz

c. Altura **d.** Circuncentro

e. Bisectriz **f.** Baricentro

g. Ortocentro **h.** Mediana

Resolución de problemas

5. **a.** La línea marcada con rojo es la altura del triángulo *ACD*.

b. La línea marcada con azul es la mediana del triángulo *ACD*.

c. Sí, todas las alturas estarán dentro de la estructura.

d. La bisectriz del ángulo *D* es verde.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Propiedades de los triangulos

1. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°.
2. Todo triángulo equilátero es equiángulo, es decir, las medidas de sus ángulos internos son iguales, en este caso cada ángulo mide 60°.
3. Si dos lados de un triángulo tienen igual medida, entonces los ángulos opuestos a estos lados congruentes, también son de igual medida.
4. En un triángulo a mayor lado se opone mayor ángulo.
5. El valor de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes.
6. Un lado de un triángulo es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

$$a < b + c \quad ; \quad a > b - c$$

Un triángulo muy utilizado en trigonometría es el triángulo rectángulo, en él se hace el estudio de la relación entre sus lados mediante el teorema de Pitágoras.

Teorema de pitagoras

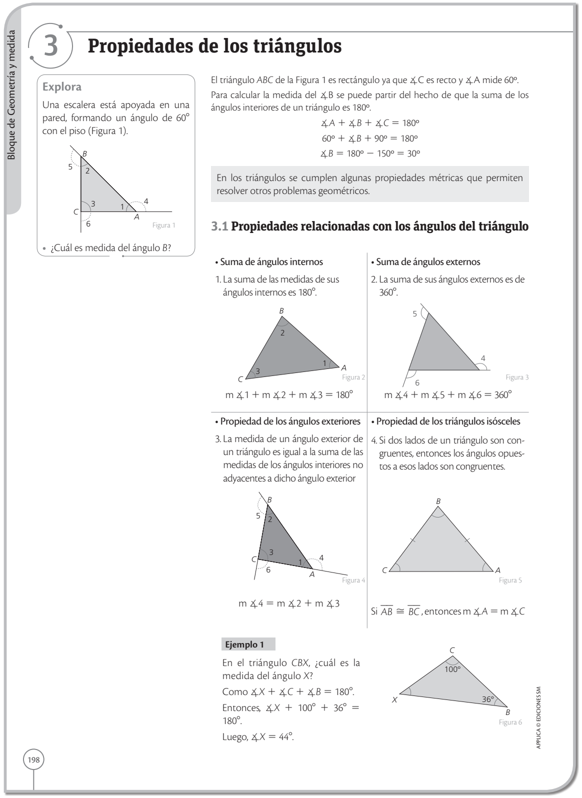
Pitágoras enunció el famoso teorema que lleva su nombre y que relaciona los lados de un triángulo rectángulo.
Este teorema plantea:
El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.

Actividades colaborativas

Forme grupos de cuatro estudiantes, pídales que verifiquen si pueden construir el triángulo cuyos lados son: 8cm, 6cm y 4 cm. Además que midan los ángulos para comprobar la propiedad que dice "a mayor lado mayor ángulo".

Actividades TIC

Construye dos ángulos exteriores e interiores con GeoGebra, te explica en la pág. Matematics


Bloque de Geometría y medida

3 Propiedades de los triángulos

Explora

Una escalera está apoyada en una pared, formando un ángulo de 60° con el piso (Figura 1).

Figura 1

• ¿Cuál es medida del ángulo B?

El triángulo ABC de la Figura 1 es rectángulo ya que $\measuredangle C$ es recto y $\measuredangle A$ mide 60°. Para calcular la medida del $\measuredangle B$ se puede partir del hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

$$\measuredangle A + \measuredangle B + \measuredangle C = 180°$$
$$60° + \measuredangle B + 90° = 180°$$
$$\measuredangle B = 180° - 150° = 30°$$

En los triángulos se cumplen algunas propiedades métricas que permiten resolver otros problemas geométricos.

3.1 Propiedades relacionadas con los ángulos del triángulo

• Suma de ángulos internos

1. La suma de las medidas de sus ángulos internos es 180°.

Figura 2

$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 + m\measuredangle 3 = 180°$

• Suma de ángulos externos

2. La suma de sus ángulos externos es de 360°.

Figura 3

$m\measuredangle 4 + m\measuredangle 5 + m\measuredangle 6 = 360°$

• Propiedad de los ángulos exteriores

3. La medida de un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes a dicho ángulo exterior

Figura 4

$m\measuredangle 4 = m\measuredangle 2 + m\measuredangle 3$

• Propiedad de los triángulos isósceles

4. Si dos lados de un triángulo son congruentes, entonces los ángulos opuestos a esos lados son congruentes.

Figura 5

Si $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, entonces $m\measuredangle A = m\measuredangle C$

Ejemplo 1

En el triángulo CBX, ¿cuál es la medida del ángulo X?

Como $\measuredangle X + \measuredangle C + \measuredangle B = 180°$.

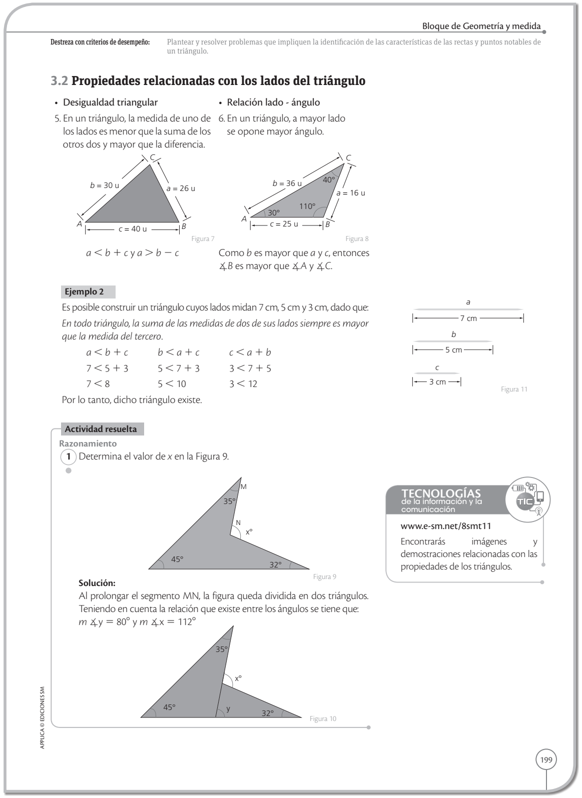
Entonces, $\measuredangle X + 100° + 36° = 180°$.

Luego, $\measuredangle X = 44°$.

Figura 6

APPLICA © EDICIONES SM

198


Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Plantear y resolver problemas que impliquen la identificación de las características de las rectas y puntos notables de un triángulo.

3.2 Propiedades relacionadas con los lados del triángulo

• Desigualdad triangular

5. En un triángulo, la medida de uno de los lados es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia.

Figura 7

$a < b + c$ y $a > b - c$

• Relación lado - ángulo

6. En un triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.

Figura 8

Como b es mayor que a y c, entonces $\measuredangle B$ es mayor que $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$.

Ejemplo 2

Es posible construir un triángulo cuyos lados midan 7 cm, 5 cm y 3 cm, dado que:

En todo triángulo, la suma de las medidas de dos de sus lados siempre es mayor que la medida del tercero.

$a < b + c$	$b < a + c$	$c < a + b$
$7 < 5 + 3$	$5 < 7 + 3$	$3 < 7 + 5$
$7 < 8$	$5 < 10$	$3 < 12$

Por lo tanto, dicho triángulo existe.

Figura 11

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Determina el valor de x en la Figura 9.

Figura 9

Solución:

Al prolongar el segmento MN, la figura queda dividida en dos triángulos. Teniendo en cuenta la relación que existe entre los ángulos se tiene que: $m\measuredangle y = 80°$ y $m\measuredangle x = 112°$

Figura 10

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt11

Encontrarás imágenes y demostraciones relacionadas con las propiedades de los triángulos.

APPLICA © EDICIONES SM

199

Destreza con criterios de desempeño: Resolver problemas que impliquen la identificación de las características de las rectas y puntos notables de un triángulo.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Halla el valor de x en cada caso.

a.

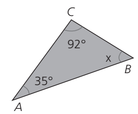


Figura 12

b.

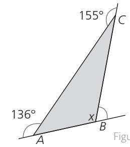


Figura 13

c.

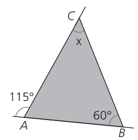


Figura 14

d.

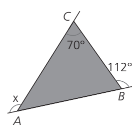


Figura 15

e.

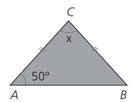


Figura 16

f.

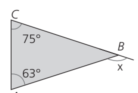


Figura 17

3 Encuentra la medida del segmento BD en la Figura 18, Si el ángulo D es congruente con el ángulo C del Triángulo BCD

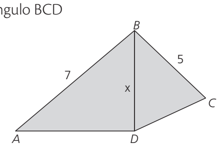


Figura 18

4 Halla el valor de x en la Figura 19

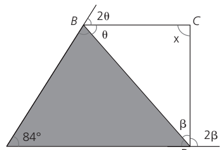


Figura 19

Razonamiento

5 Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

a. En el triángulo formado por los segmentos $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 5$ cm, el ángulo con mayor apertura es el opuesto al lado b. ( )

b. Es posible construir un triángulo cuyos lados midan 8 cm, 3 cm y 7 cm. ( )

c. En un triángulo, los ángulos interiores pueden medir 45º, 32º y 50º. ( )

d. Es posible contruir un triángulo cuyos lados midan 5 cm, 11 cm y 6 cm. ( )

e. Los ángulos exteriores de un triángulo miden 120º, 100º y 110º respectivamente. ( )

6 Calcula la suma de todos los ángulos x, y, z, w, u y v a partir de la información de la Figura 20

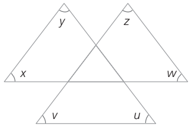


Figura 20

Resolución de problemas

7 En el triangulo ABC que se muestra en la Figura 21, el ángulo A mide 58°. ¿Cuánto mide el ángulo BDC, donde D es el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos B y C?

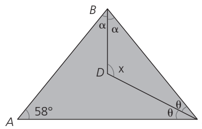


Figura 21

8 El ángulo B de un triangulo ABC, que se muestra en la Figura 22, mide 40°. ¿Cuánto mide el ángulo AEC donde E es el punto de intersección de las bisectrices del ángulo interior A y el ángulo exterior C?

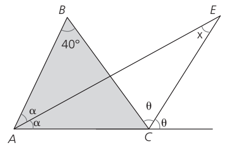


Figura 22

Ejercitación

2. a. $x = 53°$

b. $x = 69°$

c. $x = 55°$

d. $x = 138°$

e. $x = 80°$

f. $x = 138°$

3. $x = 5$

4. $x = 92°$

Ejercitación

5. a. F b. V c. F

d. F e. F

6. $x + y + w + u + v = 360°$

Resolución de problemas

7. El ángulo BDC mide 119°.

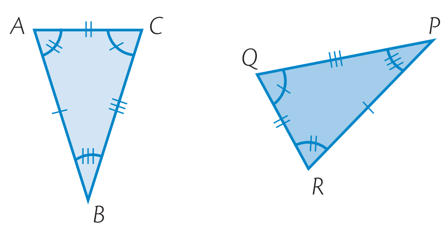
8. El ángulo AEC mide 20°.

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Los estudiantes deben reconocer cuándo dos o más figuras son congruentes. Pregúnteles a cerca de las características de figuras congruentes e indique que señalen elementos de su entorno que cumplen esta condición.

b. Explique a los estudiantes que para comprobar que dos o más figuras son congruentes deben tener en cuenta, Indique las características de los triángulos respecto a la longitud de los lados y la amplitud de los ángulos y muéstreles con diseños o dibujos que tanto en arquitectura como en ingeniería se aplica continuamente este tipo de congruencia al diseñar estructuras triangulares que serán duplicados exactos de una estructura original. Presente los diferentes casos de congruencia que se ilustran en la página del libro: LAL; ALA; LLL. Indique las características de cada uno de esos criterios. Muestre representaciones gráficas.

Se establece la relación de congruencia entre parejas de lados y parejas de ángulos correspondientes.



$\overline{AB} \cong \overline{RP}$ $\measuredangle A \cong R$
$\overline{BC} \cong \overline{PQ}$ $\measuredangle B \cong P$
$\overline{AC} \cong \overline{RQ}$ $\measuredangle C \cong Q$

4 Triángulos congruentes

Explora

El uso de rampas en deportes extremos es cada vez más común. Existen rampas cuya inclinación puede llegar a los 80°, especialmente en el *patinaje*.

En la Figura 1 se observa que los triángulos laterales de las rampas son congruentes.

La congruencia entre figuras consiste en la igualdad de forma y tamaño. Para ello se comparan lados y ángulos correspondientes.

Por lo tanto, al analizar los triángulos laterales de las rampas de *patinaje* que se muestran en la Figura 1, se tiene que:

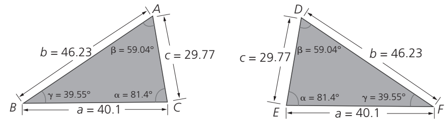


Figura 1

Para garantizar que los triángulos son congruentes se debe comprobar que los lados y los ángulos correspondientes tienen la misma medida. Entonces, según la Figura 2, se concluye que:

$\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle F$, $\measuredangle C \cong \measuredangle E$

$\overline{AB} \cong \overline{DF}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DE}$

Entonces se concluye que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes.

Dos triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son **congruentes** si los lados correspondientes entre ellos son congruentes y los ángulos correspondientes también lo son.

Ejemplo 1

Los triángulos MLR y UST de la Figura 2 son congruentes porque:

Sus lados son congruentes:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$

y sus ángulos son congruentes:

$\measuredangle A \cong \measuredangle D$, $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, $\measuredangle C \cong \measuredangle F$

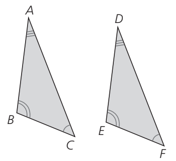


Figura 2

Ten en cuenta

La congruencia es un concepto importante dentro de la geometría y se remonta a unos 3 000 años a. C. en el antiguo Egipto, donde era necesario para medir predios agrarios (para realizar trueques) y para la construcción de pirámides y otros monumentos.

Ejemplo 2

¿Qué se puede deducir de la figura 3?

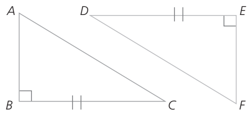


Figura 3

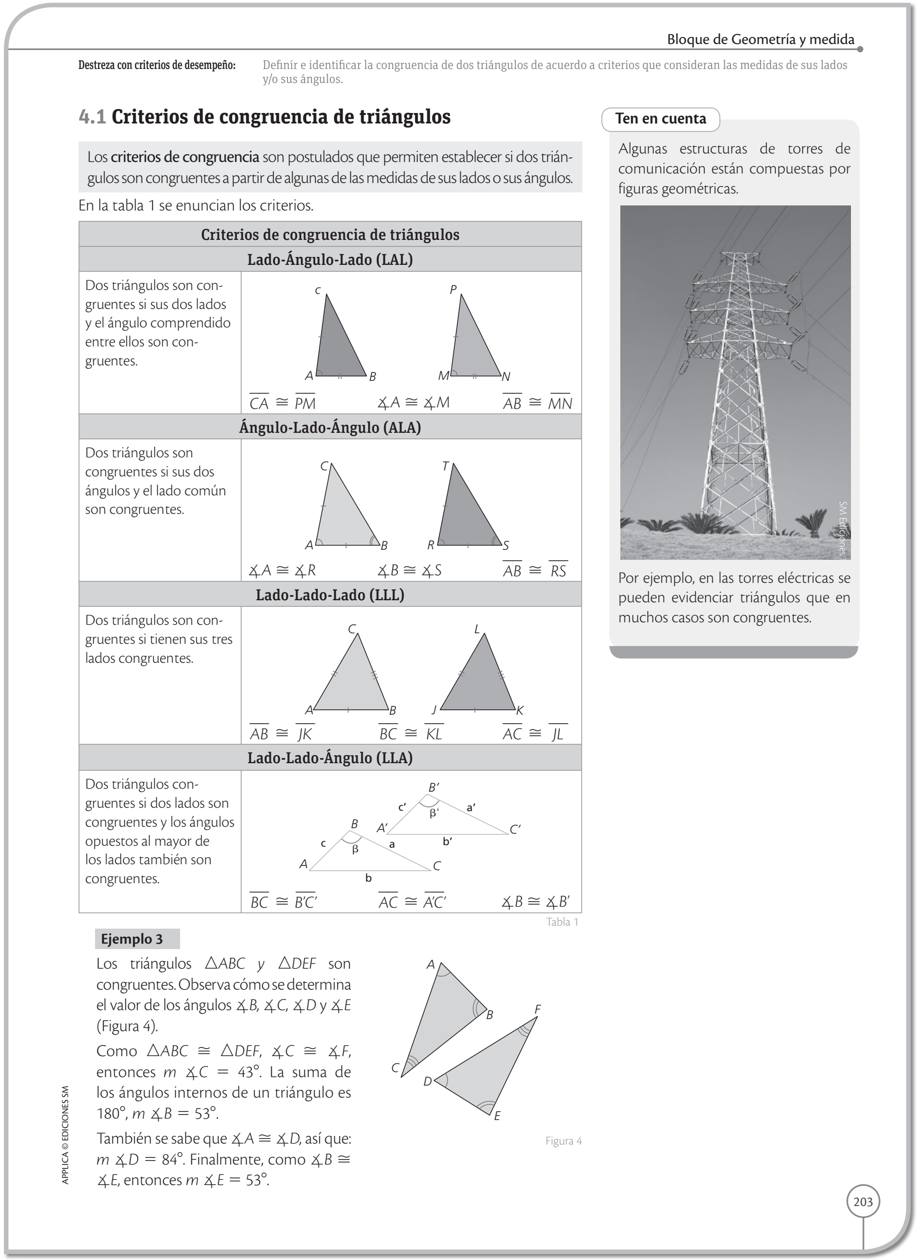
La congruencia se simboliza con ≅, de la siguiente manera:

$BC \cong DE$, $AB \cong EF$ y $AC \cong DF$

Se observa que los ángulos que corresponden a "B" y "E" forman una perpendicular y por ende miden 90°. Si se supone que el ángulo "A", que es congruente con el ángulo "F", mide 60°, entonces obtenemos la medida de los ángulos faltantes:

$$x = 180° - (90° + 60°)$$
$$x = 30°$$

Es decir, la medida de los ángulos "C" y "D", que son congruentes, es 30°.



Destreza con criterios de desempeño: Definir e identificar la congruencia de dos triángulos de acuerdo a criterios que consideran las medidas de sus lados y/o sus ángulos.

4.1 Criterios de congruencia de triángulos

Los **criterios de congruencia** son postulados que permiten establecer si dos triángulos son congruentes a partir de algunas de las medidas de sus lados o sus ángulos.

En la tabla 1 se enuncian los criterios.

Criterios de congruencia de triángulos	
Lado-Ángulo-Lado (LAL)	
Dos triángulos son congruentes si sus dos lados y el ángulo comprendido entre ellos son congruentes.	$\overline{CA} \cong \overline{PM}$ $\measuredangle A \cong \measuredangle M$ $\overline{AB} \cong \overline{MN}$
Ángulo-Lado-Ángulo (ALA)	
Dos triángulos son congruentes si sus dos ángulos y el lado común son congruentes.	$\measuredangle A \cong \measuredangle R$ $\measuredangle B \cong \measuredangle S$ $\overline{AB} \cong \overline{RS}$
Lado-Lado-Lado (LLL)	
Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados congruentes.	$\overline{AB} \cong \overline{JK}$ $\overline{BC} \cong \overline{KL}$ $\overline{AC} \cong \overline{JL}$
Lado-Lado-Ángulo (LLA)	
Dos triángulos congruentes si dos lados son congruentes y los ángulos opuestos al mayor de los lados también son congruentes.	$\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ $\measuredangle B \cong \measuredangle B'$

Tabla 1

Ejemplo 3

Los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ son congruentes. Observa cómo se determina el valor de los ángulos $\measuredangle B$, $\measuredangle C$, $\measuredangle D$ y $\measuredangle E$ (Figura 4).

Como $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, $\measuredangle C \cong \measuredangle F$, entonces $m\measuredangle C = 43°$. La suma de los ángulos internos de un triángulo es $180°$, $m\measuredangle B = 53°$.

También se sabe que $\measuredangle A \cong \measuredangle D$, así que: $m\measuredangle D = 84°$. Finalmente, como $\measuredangle B \cong \measuredangle E$, entonces $m\measuredangle E = 53°$.

Figura 4

Ten en cuenta

Algunas estructuras de torres de comunicación están compuestas por figuras geométricas.

Por ejemplo, en las torres eléctricas se pueden evidenciar triángulos que en muchos casos son congruentes.

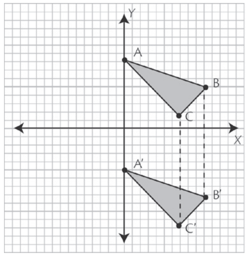
Ampliación conceptual

Congruencia de triángulos

Para obtener un triángulo congruente a otro dado, se emplean los movimientos del plano:

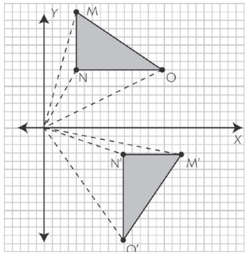
Traslación

Al trasladar el triángulo ABC se obtiene el triángulo A´B´C´ congruente



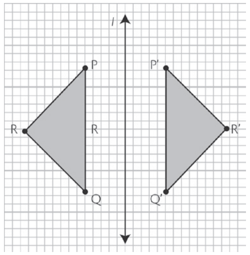
Rotación

Al rotar el triángulo MNO se obtiene el triángulo M´N´O´ congruente.



Reflexión

Al reflejar el triángulo PQR se obtiene el triángulo P´Q´R´ congruente.

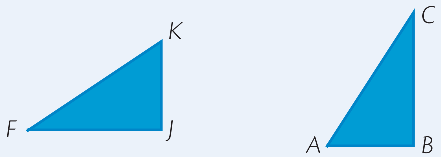


Libro del alumno

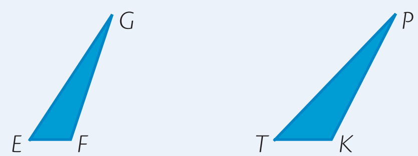
Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Identifica las parejas de triángulos congruentes.

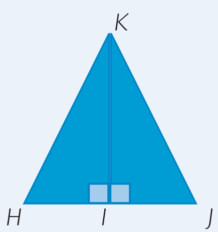
1.



2.

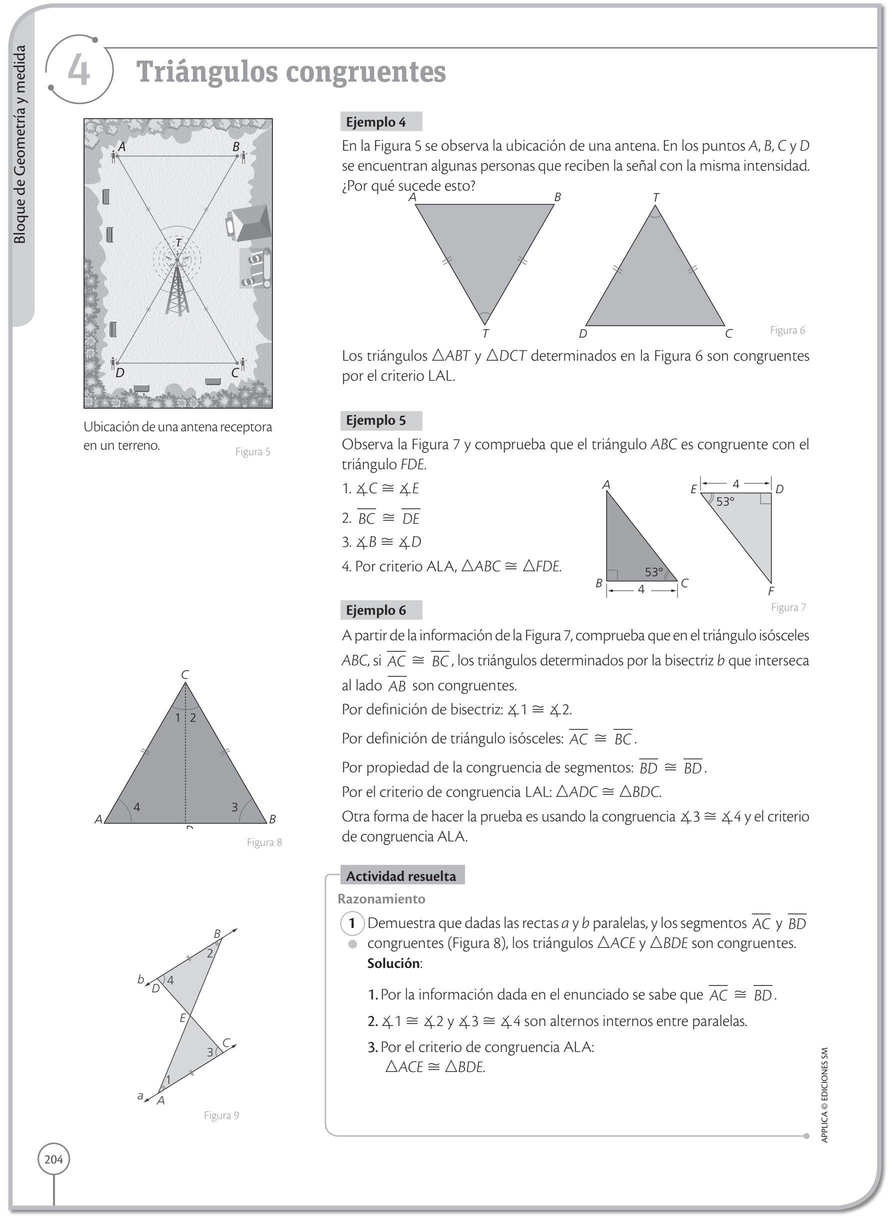


3.



Actividades colaborativas

Forma grupos de trabajo y propón que resuelvan el ejercicio 6 de la pág.209.



4 Triángulos congruentes

Ubicación de una antena receptora en un terreno. Figura 5

Ejemplo 4

En la Figura 5 se observa la ubicación de una antena. En los puntos *A*, *B*, *C* y *D* se encuentran algunas personas que reciben la señal con la misma intensidad. ¿Por qué sucede esto?

Figura 6

Los triángulos $\triangle ABT$ y $\triangle DCT$ determinados en la Figura 6 son congruentes por el criterio LAL.

Ejemplo 5

Observa la Figura 7 y comprueba que el triángulo *ABC* es congruente con el triángulo *FDE*.

1. $\measuredangle C \cong \measuredangle E$
2. $\overline{BC} \cong \overline{DE}$
3. $\measuredangle B \cong \measuredangle D$
4. Por criterio ALA, $\triangle ABC \cong \triangle FDE$.

Figura 7

Ejemplo 6

A partir de la información de la Figura 7, comprueba que en el triángulo isósceles *ABC*, si $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, los triángulos determinados por la bisectriz *b* que interseca al lado $\overline{AB}$ son congruentes.

Por definición de bisectriz: $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$.

Por definición de triángulo isósceles: $\overline{AC} \cong \overline{BC}$.

Por propiedad de la congruencia de segmentos: $\overline{BD} \cong \overline{BD}$.

Por el criterio de congruencia LAL: $\triangle ADC \cong \triangle BDC$.

Otra forma de hacer la prueba es usando la congruencia $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$ y el criterio de congruencia ALA.

Figura 8

Actividad resuelta

Razonamiento

1. Demuestra que dadas las rectas *a* y *b* paralelas, y los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ congruentes (Figura 8), los triángulos $\triangle ACE$ y $\triangle BDE$ son congruentes.

Solución:

1. Por la información dada en el enunciado se sabe que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$.
2. $\measuredangle 1 \cong \measuredangle 2$ y $\measuredangle 3 \cong \measuredangle 4$ son alternos internos entre paralelas.
3. Por el criterio de congruencia ALA: $\triangle ACE \cong \triangle BDE$.

Figura 9

Destreza con criterios de desempeño: Definir e identificar la congruencia de dos triángulos de acuerdo a criterios que consideran las medidas de sus lados y/o sus ángulos.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Identifica si las parejas de triángulos son congruentes. Escribe cuál de los criterios te permite comprobarlo.

a.

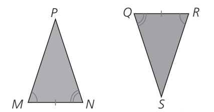


Figura 10

b.

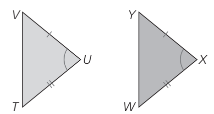


Figura 11

c.

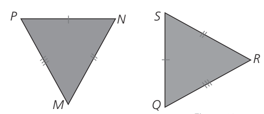


Figura 12

d.

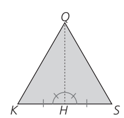


Figura 13

Razonamiento

3 Teniendo en cuenta la información dada en las figuras, decide si los triángulos son congruentes. En caso afirmativo escribe el nombre de cada vértice y da el criterio que justifica la congruencia.

a.

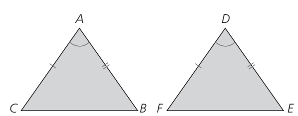


Figura 14

b.

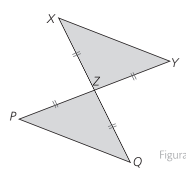


Figura 15

4 Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa.

a. Todos los triángulos equiláteros son congruentes.

b. Un triángulo equilátero puede ser congruente con un triángulo isósceles.

c. Un triángulo acutángulo nunca es congruente con un triángulo obtusángulo.

d. Si $\triangle ABC \cong \triangle PQR$, entonces $\overline{BC} \cong \overline{QR}$.

5 Si $\triangle ABC \cong \triangle FED$, encuentra el valor de x y el valor del ángulo Y en la Figura 15

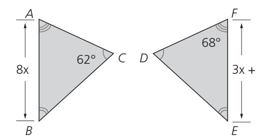


Figura 16

Resolución de problemas

6 Camilo hizo una pintura en la que destacó con color amarillo los triángulos que él creyó congruentes a su original, sin embargo cometió algunos errores.

¿Cuáles son los triángulos que no son congruentes con el original?

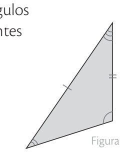


Figura 17

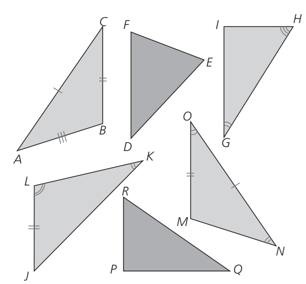


Figura 18

Comunicación

2. a. Triángulos congruentes. Criterio *LAL*.

b. Triángulos congruentes. Criterio *LAL*.

c. Triángulos congruentes. Criterio *LLL*.

d. Triángulos congruentes. Criterio *LAL*.

Razonamiento

3. a. Triángulos congruentes. Criterio *LAL*.

b. Triángulos congruentes. Criterio *LAL*.

4. a. F b. V

c. V d. V

5. $x = 2$, $Y = 50°$

Resolución de problemas

6. Los triángulos *IHG* y *KLJ* no son congruentes con el triángulo original.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

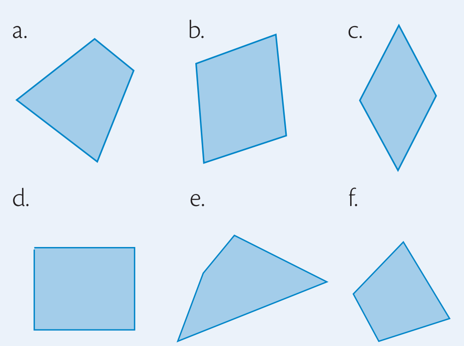
a. Haga un repaso que les permita a los estudiantes recordar algunas figuras geométricas estudiadas en años anteriores: triángulo, cuadrado, rectángulo, etc. Realice una tabla en la cual se resuman sus características principales: número de lados y número de vértices.

b. Recorte varias copias de cuadriláteros y entregue a los estudiantes para que determinen sus características y clasificación, según criterios determinados por ellos. Procure incluir polígonos paralelogramos y no paralelogramos. indique a los estudiantes que se estudiarán las propiedades de las diagonales de un cuadrilátero.

c. Revise las características encontradas por los estudiantes y realice los ajustes necesarios. Haga notar que todos los cuadrilátero tienen los mismos elementos.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Observe los cuadriláteros y determina si son trapezoides, trapecios o paralelogramos.



Bloque de Geometría y medida

5 Cuadriláteros

Explora:

Observa la pintura de la Figura 1 y determina qué tienen en común y qué tienen de diferente las figuras que la componen.

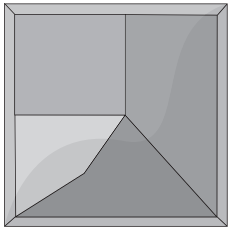
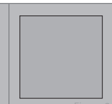
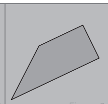
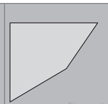
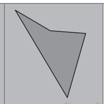


Figura 1

Para identificar las características comunes y las diferencias que existen entre las figuras se pueden analizar los polígonos que componen la figura, según los elementos básicos de los polígonos.

Figuras	 Figura 2	 Figura 3	 Figura 4	 Figura 5
Lados	4	4	4	4
Vértices	4	4	4	4
Diagonales	2	2	2	2

Como se observa en la tabla anterior, el número de elementos de los polígonos siempre es el mismo. Esto se debe a que las cuatro figuras corresponden a cuadriláteros.

Un **cuadrilátero** es la unión de cuatro segmentos de recta que se intersecan únicamente en sus extremos y que a su vez han sido determinados previamente por cuatro puntos en el espacio, de los cuales tres no son colineales.

Además, los cuadriláteros tienen siempre cuatro vértices, dos diagonales y cuatro ángulos internos (Figura 6).

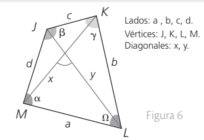


Figura 6

Ten en cuenta

Todos los cuadriláteros existentes a su vez son cuadrángulos, es decir, polígonos que poseen cuatro ángulos.

Elementos de un cuadrilátero

- **Vértices**: Cuentan con cuatro y son los puntos de intersección de los lados que conforman el cuadrilátero.
- **Lados**: Son los cuatro segmentos de recta que se unen consecutivamente por sus extremos. Según su relación, los lados pueden ser opuestos o consecutivos.
- **Diagonales**: Los cuadriláteros poseen dos diagonales, que corresponden a los segmentos de recta cuyos extremos son dos vértices que no son consecutivos.
- **Ángulos interiores**: Son cuatro que están definidos por dos lados consecutivos. La suma de estos ángulos internos siempre es 360°.
- **Ángulos exteriores**: También son cuatro, pero estos son definidos por la prolongación de uno de los lados sobre un vértice y el consecutivo en el mismo vértice.

Ten en cuenta

Los lados opuestos en un cuadrilátero son los que no tienen ningún vértice común.

Los lados consecutivos en un cuadrilátero son los que tienen un vértice común.

Así, para el cuadrilátero de la Figura 6, se tiene:

Lados: a, b, c, d   Vértices: J, K, L, M   Diagonales: x, y

Ángulos interiores: $m\measuredangle J + m\measuredangle K + m\measuredangle L + m\measuredangle M = 360°$

Destreza con criterios de desempeño: Definir, clasificar y analizar los elementos de los cuadriláteros.

Clasificación de los cuadriláteros		
Paralelogramos	**Trapecios**	**Trapezoides**
Sus dos pares de lados opuestos son paralelos. Pueden ser:	Solo dos de sus lados son paralelos. Pueden ser:	No tienen pares de lados opuestos congruentes. Pueden ser:
Cuadrados: todos sus ángulos y sus lados son congruentes.	**Escalenos**: todos sus ángulos tienen diferente medida. (Base menor, Altura, Base mayor)	**Simétricos**: tienen dos pares de lados consecutivos congruentes.
Rectángulos: todos sus ángulos son congruentes.	**Isósceles**: sus lados no paralelos son congruentes. (Base menor, Altura, Base mayor)	**Asimétricos**: ninguno de sus lados es congruente con otro.
Rombos: todos sus lados son congruentes.	**Rectángulos**: tiene dos ángulos interiores rectos. (Base menor, Altura, Base mayor)	
Romboides: los ángulos opuestos y los lados opuestos son congruentes.		

Tabla 1

Ejemplo 1

Clasifica los cuadriláteros de la Figura 7.

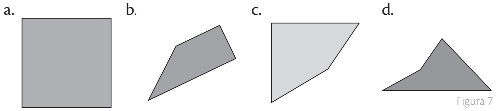
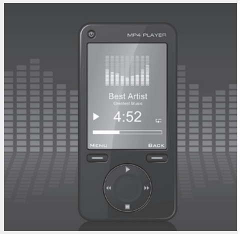


Figura 7

a. Cuadrado b. Trapecio c y d. trapezoides asimétricos

Ten en cuenta

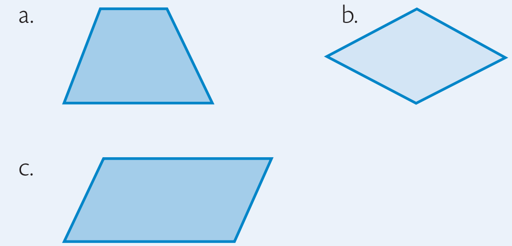
La tecnología ha avanzado a tal punto, que ya se cuenta con reproductores de video cuya pantalla no supera las dos pulgadas.



Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

Con la defición de cuadriláteros pida a los estudiantes que:

Reconozcan y escriban el nombre de los siguientes cuadriláteros.



Actividades TIC

En el link:

http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/4esomatematicasB/cuadriláteros/swf/criterios.swf

Descubre la información y utilice esta herramienta para aplicar en los cuadriláteros.

Actividades colaborativas

Forme grupos de trabajo y pida que dibujen cada uno de los siguientes cuadriláteros.

a. Un trapecio isósceles con un lado de 5 cm.

b. Un romboide con un lado de 3 cm.

c. Un trapezoide asimétrico.

d. Un trapezoide simétrico con un lado de 6 cm.

e. Un cuadrado inscrito en una circunferencia de radio 6 cm.

f. Un rectángulo con un lado de 8 cm.

Libro del alumno

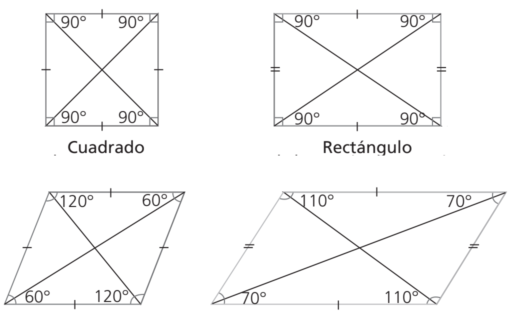
Ampliación conceptual

Propiedades de los paralelogramos

Algunas propiedades de los paralelogramos son:

- Sus lados opuestos tienen la misma longitud.
- Sus ángulos opuestos son congruentes y los consecutivos son suplementarios.
- Cada diagonal del paralelogramo lo divide en dos triángulos congruentes.
- Las diagonales se cortan en su punto medio.

En cada uno de los paralelogramos de la figura se han destacado sus diagonales y sus ángulos y en cada uno de estos se pueden verificar las características que se acaban de mencionar.



Cuadrado — Rectángulo — Rombo — Romboide

Actividades TIC

En el link:

http://tic.sepdf.gob.mx/scorm/oas/mat/tercero/37/mat3_obj37_02.swf

Descubre la información y utiliza esta herramienta para aplicarla en la resolución de ejercicios con cuadriláteros.

5 Cuadriláteros

Razonamiento matemático

Ley del paralelogramo

Los paralelogramos tienen una ley geométrica donde se relacionan los lados con sus diagonales. Esto se representa con la siguiente fórmula:

$(JK)^2 + (KL)^2 + (LM)^2 + (MJ)^2 = (JL)^2 + (KM)^2$

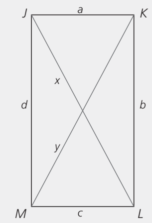


Figura 8

5.1 Propiedades de las diagonales de los paralelogramos

1. Las diagonales de un paralelogramo se bisecan, es decir se intersecan en el punto medio.

Ejemplo 2

En el paralelogramo *CDEF* de la figura 9, $\overline{CE}$ y $\overline{DF}$ son diagonales y *G* es punto medio de ellas.

Para demostrar ese enunciado, se debe comprobar la congruencia del triángulo $\triangle CGD$ con el $\triangle FGE$, utilizando el criterio ALA y las propiedades de los cuadriláteros.

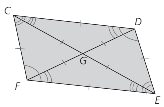


Figura 9

2. Las diagonales de un rectángulo son congruentes.

Ejemplo 3

En el rectángulo *CDEF* de la Figura 10, $\overline{CE} \perp \overline{DF}$.

La congruencia de las diagonales se puede comprobar estableciendo la congruencia del triángulo *CFE* con el triángulo *DEF*.

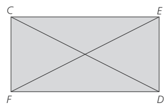


Figura 10

3. Las diagonales de un rombo son perpendiculares.

Ejemplo 4

En el rombo *CDEF* de la figura 11, $\overline{CE} \perp \overline{DF}$.

La perpendicularidad de las diagonales se puede comprobar estableciendo la congruencia del triángulo *CGD* con el triángulo *CGF*.

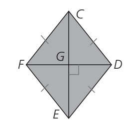


Figura 11

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Marca V si la afirmación dada es verdadera o F si la afirmación dada es falsa:

- **a.** Todo cuadrado es rombo. ( )
- **b.** Las diagonales de un rombo se bisecan. ( )
- **c.** Todo cuadrado es rectángulo. ( )
- **d.** Todo rectángulo es cuadrado. ( )
- **e.** Algunos rombos son rectángulos. ( )
- **f.** Las diagonales de los cuadrados son congruentes. ( )

Solución:

- a. (V); porque el cuadrado tiene todos sus lados congruentes.
- b. (V); porque es una de las propiedades de los paralelogramos.
- c. (V); el cuadrado tiene los lados iguales dos a dos y ángulos rectos.
- d. (F); porque no tiene todos los lados iguales.
- e. (F); porque los lados no son iguales dos a dos.
- f. (V); porque la medida de los catetos son iguales.

Bloque de Geometría y medida

Destrezas con criterios de desempeño: Definir, clasificar y analizar los elemrntos de los cuadriláteros

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2. Lee la información y resuelve.

Al trazar una diagonal en cierto tipo de cuadriláteros, se generan dos triángulos congruentes.

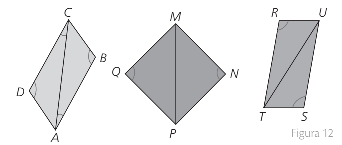


Figura 12

$\triangle ABC \cong \triangle ACD$ $\triangle MNP \cong \triangle MPQ$ $\triangle RTU \cong \triangle STU$

a. Traza cualquier diagonal a cada uno de los siguientes cuadriláteros, e identifica en cuáles se generan dos triángulos congruentes.

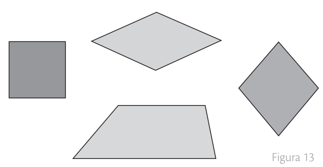


Figura 13

b. ¿Para qué tipo de cuadriláteros se cumple esta propiedad? Explica.

3. En el cuadrilátero $ABCD$ de la Figura 14, $\overline{BM} = \overline{MC}$, $\overline{AD} = 4\overline{AL}$, $\overline{AD} + 2\overline{AB} = 18\text{m}$ y $\measuredangle CAB = \measuredangle DAC$. Si $\measuredangle DCA = 90$, entonces, ¿cuál es la longitud de $\overline{ML}$?:

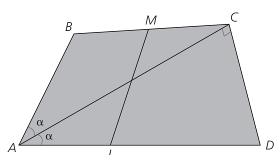


Figura 14

4. Completa cada enunciado.

a. Si un cuadrilátero tiene exactamente dos lados paralelos y un par de ángulos congruentes, el cuadrilátero es un ______.

b. Un trapezoide es simétrico si tiene dos pares de ______ congruentes.

c. En un trapecio ______ la longitud de la altura es la misma que la de uno de sus lados.

5. Clasifica los cuadriláteros según sus características.

a.

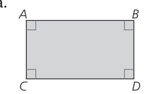


Figura 15

b.

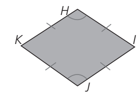


Figura 16

c.

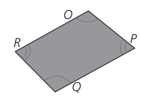


Figura 17

d.

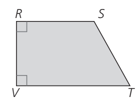


Figura 18

Modelación

6. Dibuja un romboide con regla y compás.

a. Ten en cuenta las medidas del lado AB y las diagonales AC y CD, como se observa en la figura 19.

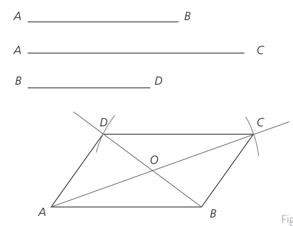


Figura 19

Resolución de problemas

7. Se construye un panel solar con forma de paralelogramo como el de la Figura 20.

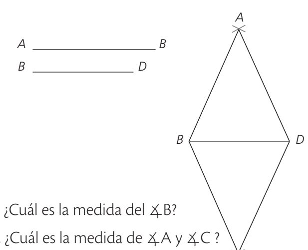


Figura 20

a. ¿Cuál es la medida del $\measuredangle B$?

b. ¿Cuál es la medida de $\measuredangle A$ y $\measuredangle C$?

c. ¿Cuánto mide el segmento AB?

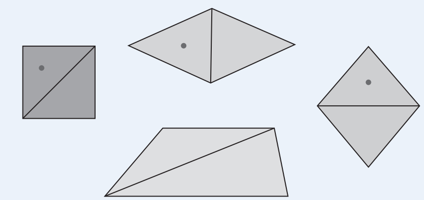
d. ¿Cuánto mide el segmento AD?

209

APPLICA © EDICIONES SM

Razonamiento

2. a. Múltiples respuestas, por ejemplo:



b. Esta propiedad se cumple para los paralelogramos.

3. $\overline{ML} = 4{,}5$ m

4. a. Trapecio ractángulo

b. Lados consecutivos

c. Rectángulo

5. a. Rectángulo **b.** Romboide

c. Paralelogramo rectángulo **d.** Trapecio

Modelación

6. Respuesta libre

Resolución de problemas

7. Respuesta libre.

UNIDAD 4

Evaluación formativa

Nombre:..

Grado:................. **Fecha:**.................

1. Si uno de los ángulos de un triángulo mide 96°, corresponde a un triángulo:

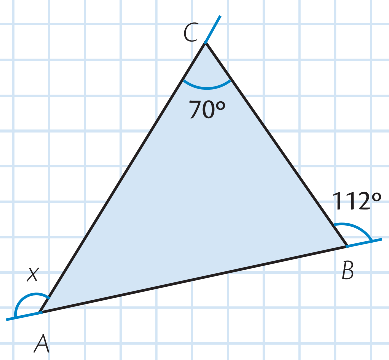
   A. acutángulo
   B. isósceles
   C. obtusángulo
   D. rectángulo

2. El punto de intersección de las medianas es:

   A. incentro
   B. baricentro
   C. circuncentro
   D. ortocentro

3. El valor de x es:

   A. 138°
   B. 140°
   C. 142°
   D. 144°



4. Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

   A. En el triángulo formado por los segmentos a = 2 cm, b = 3 cm y c = 4 cm, el ángulo con mayor apertura es el opuesto al lado b. ( )

   B. Es posible construir un triángulo cuyos lados midan 8 cm, 3 cm y 7 cm. ( )

   C. En un triángulo, los ángulos interiores pueden medir 45º, 32º y 50º. ( )

   D. Es posible construir un triángulo cuyos lados midan 5 cm, 11 cm y 6 cm. ( )

   E. Los ángulos exteriores de un triángulo miden 120º, 100º y 110º respectivamente. ( )

5. Un jardinero corta el césped de forma triangular, si quiere trazar una circunferencia que pase por los tres vértices del triángulo, ¿en dónde debe ubicar el centro de dicha circunferencia y cuál debe ser la medida de su radio?

1. Si uno de los ángulos de un triángulo mide 96°, corresponde a un triángulo:

   A. acutángulo

   B. isósceles

   C. obtusángulo

   D. rectángulo

2. El punto de intersección de las medianas es:

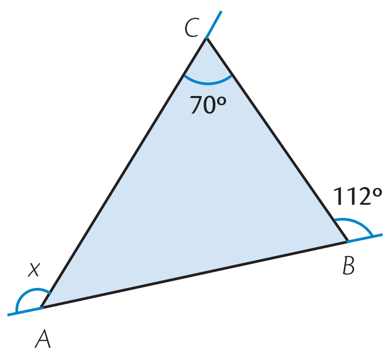
   A. incentro

   B. baricentro

   C. circuncentro

   D. ortocentro

3. El valor de x es:



   A. 138°

   B. 140°

   C. 142°

   D. 144°

4. Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

   A. En el triángulo formado por los segmentos a = 2 cm, b = 3 cm y c = 4 cm, el ángulo con mayor apertura es el opuesto al lado b. ( )

   B. Es posible construir un triángulo cuyos lados midan 8 cm, 3 cm y 7 cm. ( )

   C. En un triángulo, los ángulos interiores pueden medir 45º, 32º y 50º. ( )

   D. Es posible construir un triángulo cuyos lados midan 5 cm, 11 cm y 6 cm. ( )

   E. Los ángulos exteriores de un triángulo miden 120º, 100º y 110º respectivamente. ( )

5. Un jardinero corta el césped de forma triangular, si quiere trazar una circunferencia que pase por los tres vértices del triángulo, ¿en dónde debe ubicar el centro de dicha circunferencia y cuál debe ser la medida de su radio? Verificar validez de la respuesta

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.°	N.° de aciertos	N.° de desaciertos	Refuerzo sí / no
Construye triángulos dadas algunas medidas de ángulos o lados.	**1,2 y 3**			
Dibuja sus rectas y puntos notables como estrategia para plantear y resolver problemas de perímetros y áreas de triángulos	**4**			
Resuelve problemas geométricos que requieran del cálculo de áreas	**5**			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

Libro del alumno

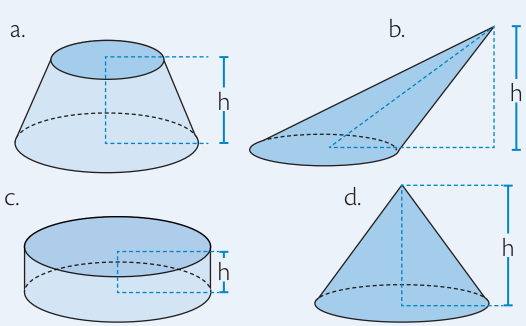
Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Pida a los estudiantes que nombren algunos sólidos geométricos que recuerden de cursos anteriores. Indíqueles que los representen y que nombren algunas de sus características. Luego solicite que mencionen algunos sólidos que observen a su alrededor.
Solicite a los estudiantes que reconozcan algunos cuerpos redondos en su entorno. Confirme que en este grupo de sólidos incluyen la esfera, el cono y el cilindro.

b. Invite a sus estudiantes a reconocer los elementos que se identifican en los cuerpos redondos. Insista en que los cuerpos redondos no poseen caras laterales como los poliedros, sino superficies curvas.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Identifica cada figura, especifica sus características y relaciona con un objeto construido en la realidad.



Bloque de Geometría y medida

6 Cuerpos redondos

Explora

Muchos elementos de la naturaleza y de los objetos que usas diariamente, son excelentes ejemplos de los sólidos geométricos. (Figura 1)

Figura 1

- ¿Qué relación tienen las formas que se identifican en la fotografía?

En la fotografía de la Figura 1 se identifica un helado compuesto por dos sólidos geométricos: una esfera y un cono. Estos dos cuerpos tienen al menos una superficie curva. A este tipo de sólidos geométicos se les conoce como cuerpos redondos.

Los **cuerpos redondos** son aquellos que, como mínimo, una de sus caras o superficies son curvas. En algunos casos son llamados **cuerpos de revolución** debido a que se pueden obtener a partir del giro de una figura plana alrededor de un eje.

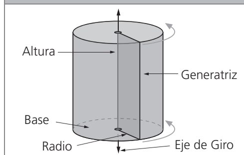
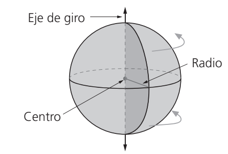
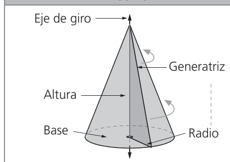
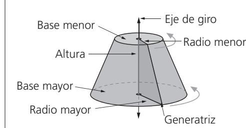
Cilindro	Esfera
 Consiste en un cuerpo que se genera al hacer girar un rectángulo tomando como eje uno de sus lados.	 Es el sólido que se genera al hacer girar una semicircunferencia tomando como eje su diámetro.
Cono	**Tronco de cono**
 Corresponde a un cuerpo geométrico que se genera al hacer girar un triángulo rectángulo tomando como eje uno de sus catetos.	 Es el cuerpo geométrico que se genera al girar un trapecio rectángulo teniendo como eje el lado perpendicular a las bases.

Tabla 1

Ten en cuenta

En el caso de los conos, si la altura coincide con su eje se dice que es un cono recto, pero si por el contrario el eje y la altura no coinciden estamos hablando de un cono oblicuo.

Sabías que...

Al girar una moneda se obtiene en el espacio una esfera.

Actividades resueltas

Razonamiento

1 ¿Qué cuerpo se obtiene al hacer girar un triángulo rectángulo sobre uno de sus catetos si miden 6 cm y 8 cm, respectivamente? ¿Cuál es su generatriz?

Solución:
En ambos casos se obtiene un cono.

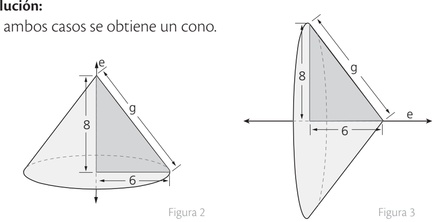
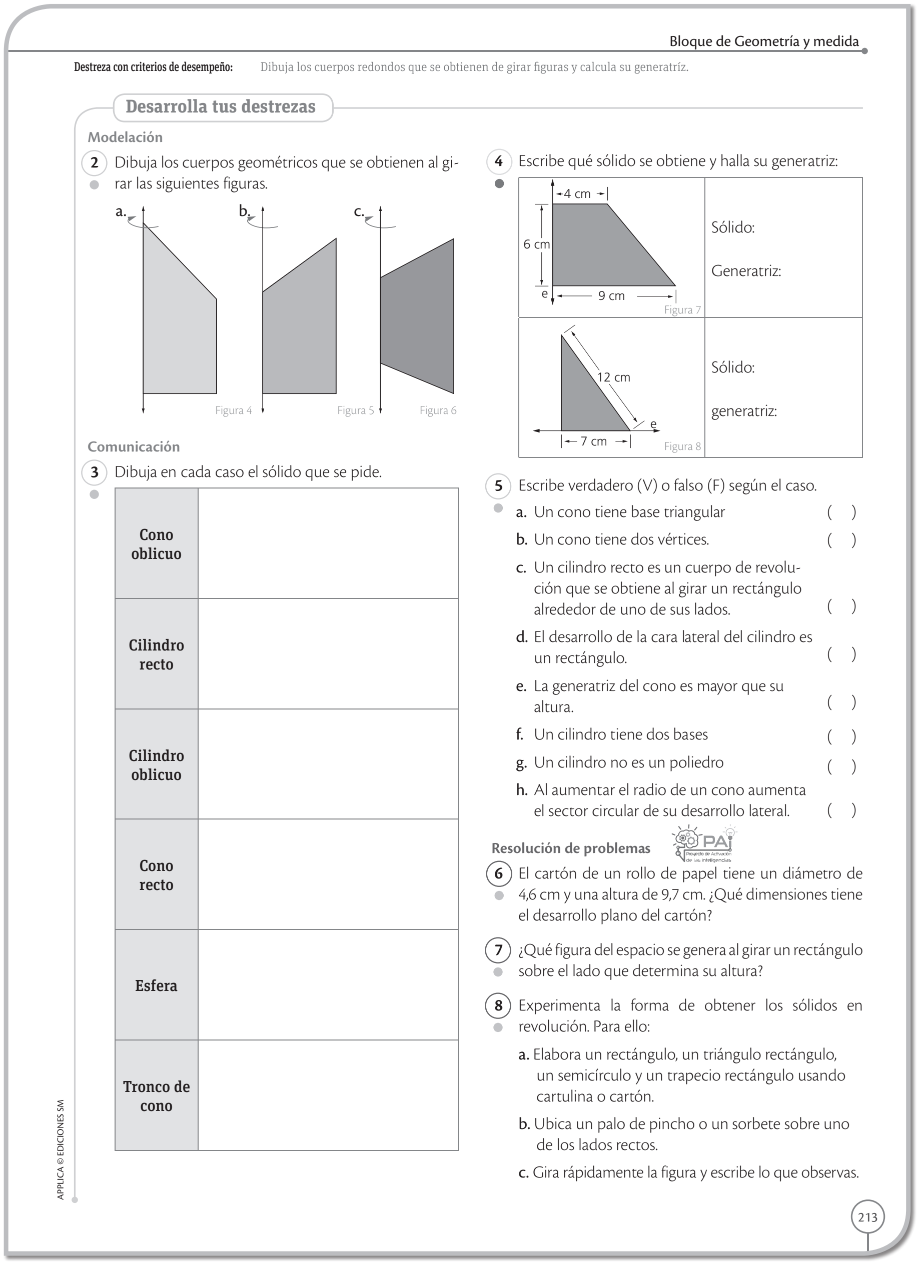


Figura 2 Figura 3

La generatriz mide lo mismo en los dos conos: $g = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ cm.


Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Dibuja los cuerpos redondos que se obtienen de girar figuras y calcula su generatriz.

Desarrolla tus destrezas

Modelación

2 Dibuja los cuerpos geométricos que se obtienen al girar las siguientes figuras.

a. b. c.

Figura 4 Figura 5 Figura 6

Comunicación

3 Dibuja en cada caso el sólido que se pide.

Cono oblicuo	
Cilindro recto	
Cilindro oblicuo	
Cono recto	
Esfera	
Tronco de cono	

4 Escribe qué sólido se obtiene y halla su generatriz:

4 cm, 6 cm, e, 9 cm — Figura 7	Sólido: Generatriz:
12 cm, e, 7 cm — Figura 8	Sólido: generatriz:

5 Escribe verdadero (V) o falso (F) según el caso.

a. Un cono tiene base triangular ( )
b. Un cono tiene dos vértices. ( )
c. Un cilindro recto es un cuerpo de revolución que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. ( )
d. El desarrollo de la cara lateral del cilindro es un rectángulo. ( )
e. La generatriz del cono es mayor que su altura. ( )
f. Un cilindro tiene dos bases ( )
g. Un cilindro no es un poliedro ( )
h. Al aumentar el radio de un cono aumenta el sector circular de su desarrollo lateral. ( )

Resolución de problemas PAI

6 El cartón de un rollo de papel tiene un diámetro de 4,6 cm y una altura de 9,7 cm. ¿Qué dimensiones tiene el desarrollo plano del cartón?

7 ¿Qué figura del espacio se genera al girar un rectángulo sobre el lado que determina su altura?

8 Experimenta la forma de obtener los sólidos en revolución. Para ello:

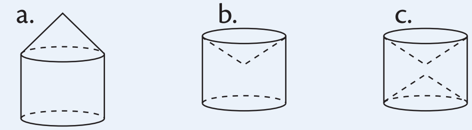
a. Elabora un rectángulo, un triángulo rectángulo, un semicírculo y un trapecio rectángulo usando cartulina o cartón.
b. Ubica un palo de pincho o un sorbete sobre uno de los lados rectos.
c. Gira rápidamente la figura y escribe lo que observas.

APPLICA © EDICIONES SM

213

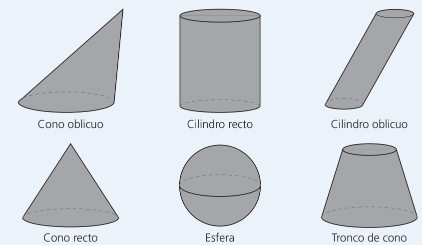
Modelación

2. a. b. c.

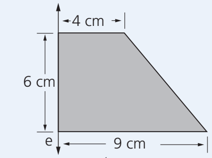


Comunicación

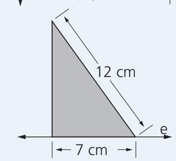
3. a.



4.



Sólido: **Tronco de cono**
Generatriz: **7,81 cm**



Sólido: **Cono**
Generatriz: **12 cm**

5. **a.** F **b.** F **c.** V **d.** V **e.** V **f.** V **g.** V **h.** V

Resolución de problemas

6. El desarrollo plano del cartón tiene dimensiones: 44,62π cm.

7. Se genera un cilindro.

8. Respuesta libre.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Para iniciar el tema recuerde a los estudiantes la definición de triángulo y de área.

b. Luego preguntes si recuerdan las rectas especiales de los triángulos, en especial las alturas.

c. Escuche las respuestas y aclare la definición de área o superficie.

d. Pregunte a los y las estudiantes sin recuerdan la forma de calcular el área de un triángulo. Es importante que les aclare que el área de un triángulo es la mitad del producto de cualquiera de sus bases y su altura correspondiente.

e. Recuerde a los estudiantes el cálculo de perímetros y áreas de cuadriláteros como el cuadrado, rombo, romboide, trapecios, otros. Por último recuerde las características y áreas de paralelolagramos.

Actividades colaborativas

Forma grupos de trabajo y proponga que tracen el eje de coordenadas en la cuadrícula y encuentren el área de los triángulos cuyos vértices son:

A (23, 4) , B (22, 1) y C(22, 0)

7 Áreas de cuadriláteros y triángulos

Explora

En un almacén de materiales para construcción se ofrecen pequeñas baldosas con el siguiente diseño:

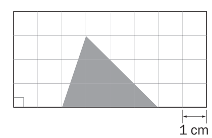


Figura 1

- ¿Cuál es el área total de la baldosa?
- ¿Cuál es el área que ocupa el triángulo central de la baldosa?

Para responder las dos preguntas es necesario conocer cómo calcular el área de los cuadriláteros y los triángulos.

7.1 Áreas del rectángulo, del cuadrado y del paralelogramo

El área de un rectángulo, de un cuadrado y de un paralelogramo es igual al producto de la base por la altura, expresando dichas longitudes en la misma unidad.

$$A = \text{base} \cdot \text{altura} = b \cdot h$$

Ejemplo 1

Para calcular el área total de la baldosa de la Figura 1 se dibujó sobre una cuadrícula (Figura 2). El área de cada cuadrado es de 1 cm². Entonces, el rectángulo ocupa exactamente $8 \cdot 4 = 32$ cuadrados.

Por lo tanto, el área de la baldosa es de 32 cm².

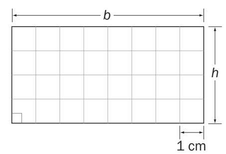


Figura 2

Ejemplo 2

El área del cuadrado de la Figura 3 se halla multiplicando el lado por la altura que equivale a elevar la medida de un lado al cuadrado: $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$.

Como las unidades están dadas en centímetros, el área del cuadrado es de 36 cm².

El área de un cuadrado se simboliza como $A = l \cdot l = l^2$.

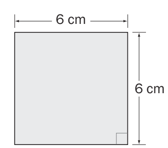


Figura 3

Ejemplo 3

El área del paralelogramo de la Figura 4, se calcula a partir de su relación con el área del rectángulo que tiene su misma base y su misma altura. Observa:

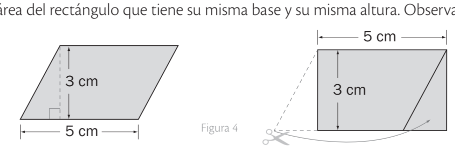


Figura 4

Si se recorta el triángulo rectángulo que se limita con la línea punteada y se pone de manera que complete un rectángulo, se tiene que las dos figuras tienen la misma área. Entonces, el área del paralelogramo es $A = b \times h = 5 \cdot 3 = 15$ cm².

Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. Calcula el área de la región azul en la Figura 5.

- **Solución:**

  Se expresan las longitudes en la misma unidad de medida:

  3 dm = 30 cm   8 dm = 80 cm

  Se calculan las áreas de las figuras:

  $A▭ = b \cdot h = 50 \cdot 80 = 4\,000$ cm²

  $A□ = l^2 = 30^2 = 900$ cm²

  Se restan las áreas obtenidas para calcular el área de la parte azul:

  $A = 4\,000$ cm² $- 900$ cm² $= 3\,100$ cm²

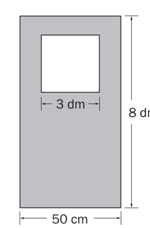


Figura 5

Destreza con criterios de desempeño: Calcular el área de triángulos en la resolución de problemas

7.2 Área del triángulo

El **área de un triángulo** de base *b* y altura *h* es igual a la mitad del producto de la base por la altura, expresadas en la misma unidad de medida.

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{b \cdot h}{2}$$

Ejemplo 4

Para hallar el área de un triángulo *ABC*, se refleja este tomando como eje de simetría la recta que pasa por los puntos *A* y *B*, para formar un paralelogramo; observa la Figura 6.

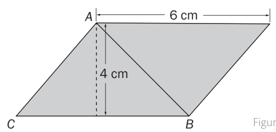


Figura 6

Por lo tanto, el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo.

$$A = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$$

Actividades resueltas

Resolución de problemas

2. El triángulo central de la baldosa de la Figura 1, tiene 3 cm de altura y 4 cm de base, como se muestra en la Figura 7. ¿Cuál es el área de este triángulo?

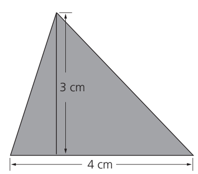


Figura 7

Solución:

El área del triángulo se calcula aplicando la fórmula: $A = \frac{b \cdot h}{2}$

$$= \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

El triángulo tiene un área de 6 cm².

3. Si el área de un triángulo es de 10 cm² y su base mide 4 cm. Según esto, ¿cuánto mide su altura?

Solución:

$$A = \frac{b \cdot h}{2} \rightarrow h = \frac{A \cdot 2}{b} = \frac{10 \cdot 2}{4} = 5 \text{ cm}^2$$

La altura del triángulo es de 5 cm².

Ten en cuenta

- En un triángulo rectángulo se puede considerar a uno de los catetos como la base del triángulo y al otro como a su altura.
- Por consiguiente, al aplicar el teorema de Pitágoras, si no se conoce la medida de uno de los catetos de un triángulo, pero sí el valor de la hipotenusa y del otro cateto, se puede hallar sin dificultad el área del triángulo.

Ten en cuenta

Si se conoce el área de un triángulo y alguna de las dos medidas que lo determinan, es decir, su base o su altura, para hallar la otra tendremos que despejarla de la fórmula del área del triángulo.

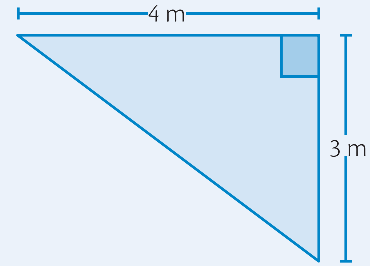
TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación TIC

www.e-sm.net/8smt13

Complementa tus conocimientos acerca de áreas de triángulos y cuadriláteros.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Juliana compró un retazo triangular de tela, que se obtuvo al cortar por su diagonal una pieza rectangular de 3 m de largo por 4 m de ancho.



¿Cuál es el área del retazo de tela que compró Juliana?

Dado que al cortar la pieza rectangular de tela por la diagonal se generan dos retazos congruentes, el área de uno de los retazos triangulares se deduce de la siguiente forma:

Como el área (A) del rectángulo se calcula mediante la fórmula.

Base

$$A = b \cdot h$$

Altura

El área de la tela es: 4 m x 3 m = 12 m²

Como el retazo que compró Juliana tiene la mitad del área de la pieza, se tiene:

$$A_\Delta = \frac{(b \cdot h)}{2}$$

$$A_\Delta = \frac{4\text{m} \cdot 3\text{m}}{2} = \frac{12\text{m}^2}{2} = 6\text{m}^2$$

Juliana compró 6 m² de tela.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

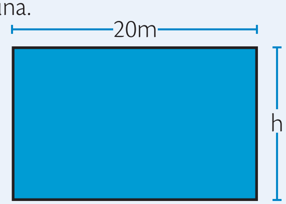
a. Pregunte por las clases de cuadriláteros que recuerdan; pida que los dibujen. Aproveche el tema anterior para aclararles que para hallar el área de un rectángulo o de un cuadrado basta con calcular la suma de las áreas de los dos triángulos que lo forman.

b. Analice con profundidad la información en la que se presentan las áreas de los diferentes cuadriláteros.
Solicite a los estudiantes que analicen la forma de deducirlas con el fin de evitar la simple memorización de las fórmulas. Pueden realizar las construcciones geométricas como se muestran en las figuras empleando material concreto.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

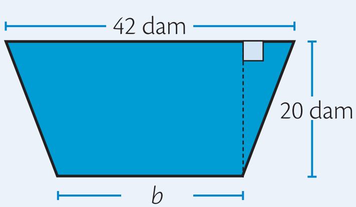
1. Analice la figura y calcula el valor de la incógnita en cada una.

a.



$A = 250 m^2$

b.



$A = 60\ dam^2$

Bloque de Geometría y medida

7 Áreas de triángulos y cuadriláteros

Ten en cuenta

Las diagonales de un rombo son los segmentos perpendiculares que unen los vértices no consecutivos de dicho paralelogramo.

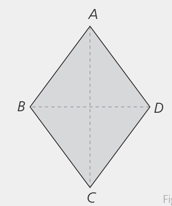


Figura 1

Las diagonales dividen al rombo en cuatro triángulos rectángulos iguales.

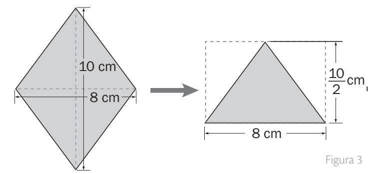
7.3 Área del rombo

El **área de un rombo** se puede calcular conociendo sus diagonales, ya que corresponde a la mitad del área del rectángulo de lados *D* y *d*.

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

Ejemplo 5

Halla el área de un rombo cuyas diagonales miden 10 cm y 8 cm, respectivamente.



$$A = \frac{D \cdot d}{2} = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40\ m^2$$

Figura 3

Ten en cuenta

En los triángulos rectángulos y en los trapecios rectángulos, la altura coincide con uno de sus lados.

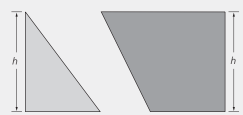


Figura 2

7.4 Área del trapecio

Para hallar el área de un trapecio, se recorta un trapecio congruente y se coloca de manera que los dos compartan uno de los lados no paralelos; de esa manera se obtiene un paralelogramo. Observa la Figura 4.

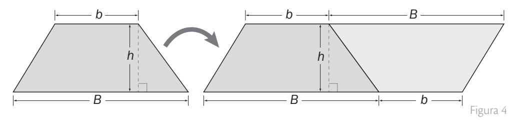


Figura 4

El área del paralelogramo es $A = (B + b) \cdot h$; y la del trapecio es la mitad de ella.

El **área de un trapecio** es igual a la mitad de la suma de las bases multiplicada por la altura, expresadas en la misma unidad.

$$A = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h$$

Actividad resuelta

Ejercitación

4 Calcula el área del trapecio de la Figura 5.

Solución:

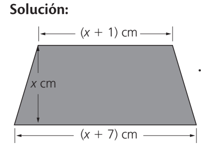
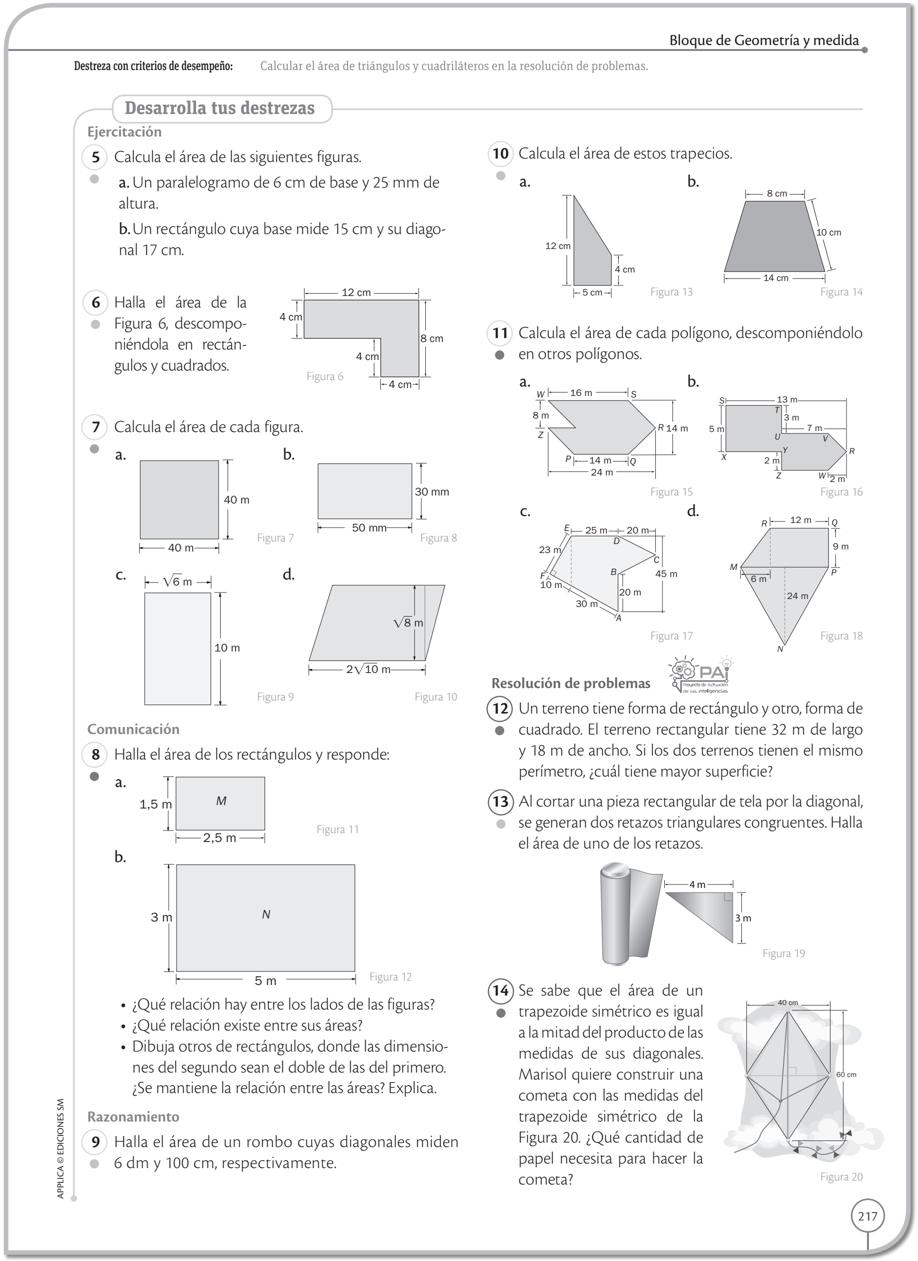


Figura 5

$$\left(\frac{(x + 7) + (x + 1)}{2}\right) \cdot x = \frac{2x + 8}{2} \cdot x = \frac{2(x + 4)}{2} \cdot x = (x + 4) \cdot x = x^2 + 4x$$

El área del trapecio es $x^2 + 4x$.



Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Calcular el área de triángulos y cuadriláteros en la resolución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

5 Calcula el área de las siguientes figuras.

a. Un paralelogramo de 6 cm de base y 25 mm de altura.

b. Un rectángulo cuya base mide 15 cm y su diagonal 17 cm.

6 Halla el área de la Figura 6, descomponiéndola en rectángulos y cuadrados.

Figura 6

7 Calcula el área de cada figura.

a. Figura 7 b. Figura 8 c. Figura 9 d. Figura 10

Comunicación

8 Halla el área de los rectángulos y responde:

a. Figura 11

b. Figura 12

- ¿Qué relación hay entre los lados de las figuras?
- ¿Qué relación existe entre sus áreas?
- Dibuja otros de rectángulos, donde las dimensiones del segundo sean el doble de las del primero. ¿Se mantiene la relación entre las áreas? Explica.

Razonamiento

9 Halla el área de un rombo cuyas diagonales miden 6 dm y 100 cm, respectivamente.

10 Calcula el área de estos trapecios.

a. Figura 13 b. Figura 14

11 Calcula el área de cada polígono, descomponiéndolo en otros polígonos.

a. Figura 15 b. Figura 16 c. Figura 17 d. Figura 18

Resolución de problemas

12 Un terreno tiene forma de rectángulo y otro, forma de cuadrado. El terreno rectangular tiene 32 m de largo y 18 m de ancho. Si los dos terrenos tienen el mismo perímetro, ¿cuál tiene mayor superficie?

13 Al cortar una pieza rectangular de tela por la diagonal, se generan dos retazos triangulares congruentes. Halla el área de uno de los retazos.

Figura 19

14 Se sabe que el área de un trapezoide simétrico es igual a la mitad del producto de las medidas de sus diagonales. Marisol quiere construir una cometa con las medidas del trapezoide simétrico de la Figura 20. ¿Qué cantidad de papel necesita para hacer la cometa?

Figura 20

217

Ejercitación

5. a. 15 cm^2 b. 120 cm^2

6. 64 cm^2

7. a. 1 600 m^2 b. 1 500 mm^2 c. 24,49 m^2 d. 17,88 m^2

Comunicación

8. a. 3,75 m^2 b. 15 m^2

Razonamiento

9. 3 000 cm^2 = 30 dm^2

10. a. 60 cm^2 b. 104,92 cm^2

11. a. 1 241,3 m^2 b. 54 m^2 c. 242 m^2 d. 351 m^2

Resolución de problemas

12. El terreno cuadrado.
Porque 625 m^2 > 576 m^2.

13. 6 m^2

14. 120 m^2

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Como actividad motivadora invite a los estudiantes a construir con regla y compás polígonos regulares como: pentágonos, hexágonos y octágonos.

b. Utilice las construcciones anteriores para mostrar cómo los polígonos regulares se pueden descomponer en triángulos isósceles congruentes, en donde n es el número de lados del polígono.

c. Así que es fácil inferir que el área de los polígonos regulares es la suma de las áreas de los triángulos en los cuales se descompuso el polígono.

d. Pida a los y las estudiantes que escriban una fórmula generalizada que permita calcular el área de cualquier polígono.

e. Explique el proceso que se sigue en esta deducción. Haga que comprueben algunas respuestas empleando los dos métodos estudiados y proponga situaciones en las cuales se deba calcular el área, la apotema o el perímetro del polígono, conociendo el resto de los datos.

f. Es importante que los estudiantes realicen un dibujo de la situación que se presenta con el fin de identificar los datos conocidos y los desconocidos. Insista en la aplicación de los pasos que se siguen en las estrategias de resolución de problemas y confirme que utilizan la fórmula correspondiente adecuadamente.

8 Áreas de polígonos regulares e irregulares

Explora

Gabriela diseñó un hexágono regular a partir de la unión de seis triángulos de colores.

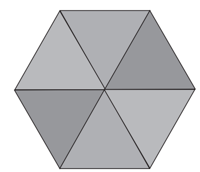


Figura 1

- Si se sabe que cada triángulo tiene un área de 4,15 cm², ¿cuál es el área del hexágono?

Para calcular el área del hexágono basta con multiplicar por 6, el área del triángulo. Luego, se tiene que: $A = 6 \cdot 4{,}15\ cm^2 = 24{,}9\ cm^2$.

El área del hexágono es 24,9 cm².

Sin embargo, realizar este cálculo cuando no se conoce el área de cada triángulo implica el uso de algunas fórmulas que estudiarás a continuación.

8.1 Área de polígonos regulares

La fórmula general para calcular el **área *A*** de cualquier **polígono regular** es:

$A = \frac{p \cdot a}{2}$, donde *p* es su perímetro y *a* su apotema.

Para calcular la medida de la apotema de un polígono, se aplica el teorema de Pitágoras. Además, el perímetro de un polígono regular, se calcula multiplicando la longitud del lado por el número de lados.

Ten en cuenta

- La **apotema** de un polígono regular es el segmento que va desde el centro del polígono hasta el centro de cualquiera de sus lados.
- El **perímetro** de un polígono es la suma de las longitudes de todos sus lados.

Ejemplo 1

Calcula la medida de la apotema del hexágono regular de la Figura 2. Después, halla su área.

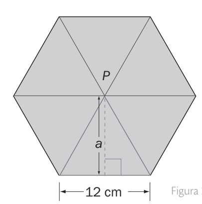


Figura 2

Se considera uno de los seis triángulos equiláteros en los cuales se puede descomponer el hexágono.

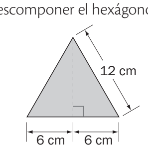


Figura 3

$a^2 = (12\ cm)^2 - (6\ cm)^2 = 108\ cm^2$

$a = \sqrt{108\ cm^2}$

$a \approx 10{,}4\ cm$

El valor de la apotema *a* del polígono es aproximadamente 10,4 cm.

Para conocer el área del polígono, se debe calcular también su perímetro así:

$6 \cdot 12 = 72\ cm$

Se reemplazan los valores en la fórmula, como se muestra a continuación:

$\frac{72\ cm \cdot 10{,}4\ cm}{2} = 374{,}4\ cm^2$

Entonces, el área del hexágono es 374,4 cm².

Ten en cuenta

- El **radio de un polígono regular** es el segmento que une el centro del polígono con cualquiera de sus vértices.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula el área del pentágono regular de la Figura 4.

Solución:

Un pentágono regular se descompone en 5 triángulos iguales. Entonces, para obtener la apotema se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo *MOB*. Observa:

$a^2 = 18^2 - 10^2 = 224$

$a \approx 14{,}9\ cm$

$A = \frac{(5 \cdot 20)\ cm \cdot 14{,}9\ cm}{2} = 745\ cm^2$

Por lo tanto, el área del pentágono es 745 cm².

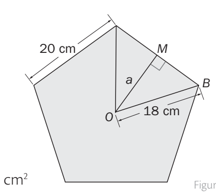


Figura 4

Destreza con criterios de desempeño: Calcular el área de polígonos regulares por descomposición en triángulos.

8.2 Área de polígonos irregulares

El **área de un polígono irregular** se puede calcular por triangulación o por cuadriculación. Calcular el área de un polígono por triangulación consiste en dividir el polígono en triángulos, calcular sus áreas y sumarlas.

Ejemplo 2

Para calcular el área de la Figura 5, se divide el polígono trazando las diagonales desde uno de sus vértices.

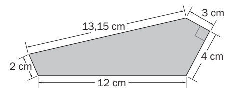


Figura 5

El área del polígono es la suma de las áreas de los tres triángulos en los cuales se ha dividido. Observa la Figura 6

En el triángulo T1 se conocen la base y la altura.

$$A_{T1} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6 \text{ cm}^2$$

La altura del triángulo T2 es la hipotenusa del triángulo T1, que se calcula aplicando el teorema de Pitágoras.

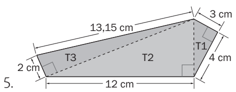


Figura 6

$h^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, luego $h = \sqrt{25} = 5$.

$$A_{T2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30 \text{ cm}^2$$

La base del triángulo T3 es la hipotenusa del triángulo T2.

$b^2 = 12^2 + 5^2 = 169$, entonces $b = \sqrt{169} = 13$.

$$A_{T3} = \frac{13 \cdot 2}{2} = 13 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto, el área del polígono es:

$$A_{T1} + A_{T2} + A_{T3} = 6 \text{ cm}^2 + 30 \text{ cm}^2 + 13 \text{ cm}^2 = 49 \text{ cm}^2$$

Calular el área de un polígono por **cuadriculación** consiste en dividir el polígono en cuadrados (o fragmentos de cuadrados), calcular sus áreas y adicionarlas.

Actividad resuelta

Ejercitación

1. Calcula el área de polígono de la Figura 7

Solución:

Para calcular el área del polígono de la figura 7, se dibuja sobre él una cuadrícula cuyos cuadrados tengan 1 cm de lado. El polígono tiene nueve cuadrados completos y seis cuadrados incompletos que, al reorganizarlos, forman tres cuadrados.

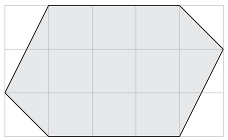


Figura 7

Entonces, el área del polígono es $A = 9 + 3 = 12 \text{ cm}^2$.

CULTURA del Buen Vivir

La responsabilidad

Una persona responsable es alguien que asume una posición de cumplimiento y entrega frente a un compromiso o un deber que le fue asignado.

- Menciona cuatro características o acciones morales que consideres enemigos del sentido de responsabilidad.

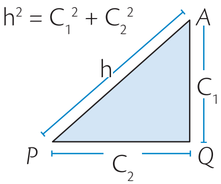
Ampliación conceptual

Teorema de Pitágoras

En los triángulos rectángulos, los lados que forman el ángulo de 90º se llaman catetos y el otro se llama hipotenusa.

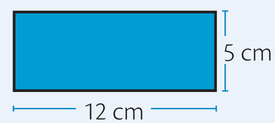
El teorema de Pitágoras plantea que en todo triángulo rectángulo, el cuadrado de la medida de la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos.

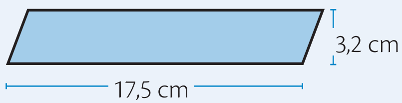
$$h^2 = C_1^{\,2} + C_2^{\,2}$$

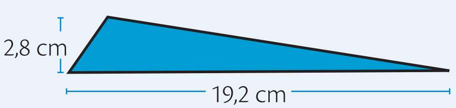


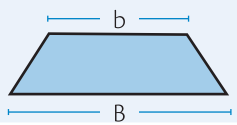
Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. Calcula el área de cada figura.









Libro del alumno

Actividades TIC

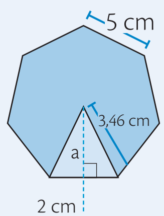
En el link:

http://www.extremate.es/ESO/Definitivo%20Funciones/textoafin.swf

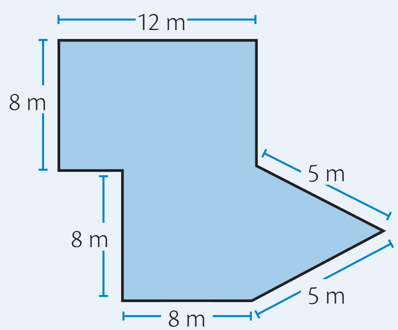
Descubre la información y utiliza esta herramienta para aplicar las funciones afines

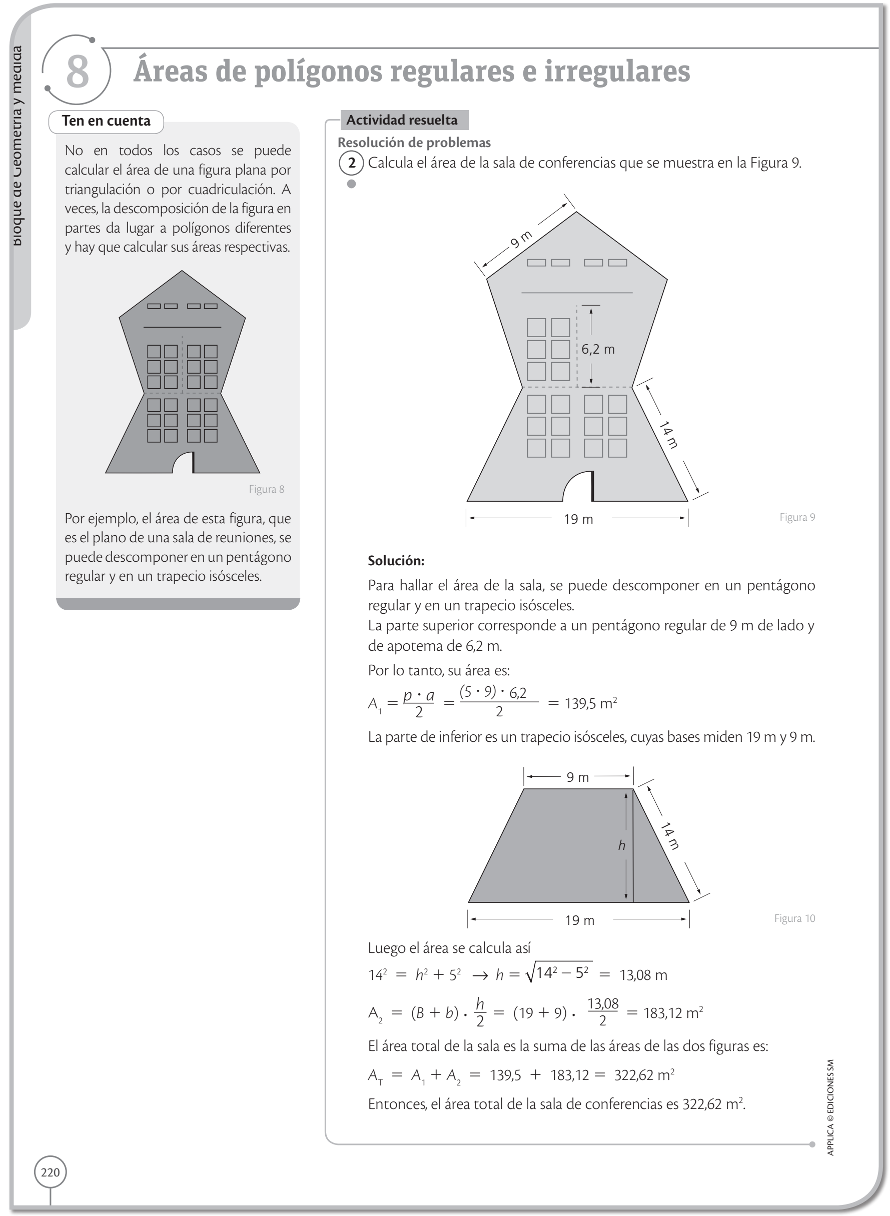
Actividades colaborativas

Pide a los estudiantes que en grupo calculen el apotema y halla el área del polígono regular.



Calcula el área de la siguiente figura, conociendo la longitud de cada segmento





Bloque de Geometría y medida

8 Áreas de polígonos regulares e irregulares

Ten en cuenta

No en todos los casos se puede calcular el área de una figura plana por triangulación o por cuadriculación. A veces, la descomposición de la figura en partes da lugar a polígonos diferentes y hay que calcular sus áreas respectivas.

Figura 8

Por ejemplo, el área de esta figura, que es el plano de una sala de reuniones, se puede descomponer en un pentágono regular y en un trapecio isósceles.

Actividad resuelta

Resolución de problemas

2 Calcula el área de la sala de conferencias que se muestra en la Figura 9.

9 m
6,2 m
14 m
19 m

Figura 9

Solución:

Para hallar el área de la sala, se puede descomponer en un pentágono regular y en un trapecio isósceles.

La parte superior corresponde a un pentágono regular de 9 m de lado y de apotema de 6,2 m.

Por lo tanto, su área es:

$$A_1 = \frac{p \cdot a}{2} = \frac{(5 \cdot 9) \cdot 6{,}2}{2} = 139{,}5 \text{ m}^2$$

La parte de inferior es un trapecio isósceles, cuyas bases miden 19 m y 9 m.

9 m
14 m
h
19 m

Figura 10

Luego el área se calcula así

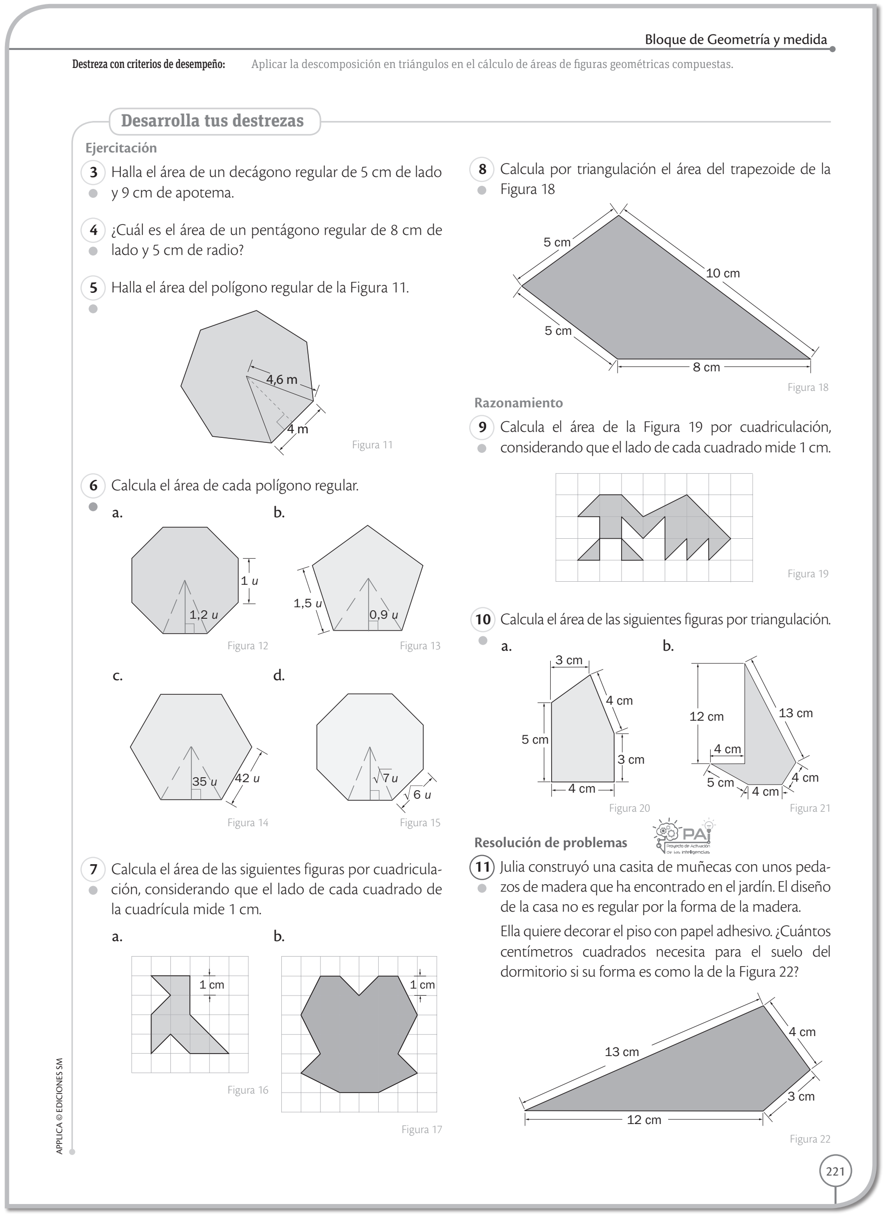
$$14^2 = h^2 + 5^2 \rightarrow h = \sqrt{14^2 - 5^2} = 13{,}08 \text{ m}$$

$$A_2 = (B + b) \cdot \frac{h}{2} = (19 + 9) \cdot \frac{13{,}08}{2} = 183{,}12 \text{ m}^2$$

El área total de la sala es la suma de las áreas de las dos figuras es:

$$A_T = A_1 + A_2 = 139{,}5 + 183{,}12 = 322{,}62 \text{ m}^2$$

Entonces, el área total de la sala de conferencias es 322,62 m^2.



Bloque de Geometría y medida

Destreza con criterios de desempeño: Aplicar la descomposición en triángulos en el cálculo de áreas de figuras geométricas compuestas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

3. Halla el área de un decágono regular de 5 cm de lado y 9 cm de apotema.
4. ¿Cuál es el área de un pentágono regular de 8 cm de lado y 5 cm de radio?
5. Halla el área del polígono regular de la Figura 11.

Figura 11

6. Calcula el área de cada polígono regular.

a. Figura 12 b. Figura 13 c. Figura 14 d. Figura 15

7. Calcula el área de las siguientes figuras por cuadriculación, considerando que el lado de cada cuadrado de la cuadrícula mide 1 cm.

a. Figura 16 b. Figura 17

8. Calcula por triangulación el área del trapezoide de la Figura 18

Figura 18

Razonamiento

9. Calcula el área de la Figura 19 por cuadriculación, considerando que el lado de cada cuadrado mide 1 cm.

Figura 19

10. Calcula el área de las siguientes figuras por triangulación.

a. Figura 20 b. Figura 21

Resolución de problemas

11. Julia construyó una casita de muñecas con unos pedazos de madera que ha encontrado en el jardín. El diseño de la casa no es regular por la forma de la madera.

Ella quiere decorar el piso con papel adhesivo. ¿Cuántos centímetros cuadrados necesita para el suelo del dormitorio si su forma es como la de la Figura 22?

Figura 22

APPLICA © EDICIONES SM

221

Ejercitación

3. $A = 225\ cm^2$

4. $A = 60\ cm^2$

5. $A = 57{,}4\ cm^2$

6. **a.** $4{,}8\ u^2$ **b.** $3{,}375\ u^2$

c. $4\,410\ u^2$ **d.** $25{,}92\ u^2$

7. **a.** $A = 8\ cm^2$ **b.** $A = 28\ cm^2$

8. $A = 36\ cm^2$

Razonamiento

9. $A = 10{,}5\ cm^2$

10. **a.** $A = 23{,}5\ cm^2$ **b.** $A = 48\ cm^2$

Resolución de problemas

11. Se necesitan $36\ cm^2$ de papel adhesivo.

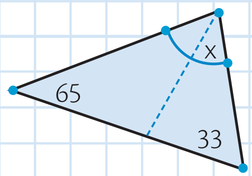
UNIDAD 5

Evaluación sumativa

Nombre:...

Grado:................. **Fecha:**.................

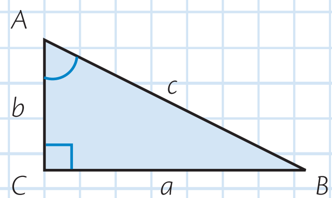
1. La medida del ángulo x es:



A. 51° B. 48°

C. 46° D. 41°

2. Para el triángulo de la figura, si c=9 y b=8, el valor de c es:



A. 1 B. $\sqrt{145}$

C. $\sqrt{17}$ D. $\sqrt{23}$

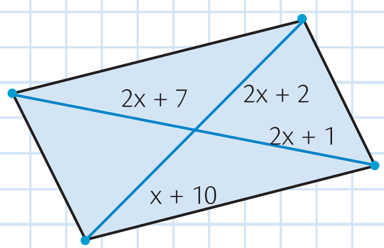
3. La medida de la diagonal es: :

A. 6

B. 12

C. 21

D. 30



4. Relaciona cada definición con el nombre correspondiente.

Punto de intersección de las bisectrices.		Altura
Segmento perpendicular desde uno de Los vértices hasta el lado opuesto.		Bisectriz
Recta perpendicular a un lado del triángulo en su punto medio.		Mediatriz
Punto de corte de las mediatrices.		Incentro
Divide al ángulo en dos ángulos congruentes.		Circuncentro
Punto de intersección de las medianas.		Mediana
Punto de intersección de las alturas.		Baricentro
Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto.		Ortocentro

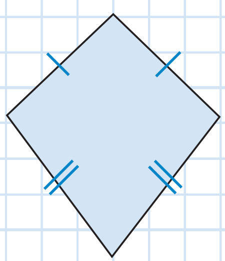
5. El cuadrilátero de la siguiente figura es un:

A. Paralelogramo

B. Trapecio

C. Trapezoide

D. Romboide



6. El área de un heptágono de 5cm de lado y apotema 4cm es :

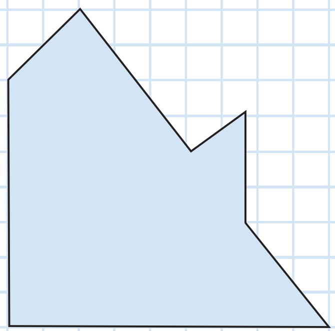
A. $100cm^2$

B. $70\ cm^2$

C. $60\ cm^2$

D. $40\ cm^2$

7. El área del polígono de la siguiente figura es:



A. $15cm^2$ B. $18cm^2$

C. $20cm^2$ D. $22cm^2$

8. El cuerpo generado por la revolución de un triángulo es:

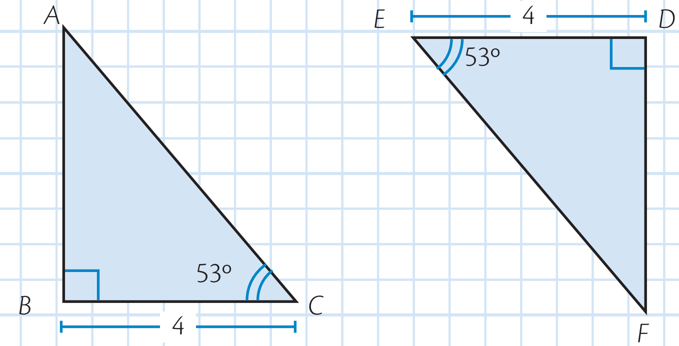
A. cono

B. esfera

C. cilindro

D. tronco de cono

9. El triángulo ABC es congruente con el triángulo FDE por el criterio.



A. L A L

B. ALA

C. L L L

D. A A A

10. Franco elaboró una cometa con forma de rombo. Si la diagonal mayor mide 8 cm y la diagonal menor mide la mitad de la mayor, la medida de la superficie de la cometa es:

A. $15\ cm^2$

B. $16\ cm^2$

C. $20\ cm^2$

D. $22\ cm^2$

UNIDAD 6 Evaluación diagnóstica

Nombre:...
Grado:................ . Fecha:................ .

1. Los estudiantes de noveno grado planearon proyectar una película, para asegurar el éxito de la actividad los estudiantes proponen realizar una encuesta. La mejor alternativa para que ésta sea útil a los intereses es:

   A. Preguntar a cada estudiante del colegio por la película que le gustaría ver

   B. Preguntar a cada estudiante del colegio por su película preferida

   C. Proponer cuatro opciones de películas de estreno y pedir a los estudiantes del colegio que seleccionen una

   D. Que cada estudiante de grado noveno proponga una película para proyectar

2. Durante la semana los empleados registraron el total de las ventas en la siguiente tabla.

Día	Ventas	
Lunes	3 500	Los días con mayor y menor frecuencia de ventas respectivamente son:
Martes	1724	
Miercoles	2030	
Jueves	1532	
Viernes	935	

   A. Martes y viernes
   B. Miércoles y viernes
   C. Lunes y viernes
   D. Lunes y jueves

3. Una encuesta realizada a jóvenes entre los 15 y 20 años, arrojó como resultado que a la mayoría de ellos les gusta observar competencias: podemos concluir que el resultado es el producto de observar:

   A. La moda de la encuesta

   B. La media aritmética de la encuesta

   C. La mediana de la encuesta

   D. La cantidad de jóvenes encuestados

4. La siguiente tabla muestra las distancias horizontales alcanzadas por Andrea.

Número de salto	1	2	3	4
Distancia (m)	1.75	1.6	1.8	1.7

   De los resultados registrados en la tabla Andrea puede concluir que el promedio de alcance horizontal es de:

   A. 6.85 m

   B. 1.71 m

   C. 1.712 m

   D. 1.72 m

5. Las edades de los estudiantes que asistieron a la biblioteca el miércoles son: 14, 13, 13, 12, 11, 15, 16, 12, 12, 15, 13 La mediana de las edades es:

   A. 12 años

   B. 15 años

   C. 13 años

   D. 14 años

6. Dados los eventos A ={2, 4, 7} y B ={3, 7, 9, 12} los elementos de A U B son:

   A. 2,3,4,7,8,12

   B. 2,3,4,7,9,12

   C. 2,3,4,5,9,12

   D. 3,4,5,8,9,12

7. En el experimento aleatorio "lanzar al aire una moneda", el espacio muestral es:

   A. 2

   B. 1

   C. 0

   D. $\frac{1}{2}$

Propósito de la unidad

Bloque de estadística y probabilidad

El bloque de estadística y probabilidad pretende que los estudiantes puedan hacerse y responder preguntas de su entorno diario y de otras ramas del conocimiento que requieran de datos y que desarrollen las habilidades necesarias para su recolección, recopilación, organización, representación e interpretación.

El estudio estadístico toma en cuenta todos los elementos referentes a población, muestra, variable, tipo de datos su representación y organización.

Se presenta un ejemplo con el cálculo de las medidas de tendencia central y dispersión con la ayuda de un programa informático.

En el análisis de probabilidades, sucesos o eventos se consideran como elementos de sus conjuntos y sus operaciones.

La resolución de problemas referidos a situaciones de probabilidades es el medio para desarrollar toda esta temática, así como la meta final de su utilidad.

Se presentarán problemas de aplicación en ejercicios referentes al cálculo de probabilidades, con la ayuda del esquema árbol de eventos y gráficas de operaciones entre conjuntos, para distinguir si los eventos son mutuamente excluyentes, incluyentes o complementarios.

Evaluaciones

Diagnóstica

La evaluación diagnóstica, además de ayudar a generar en los y las estudiantes curiosidad acerca de los temas que se estudiarán, permite anticipar o predecir los conceptos en los que se puede encontrar alguna dificultad. En este caso, los resultados le servirán al docente para planear las clases y proponer la metodología más conveniente para el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Para iniciar la unidad se hace necesario recordar las nociones de un estudio estadístico, datos y recolección de los mismos, así como también la organización, representación y cálculos de las medidas de tendencia central.

Para abordar el estudio de probabilidades es necesario que recuerde lo que es un experimento, un suceso y un evento de los posibles resultados.

Se deben recordar las operaciones entre conjuntos y algunas de sus propiedades, que relacionan los sucesos mutuamente dependientes, independientes y complementarios.

Formativa

Es muy importante que analice los avances o las dificultades que tuvieron los estudiantes al desarrollar cada actividad. Qué aprendizajes nuevos tuvieron. Esto además de darle pistas del desarrollo de los estudiantes, le permitirá motivar procesos de metacognición muy valiosos para el aprendizaje.

La evaluación formativa contempla una serie de ejercicios y problemas que permiten verificar si desarrollaron las destrezas planteadas como: interpreta datos agrupados y no agrupados en tablas de distribución de frecuencias y gráficas estadísticas con el uso de la tecnología.

Utiliza información cuantificable del contexto social, calcula e interpreta medidas de tendencia central, de dispersión y de posición.

Sumativa

La función principal de esta evaluación es identificar lo que los estudiantes aprendieron durante el desarrollo de la unidad correspondiente. Esto, además de permitir analizar cuáles son las dificultades y las fortalezas del proceso de enseñanza y aprendizaje, servirá como evidencia de que alcanzaron los logros de aprendizaje que permitirán desarrollar con fluidez los conceptos de la unidad siguiente

Se presentan una serie de problemas que permiten evaluar los logros alcanzados al inicio de la unidad y las destrezas con criterio de desempeño posteriores como: cálculo de probabilidades de eventos aleatorios, conteo de datos utilizando diagramas de árbol y probabilidades de unión e intersección de eventos o sucesos.

Respuestas

Evaluación diagnóstica

1	2	3	4	5	6	7
Ⓐ	A	Ⓐ	A	A	A	A
B	B	B	B	B	Ⓑ	B
C	Ⓒ	C	Ⓒ	Ⓒ	C	C
D	D	D	D	D	D	Ⓓ

Esquema conceptual

Conocimientos de la unidad

- Bloque de estadística y probalbilidad
  - Estudio estadístico
    - Población
    - Muestra
    - Variables
  - Representación de información estadística
  - Las medidas estadísticas
    - Herramientas de cálculo
  - Las medidas estadísticas. Herramientas de cálculo
    - Calcular en Excel
    - Calcular la media y la desviación típica en la calculadora
  - Experimentos y sucesos aleatorios. Espacios muestrales
    - Experimentos aleatorios
    - Espacio muestral
    - Evento o suceso aleatorio
    - Operaciones con eventos o sucesos

Cultura del Buen Vivir

Valor: La perseverancia

El valor de la perseverancia implica el esfuerzo continuo para lograr las metas y los objetivos propuestos en la vida y la capacidad de buscar soluciones ante los obstáculos que se presenten en el camino.

- Técnicas de conteo. Diagrama de árbol
- Probabilidad de eventos o sucesos. Regla de Laplace
  - Regla de Laplace
  - Propiedades de la probabilidad
- Probabilidad de la unión de eventos o sucesos
- Probabilidad de eventos o sucesos en experimentos compuestos
  - Regla del producto
- Probabilidad de la intersección de sucesos
  - Intersección de sucesos independientes. Probabilidad
  - Intersección de sucesos dependientes. Probabilidad

Compromiso a lograr

Mediante el desarrollo de la unidad representará gráficamente información estadística, mediante tablas de distribución de frecuencias y con el uso de la tecnología.

Interpretará y codificará información a través de gráficas. Valorará la claridad, el orden y la honestidad en el tratamiento y presentación de datos. Promoverá el trabajo colaborativo en el análisis crítico de la información recibida de los medios de comunicación.

Planificación microcurricular

Planificación de la unidad didáctica	
Unidad 6: estadística y probabilidad	
Objetivos generales del área	**Objetivos del área por subnivel**
OG.M.1. – OG.M.6.	O.M.4.2
Objetivos de subnivel	**Valores**
OI.4.1. – OI.4.12.	• La perseverancia (I.2.),
Criterios de evaluación	**Indicadores de evaluación**
CE.M.4.8.	I.M.4.8.2. – I.M.4.8.1.

Objetivos de la unidad

- Interpretar datos agrupados y no agrupados en tablas de distribución de frecuencias y gráficas estadísticas con el uso de la tecnología.
- Utilizar información cuantificable del contexto social, calcula e interpreta medidas de tendencia central, de dispersión y de posición.
- Calcular probabilidades de eventos aleatorios.

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
Estadística y probabilidad	• Definir y aplicar la metodología para realizar un estudio estadístico. • Representar funciones de forma gráfica con barras, bastones y diagramas circulares y analizar las características de las gráficas. • Calcular e interpretar las medidas de tendencia central y medidas de dispersión de un conjunto de datos en la solución de problemas. • Definir la probabilidad (empírica) y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes. • Operar con eventos (unión, intersección, diferencia y complemento) para calcular probabilidades en la resolución de problemas. • Determinar una técnica de conteo que permite enumerar los resultados posibles de un experimento.	• Explique a los estudiantes que esta clase de estadística es descriptiva, y que en ella se estudian las medidas de tendencia central y de dispersión las cuales permiten realizar análisis de información de manera adecuada y precisa. Indique la importancia de reconocer si las variables que se utilizan son cuantitativas o cualitativas. • Explique a los estudiantes la utilidad de las medidas de tendencia central para describir distribuciones de variables cuantitativas. Las representaciones gráficas de estas medidas (histogramas), permiten evidenciar la forma de la distribución y determinar si los datos se encuentran cercanos a cierto valor, o no lo están, es decir, si en los histogramas, los datos se colocan en los valores centrales y se hacen más escasos en los valores extremos; cuando esto sucede el histograma conserva una forma simétrica. Se visualizará en excel las medidas de centralización.	• Interpreta datos agrupados y no agrupados en tablas de distribución de frecuencias y gráficas estadísticas con el uso de la tecnología.	**Actividad:** resuelve problemas que conducen al cálculo de medidas de tendencia central, dispersión, además cálculo de probabilidades

Bloques curriculares	Destrezas con criterios de desempeño	Orientaciones metodológicas	Indicadores de logro	Actividades de evaluación
	• Definir la probabilidad (empírica) y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes. • Calcular la probabilidad y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes. • Operar con evento unión para calcular probabilidades en la resolución de problemas. • Calcular la probabilidad y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes. • Operar con evento intersección para calcular probabilidades en la resolución de problemas.	• El análisis de diferentes fenómenos cuyos resultados puedan o no predecirse de antemano sirve para que los estudiantes distingan las experiencias aleatorias de las deterministas. Pídales que propongan diferentes ejemplos de ambos tipos de experiencias. • Tenga en cuenta que muchos de los estudiantes confunden el espacio muestral con el espacio del suceso, acláreles la diferencia. Explíqueles que el diagrama de árbol es una técnica de conteo que permite enumerar los resultados posibles de un experimento que consta de dos o más pasos. • Proporcione suficientes ejemplos al explicar el concepto de probabilidad y la fórmula matemática que permite calcularla, y que, teóricamente, brinda información sobre qué tan probable es que suceda un evento. Insista en que, para aplicar la regla de Laplace, los sucesos deben ser equiprobables. • Recuerde a los estudiantes las operaciones entre conjuntos y, en particular, su representación gráfica. • Es importante que represente la situación que se presenta en la página del libro utilizando conjuntos. Identifique con un color diferente la unión y la intersección de los sucesos, para que comprendan cada uno de los conceptos en forma experimental para luego dar la explicación teórica.	• Utiliza información cuantificable del contexto social, calcula e interpreta medidas de tendencia central, de dispersión y de posición. • Calcula probabilidades de eventos aleatorios.	**Técnica:** observación **Instrumento:** pruebas escritas de base estructurada. **Libro del estudiante:** evaluación de la unidad

Recursos: **Reglas, Cartabón, Cintas métricas y Compás,**

Bibliografía: Libro básico de noveno grado. Cálculo con trascendentes tempranas Parte 1 James Stewart,
Indicaciones metodológicas complementarias para el trabajo con estadística y probabilidad. Colectivo de autores. Editorial pueblo y Educación.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Explique a los estudiantes que esta clase de estadística es descriptiva, y que en ella se estudian las medidas de tendencia central y de dispersión las cuales permiten realizar análisis de información de manera adecuada y precisa. Indique la importancia de reconocer si las variables que se utilizan son cuantitativas o cualitativas.

b. Sugiera a los estudiantes realizar un listado de eventos y clasificarlos. Enfatice en la identificación de variables continuas y discretas.

c. Recomiende que para hacer los recuentos de las distinta actividades se pueda utilizar el método propuesto de contar las respuestas mediante grupos de cinco palitos o barras, o también se pueden ir tachando con lápices del mismo color las palabras iguales. Puede realizar una encuesta en clase acerca de la fruta que más les gusta, y después organizar los resultados en una tabla de frecuencias.

d. Enfatice que no solamente se puede realizar de esta forma la recolección de datos sino también con entrevistas personales, telefónicas, encuestas, etc. La forma de realizar el conteo es en una tabla que tendrá dos o más columnas, la primera columna contiene las clases en que se organizaron los datos, en la segunda se ubica la frecuencia absoluta, es decir, el número de veces que se repite cada dato que se obtiene del conteo.

e. Explique a los estudiantes cómo se interpretan los resultados; hágales caer en cuenta que las frecuencias absolutas son siempre valores enteros.

1 Estudio estadístico: Población, muestra y variables

Explora

Mateo quiere saber cuál es el deporte preferido por los mil estudiantes de su colegio.

- ¿Qué podría hacer Mateo para resolver su inquietud?

Mateo podría preguntarle a cada uno de los estudiantes del colegio acerca de su deporte favorito, pero dado que se trata de un colegio con más de 3 000 estudiantes, esto no es práctico.

Entonces él podría, en su defecto, tomar al azar a diez estudiantes de cada curso y hacerles la pregunta. Con ello resolvería su inquietud.

La **estadística descriptiva** es una ciencia casi tan antigua como la humanidad. Comprende el conjunto de métodos, estrategias y procedimientos para **recolectar**, **organizar** y **analizar** datos que se pueden observar en una **población** o en una **muestra**.

Algunos conceptos importantes de un estudio estadístico son:

- La **población**. Es el grupo de elementos o características con propiedades comunes sobre las cuales se dirige un estudio estadístico.
- La **muestra**. Es un grupo más pequeño tomado de la población pero que permite obtener la misma información. A cada uno de los elementos de la población o la muestra se le denomina **individuo**.
- Un **dato**. Es el valor de la variable asociada a un elemento de la población o de la muestra.

  La Figura 1 muestra la relación que existe entre población, muestra, individuo y dato.
- Una **variable**. Es la característica de interés de cada individuo. Puede ser **cualitativa** (o de atributos), cuando se refiere a una cualidad de un elemento de la población, o **cuantitativa** (o numérica), cuando cuantifica un elemento de la población o de la muestra.

Ten en cuenta

Un estudio estadístico especifica la metodología a utilizar y los elementos considerados para el análisis de los datos que solucione el problema motivo del estudio.

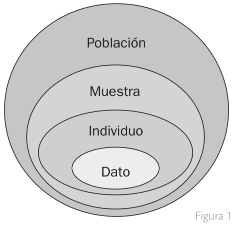


Figura 1

Ejemplo 1

Si a cada uno de los integrantes de un curso se le pregunta la edad, el peso o el número de hermanos, el de un estudio estadístico se refiere a variables cuantitativas, pero si a cada uno se le pregunta por su color preferido o por su lugar de nacimiento, se trata de variables cualitativas.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 En un centro médico se realizó una encuesta para establecer la edad, el peso y el género de los pacientes atendidos durante una semana. Especifica los elementos considerados en este estudio estadístico.

Solución:

Los elementos de este estudio estadístico se presentan en la Tabla 1.

Muestra	Individuo	Variables	Dato (Ejemplo)
Pacientes encuestados durante la semana	Cada uno de los pacientes encuestados	Edad (cuantitativa) Peso (cuantitativa) Género (cualitativa)	Edad: 23 años Peso: 62 kg Género: femenino

Tabla 1

Ten en cuenta

Hacia el año 3000 a. C., los babilonios usaban pequeñas tablillas de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola y de los géneros vendidos o cambiados mediante trueque.

Por su parte, los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides, en el siglo XXXI a. C.

Destreza con criterios de desempeño: Definir y aplicar la metodología para realizar un estudio estadístico.

Desarrolla tus destrezas

Comunicación

2 Identifica la población, la muestra y un individuo en cada uno de los siguientes estudios estadísticos.

a. Estudio sobre las materias preferidas por los estudiantes de un colegio. Se hace una encuesta a doce estudiantes de cada curso.

b. Estudio sobre la emisora radial preferida por las mujeres de una ciudad. Se entrevista a 200 mujeres de la ciudad.

c. Estudio sobre las condiciones en que se mantienen los animales del zoológico de Guayllabamba. Se estudian dos animales de cada especie.

d. Estudio sobre la opinión de una comunidad respecto a sus gobernantes. Se preguntó a dos mil personas de la zona rural y a quinientas de la zona urbana.

e. Estudio sobre la contaminación de los ríos de Ecuador. Se estudió un río de cada una de las provincias

3 Propón un título para cada uno de estos estudios. Ten en cuenta la población y la muestra.

a. **Población**: Niños y niñas ecuatorianos menores de cinco años

Muestra: Niños y niñas de una ciudad

Título: ....

b. **Población**: Jugadores profesionales de fútbol

Muestra: Jugadores profesionales de tres equipos

Título: ....

Ejercitación

4 Indica a qué tipo de variable se refieren los estudios estadísticos que se presentan a continuación.

a. Equipo de fútbol preferido por los estudiantes de un curso.

b. Número de personas que realizan transacciones por hora en un cajero automático.

c. Estatura de los integrantes de los equipos de baloncesto de un campeonato regional.

d. Número de hijos por familia de los habitantes de un conjunto residencial.

Razonamiento

5 Indica cuál es la población de cada uno de los estudios estadísticos registrados en la Tabla 2 y explica si es conveniente tomar una muestra.

Estudio estadístico	Población	Muestra
Goles marcados por cada jugador de un equipo		
Comida preferida por los clientes de un restaurante		
Número de calzado de los miembros de una familia		
Número de hermanos de los habitantes de una ciudad		

Tabla 2

6 Califica como verdadera (V) o falsa (F) cada afirmación.

a. La muestra tiene más elementos que la población.

b. El lugar de nacimiento de una persona es una variable cuantitativa.

c. La estatura de una persona es una variable cuantitativa.

d. El tiempo de duración de un viaje en avión es una variable cualitativa.

e. El número de atrasos a clase de un estudiante es una variable cualitativa.

Resolución de problemas

7 Mariana hace un estudio sobre el estado de los pupitres de su colegio. ¿Cuál es la población del estudio de Mariana? ¿Cómo podría definir una muestra de esa población? ¿A qué corresponde un individuo de este estudio?

8 Plantea dos estudios que se puedan realizar en tu comunidad. Identifica la población, la muestra y un individuo de cada estudio.

9 Explica qué ventajas tiene realizar un estudio estadístico a toda la población de una comunidad. Comenta además qué desventaja tiene elegir una muestra.

10 En un colegio se quiere hacer un estudio sobre las expectativas de los estudiantes en relación con la excursión de final del año. ¿Qué variables cuantitativas y cualitativas se deberían tener en cuenta para hacer este estudio?

Comunicación

2. **a.** Población: estudiantes del colegio; muestra: doce estudiantes de cada curso; individuo: cada estudiante.

b. Población: mujeres de la cuidad; muestra: doscientas mujeres; individuo: cada mujer de la cuidad.

c. Población: animales del zoológico la Macarena; muestra: dos animales de cada especie; individuo: cada animal.

d. Población: integrantes de la comunidad; muestra: dos mil personas de la zona rural y quinientas de la urbana; individuo: una persona de la comunidad.

e. Población: ríos del país; muestra: un río de cada provincia; individuo: cada río del país.

3. Respuesta abierta

Ejercitación

4. **a.** Cualitativa **b, c y d.** Cuantitativa

Razonamiento

5. Respuesta abierta

6. **a.** F **b.** F **c.** V **d.** F **e.** F

Resolución de problemas

7. **Población:** Todos los pupitres del colegio. Ella podría tomar como muestra los pupitres de un salón. Un individuo en este caso es un pupitre.

8. Respuesta abierta

9. Al hacer un estudio considerando toda la población, los datos que se obtienen son completamente certeros. Si al realizar un estudio la muestra no es representativa, se cae en el riesgo de obtener información sesgada e imprecisa.

10. **Cualitativas:** Posibles sitios, tipos de planes. **Cuantitativas:** Costo de los tiquetes, valor de los posibles hoteles, número de excursionitas.

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Un carácter estadístico es una propiedad que permite clasificar a los individuos de una población. Pueden ser cuantitativos cuando se pueden medir, o cualitativos cuando denotan cualidades, además no se pueden medir.

- Variable estadística son los distintos valores que puede tomar un carácter estadístico cuantitativo.
- Una variable es discreta cuando solo puede tomar valores naturales.
- Una variable es continua cuando puede tomar todos los valores de un intervalo.

La información estadística se puede representar mediante gráficas de barras y gráficas circulares que representarán los valores de la variable versus los valores de la frecuencia absoluta o relativa.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

Si preguntas a los asistentes a un teatro sobre el género de película que prefieren, ¿cuál sería la población? ¿Cuál la muestra?

Actividades colaborativas

Forme grupos de cuatro estudiantes, pídales que resuelvan el ejercicio 17 de la página 237 del texto

1 1.1 Representación de información estadística

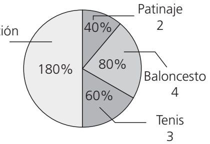


Figura 2

Ten en cuenta

La **frecuencia absoluta** indica el número de veces que se repite un dato. La suma de las frecuencias absolutas es igual al total de datos.

Ten en cuenta

Los Gráficos de bastones son muy similares a los de barras, se recomienda su uso para variables cualitativas o cuantitativas discretas cuando sus respectivas categorías son numerosas.

Actividad resuelta

Ejercitación

11 Construye la gráfica circular con los datos de la Tabla 3.

Deporte preferido	Cantidad de personas
Natación	9
Tenis	3
Baloncesto	4
Patinaje	2
TOTAL	18

Tabla 3

Solución:

Se halla la cantidad de grados que le corresponde a cada deporte mediante la relación que se indicó con anterioridad. Después, se ubican las proporciones en el círculo (Figura 2).

Natación: $\frac{360°}{18} = \frac{n°}{9} \Rightarrow n° = 180°$ Baloncesto: $\frac{360°}{18} = \frac{n°}{4} \Rightarrow n° = 80°$

Tenis: $\frac{360°}{18} = \frac{n°}{3} \Rightarrow n° = 60°$ Patinaje: $\frac{360°}{18} = \frac{n°}{2} \Rightarrow n° = 40°$

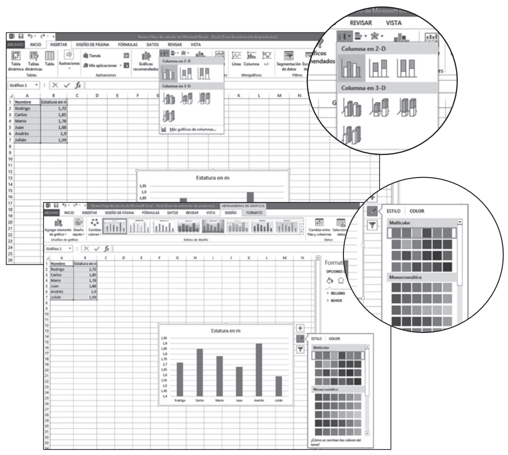
MatemaTICS

Construye una gráfica de barras con Excel

Para crear una gráfica de barras en Excel debes tener listos los datos e ir a la opción *Insertar*. Dentro del grupo *Gráficos* pulsa el botón *Insertar gráfico de barras*, y finalmente selecciona la opción *Columna agrupada*.

Una opción para cambiar el color de las barras es seleccionar el gráfico y hacer clic en el botón *Estilos de gráfico* e ir a la sección *Color*, donde puedes elegir el tono de tu preferencia.

Si ninguno de los temas de colores contiene el color que deseas utilizar, puedes abrir el panel de tareas e ir a la sección *Relleno*; allí podrás elegir el tono que prefieras o el que te permita visualizar y comparar mejor los datos.



236

Destreza con criterios de desempeño: Organizar datos procesados en tablas de frecuencias para definir la función asociada, y representarlos gráficamente con ayuda de las TIC.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

12 Lee la información y resuelve.

A 30 jóvenes se les preguntó sobre sus revistas favoritas. El resultado se recoge en la Tabla 4.

Tipo	Número de jóvenes
Deportes	10
Científicas	2
Económicas	12
Animales	5
Históricas	1

Tabla 4

a. Forma la tabla de frecuencias.

b. Representa los datos con un diagrama de barras.

c. Representa los datos mediante una gráfica circular.

Razonamiento

13 Elabora un diagrama de barras que contenga la misma información que cada gráfica circular de la Figura 3, si se sabe que estas muestran el tiempo en minutos que tardan los estudiantes de los cursos 601, 602 y 603 de un colegio en llegar a clase.

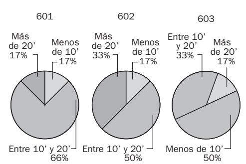


Figura 3

14 Observa la información que se muestra en el diagrama de la Figura 4, que corresponde al número de estudiantes asistentes a una práctica deportiva, y responde.

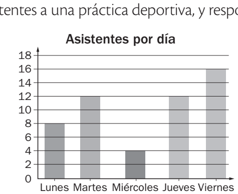


Figura 4

a. ¿Cuántos estudiantes asistieron durante la semana a la práctica?

b. ¿Qué porcentaje de estudiantes representa el día de mayor asistencia?

Comunicación

15 Observa la gráfica de la Figura 5, que muestra el resultado de un estudio sobre el sabor de gaseosa preferido por un grupo de estudiantes. Si solo cuatro personas prefieren el sabor a uva, ¿cuántas personas fueron encuestadas?

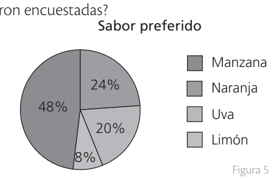


Figura 5

Resolución de problemas

16 El Gobierno promovió una campaña de reducción del gasto de agua.

El diagrama de barras de la Figura 6 representa el agua ahorrada por las familias que formaron parte de la muestra utilizada para estudiar la bondad de esta medida.

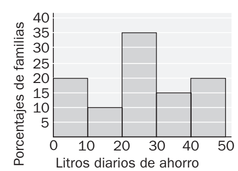


Figura 6

a. ¿Qué porcentaje de familias de la muestra ahorró entre 10 L y 30 L diarios?

b. Ocho familias de la muestra ahorraron menos de 10 L diarios. ¿Cuántas familias ahorraron entre 30 L y 40 L diarios?

17 En un supermercado se hizo un estudio sobre el tipo de refrescos vendidos en un día y se obtuvieron los datos de la Tabla 5.

Tipo	Botellas vendidas
De limón	150
De naranja	200
De cola	400
Otros	50

Tabla 5

Según la información, ¿cuál es el porcentaje de venta de cada sabor de refresco?

Ejercitación

12.

Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa			Frecuencia acumulada
	Fracción	Número decimal	Porcentaje	
10	$\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$	0,33	33%	10
2	$\frac{2}{30} = \frac{1}{15}$	0,07	7%	12
12	$\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$	0,4	40%	24
5	$\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$	0,17	17%	29
1	$\frac{1}{30}$	0,03	3%	30

13. Verificar respuesta

14. a. 52 estudiantes

b. 37.6 %

Comunicación

15. 20 personas

Resolución de problemas

16. a. 45% de las familias

b. 6 familias

17. Limón: 18,75% Naranja: 25% Cola: 50% Otros: 6,25%

Libro del alumno

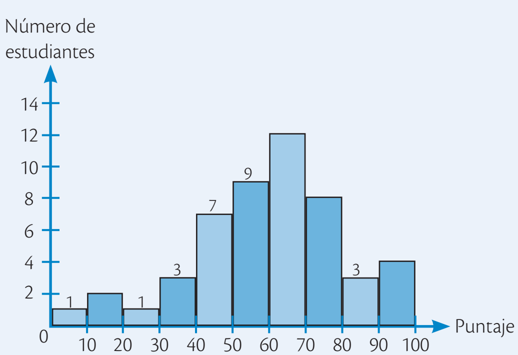
Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Explique a los estudiantes la utilidad de las medidas de tendencia central para describir distribuciones de variables cuantitativas.
Las representaciones gráficas de estas medidas (histogramas), permiten evidenciar la forma de la distribución y determinar si los datos se encuentran cercanos a cierto valor, o no lo están, es decir, si en los histogramas, los datos se colocan en los valores centrales y se hacen más escasos en los valores extremos; cuando esto sucede el histograma conserva una forma simétrica. Se visualizará en excel las medidas de centralización.

Actividades colaborativas

Forme grupos de cuatro estudiantes, pídales que resuelvan el ejercicio.

Calcula la media para los datos representados en la gráfica.



2 Las medidas estadísticas. Herramientas de cálculo

Explora

En una evaluación, Mario debía calcular la media y la desviación típica de los siguientes datos:

18	19	24	27	18	17	19	15	12
17	22	14	15	26	14	19	16	23

Figura 1

- Mario afirmó que la media es 18 y la desviación típica es 3,8. ¿Son correctas las soluciones que dio Mario? ¿De qué manera se pueden verificar rápidamente sus respuestas?

Ten en cuenta

- La sintaxis de una función en Excel se define así:

Signo igual — Fórmula — Rango

=moda(A1:H2)

El rango corresponde a los datos numéricos o textuales que se necesitan para resolver una función.

Ten en cuenta

- La media aritmética o promedio de un conjunto de datos está comprendida entre el menor y el mayor de los datos del conjunto.
- La moda no necesariamente es única, como sí lo son la media y la mediana.
- Si en un estudio estadístico el número de datos es impar, la mediana es el valor central.
- Si en el estudio estadístico el número de datos es par, la mediana es la media aritmética de los dos valores centrales.

En la actualidad existen múltiples herramientas que permiten hacer cálculos de manera rápida y sencilla. En el cálculo de las medidas estadísticas, algunas herramientas útiles son: Excel y las calculadoras científicas.

2.1 Calcular en Excel

El **programa Excel** es una herramienta de cálculo. En él, la información se organiza en hojas distribuidas en celdas. Permite registrar y operar con: datos numéricos, datos de texto y fórmulas para hacer los cálculos.

Algunas fórmulas, como las que permiten calcular las medidas estadísticas, están predeterminadas en el programa. Estas fórmulas predeterminadas se llaman **funciones** y se ajustan a una **sintaxis** particular, es decir, a una escritura organizada y determinada.

Para verificar las respuestas que obtuvo Mario para los datos de la Figura 1, se calculan las medidas en Excel, como se muestra a continuación:

1. Se introducen los datos en la hoja de cálculo, como se muestra en la Figura 2.

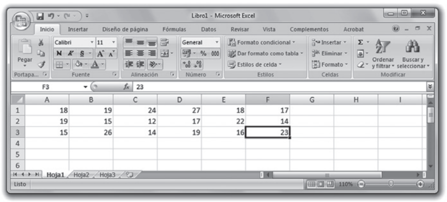


Figura 2

En este caso, el **rango** o conjunto de celdas en las que están los datos está ubicado entre las celdas A1 y F3 y se escribe así: (A1:F3).

2. Las medidas estadísticas que se desean calcular se escriben en columna y la función correspondiente se escribe en la celda de al lado, como en la Figura 3.

Figura 3

En este caso, se introdujeron las fórmulas o la sintaxis de diferentes funciones para calcular algunas medidas estadísticas: la media aritmética, la mediana, la moda, los cuartiles (Q_1, Q_2 y Q_3) y la desviación típica.

3. Después de escribir cada fórmula, se pulsa la tecla Enter y el programa hace el cálculo de la medida estadística, que aparecerá en la celda sustituyendo la función.

Destreza con criterios de desempeño: Calcular e interpretar las medidas de tendencia central y medidas de dispersión de un conjunto de datos en la solución de problemas.

Los resultados que arroja el programa se muestran en la Figura 4. Según esta información, se puede afirmar que Mario se equivocó en sus respuestas.

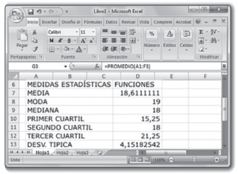


Figura 4

Ten en cuenta

Algunas funciones se obtienen pulsando primero la tecla SHIFT y a continuación la tecla correspondiente. Se debe tener en cuenta que algunas calculadoras funcionan de manera diferente a la que aquí se expone.

2.2 Calcular la media y la desviación típica en la calculadora

La **calculadora científica** permite el cálculo de medidas estadísticas.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Calcula la media aritmética y la desviación típica de los datos 8, 3, 7, 5, 9 y 9:

Solución:

1. Se deja la calculadora en modo estadístico: se pulsa MENU y se selecciona *SD*.
2. Se introducen los datos y a después de cada uno se pulsa *DATA* (o +):
   8 *DATA* 3 *DATA* 7 *DATA* 5 *DATA* 9 *DATA* 9 *DATA*
3. Si un valor se repite, se simplifica digitando el dato, el signo x y la frecuencia absoluta respectiva. Luego se pulsa *DATA*. Así, 9 x 2 *DATA*.
4. Para obtener la media aritmética, se pulsa la tecla ALPHA y 4. Así, $\overline{x} = 6{,}4$.
5. Para saber la desviación típica, se presionan ALPHA y 6. Entonces, $s = 2{,}1540$.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 A continuación se presentan las edades de los jugadores de dos equipos de fútbol.

Equipo A							
19	24	27	33	19	24	23	31
28	24	27	33	30	28	20	22
27	21	26	26	18	24	28	0

Tabla 1

Equipo B							
24	26	21	18	24	27	28	19
24	32	19	24	26	23	24	18
21	23	23	31	28	20	22	0

Tabla 2

a. Calcula en Excel la media de las edades de cada equipo, la desviación típica y el coeficiente de variación.

b. ¿En cuál equipo las edades están más agrupadas alrededor de la media?

3 Con la calculadora obtén la media y la desviación típica del siguiente conjunto de datos:

1 3 4 4 4 5 5 5 5 5 6 6 6 7 7 7 8

Resolución de problemas

4 Este es el número de faltas cometidas por partido, por dos defensas centrales, a lo largo de 18 jornadas.

Jugador A								
6	8	12	6	5	3	9	5	7
3	7	8	11	5	7	8	9	7

Tabla 3

Jugador B								
12	15	13	3	13	6	14	16	6
8	11	8	5	7	10	12	8	16

Tabla 4

a. ¿Cuál es la media y la desviación típica de los datos? ¿Qué herramienta utilizaste para hacer el cálculo?

b. Según las medidas que hallaste, ¿cuál consideras que es el jugador más regular?

2. a. Equipo A

Media: 24,25

Desviación: 6,52

CV: 0,269

Equipo B

Media: 22,71

Desviación: 5,99

CV: 0,264

b. El equipo B presenta las edades más agrupadas alrededor de la media.

3. Media: 5,17

Desviación: 1,65

Resolución de problemas

4 . a. Jugador A

Media: 7 Desviación: 2,3

Jugador B

Media: 10,16Desviación: 3,84

Se uso Excel

b. Según las medidas que halladas el jugador más regular es el B ya que tiene un mayor grado de faltas.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. El análisis de diferentes fenómenos cuyos resultados puedan o no predecirse de antemano sirve para que los y estudiantes distingan las experiencias aleatorias de las deterministas.

b. Pida que propongan diferentes ejemplos de ambos tipos de experiencias.

c. Conviene empezar construyendo espacios muestrales sencillos: el asociado al lanzamiento de una moneda o al sexo de una persona, entre otros, para que comprendan mejor su significado.

d. Pida que elaboren dos dados cúbicos cuyas caras estén marcadas con los números 1, 2, 3, 5, 7, y 8. Luego, en forma individual que escriban todos los resultados posibles.

Ampliación conceptual

Tipos de sucesos

Un suceso aleatorio es un subconjunto del espacio muestral.

- El suceso elemental es el compuesto de un solo resultado.
- El suceso compuesto es el formado por más de un resultado.
- El suceso seguro es el que siempre se realiza. Se designa por E.
- El suceso imposible es el que nunca se realiza.
- El suceso contrario del suceso A es el que se realiza cuando no se realiza A

El conjunto de todos los sucesos de un experimento aleatorio se llama espacio de sucesos. Se designa por S

3 Experimentos y sucesos aleatorios. Espacios muestrales

Explora

Uno de los juegos de dados más populares es el *craps*. Sus reglas son:

- El jugador lanza dos dados simultáneamente para observar la suma de las caras.
- Si la suma es 7 u 11, el jugador gana.
- Si la suma es 2, 3 o 12 , pierde.
- Si la suma es una cantidad diferente, el jugador repite el lanzamiento.
- ¿Cuál es el espacio muestral correspondiente para este experimento?

Al lanzar dos datos al aire, no es posible predecir el resultado que se obtendrá. Este tipo de experiencias se denominan experimentos aleatorios y todos los resultados posibles forman el **espacio muestral.**

Para el caso del juego de *craps* hay 36 resultados posibles y el espacio muestral correspondiente es:

E = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) }

Además, cada subconjunto de un espacio muestral se denomina **suceso**. Un suceso relacionado con el espacio muestral del juego puede ser: A = "Sacar números iguales". En este caso, los resultados serían:

A ={ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) }

Ten en cuenta

- El estudio de la probabilidad tuvo su origen en los juegos de azar.
- Pierre Fermat inició el estudio de la probabilidad en el siglo XVII.

Pierre Fermat

3.1 Experimentos aleatorios

Un **experimento aleatorio** es un experimento que puede repetirse varias veces. Es posible conocer todos los resultados que se pueden obtener, pero aún así no es posible determinar cuál de ellos saldrá cada vez que se lleva a cabo.

Ejemplo 1

Para elegir al ganador de un sorteo, se utiliza una ruleta que tiene diez compartimentos numerados del 0 al 9. (Figura 1)

a. ¿Se puede predecir el resultado que se va a obtener al hacer girar la ruleta?

b. ¿Cuáles son todos los resultados que se pueden obtener?

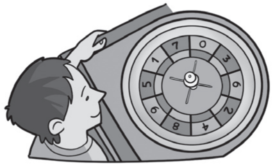


Figura 1

a. Aunque se repita muchas veces la experiencia, jamás se podrá predecir el resultado; es un experimento aleatorio.

b. Los resultados posibles son: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt15

Allí encontrarás explicaciones y ejemplos de los experimentos aleatorios.

Ejemplo 2

Se lanzan al aire dos monedas simultáneamente.

a. ¿Se puede predecir el resultado que se va a obtener al hacer cada lanzamiento?

b. ¿Qué resultados se pueden obtener?

a. Como se trata de un experimento aleatorio, no es posible determinar cuál es el resultado que se obtendrá en cada caso.

b. Los resultados que se pueden obtener son:

(cara, cara) (cara, sello)
(sello, cara) (sello, sello)

Destreza con criterios de desempeño: Definir la probabilidad (empírica) y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes.

3.2 Espacio muestral

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles que se pueden obtener al realizar un experimento aleatorio.

Ejemplo 3

Para la información del Ejemplo 1, el espacio muestral E está conformado por todos los resultados posibles, es decir:

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Ejemplo 4

Se lanza un dado, cuyas seis caras se distribuyen así: dos caras de color azul, dos caras de color rojo y dos caras de color verde. Se espera que caiga sobre una cara y se anota el resultado de la cara superior.

El espacio muestral E de este experimento es:

E = { azul, azul, rojo, rojo, verde, verde }

Ten en cuenta

Algunos datos curiosos relacionados con el cálculo de espacios muestrales en el lanzamiento de una moneda son:

- El naturalista francés Count Buffon (1707-1788) lanzó una moneda 4 040 veces y obuvo un espacio muestral de 2 048 caras y 1 992 sellos.
- El matemático australiano John Kerrich (1903-1985) lanzó una moneda 10 000 veces. El resultado que obtuvo fue 5 067 caras y 4 933 sellos.
- El científico, matemático y pensador británico Karl Pearson (1827-1936) lanzó una moneda 24 000 veces y obtuvo 12 012 caras y 11 988 sellos.

3.3 Evento o suceso aleatorio

Un evento o suceso aleatorio **elemental** es cada uno de los resultados posibles que se pueden obtener en un experimento aleatorio.

Un **suceso compuesto** corresponde a cualquier suceso que esté formado por dos o más sucesos elementales.

Ejemplo 5

Se realiza el experimento de lanzar un dado.

a. ¿Cuáles son los sucesos elementales?

b. ¿Cuál es el espacio muestral?

c. ¿Cuáles pueden ser dos sucesos compuestos?

a. Hay seis sucesos elementales, que son: sacar 1, 2, 3, 4, 5 o 6.

b. El espacio muestral es el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}

c. Son sucesos compuestos sacar un número par, cuyos resultados pueden ser "2, 4 o 6", y sacar un múltiplo de 3, que tendría como resultados posibles "3 o 6".

Ejemplo 6

Se realiza el experimento de lanzar un dado tetraédrico regular, cuyas caras están numeradas del 1 al 4. Se anota el resultado de la cara oculta.

a. ¿Cuáles son los sucesos elementales?

b. ¿Cuál es el espacio muestral?

c. ¿Cuáles pueden ser dos sucesos compuestos?

a. Hay cuatro sucesos elementales, que son: sacar 1, 2, 3 o 4.

b. El espacio muestral es el conjunto {1, 2, 3, 4}

c. Son sucesos compuestos: sacar un número menor que 3, cuyos resultados pueden ser "1 o 2", y sacar un número impar.

Ten en cuenta

La baraja española consiste en un mazo de 48 naipes o "cartas"

Tradicionalmente se divide en cuatro familias, también llamadas palos, cada uno numerado del 1 al 12, que son: oros, copas, espadas y bastos.

Las figuras corresponden a los números 10 "sota", 11 "caballo" y 12 "rey", respectivamente. Para ciertos juegos se dividen en palos cortos (oros y copas) y largos (bastos y espadas).

Históricamente se fabricaron versiones donde los mazos no traían los números 8 y 9, por lo que solamente proveían 40 naipes, esto no era infrecuente debido a que existían juegos muy populares que no los usaban. Actualmente ciertos mazos incluyen además 2 comodines, por ello pueden ser de 40, 48 o de 50 naipes dependiendo del juego.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

1. En una urna hay siete bolas numeradas del 1 al 7. Se extrae una bola al azar y se anota su número.
   a . Explica si el experimento es aleatorio.
   b . Determina el espacio muestral.
   c . Forma dos sucesos compuestos y sus contrarios.
2. En el lanzamiento de un dado, considera los siguientes eventos. Luego, halla las uniones propuestas.
   E_1: "Número impar"
   E_2: "Número menor que 3"
   Encuentra $E_1 \cup E_2$

Actividades TIC

Ingresa a ese link:

http://www.primaria.librosvivos.net/archivosCMS/3/3/16/usrios/103294/9/6EP_Mat_cas_ud15_Sucesos/frame_prim.swf

Interactúa con esta aplicación y encuentra los tipos de sucesos.

Actividades colaborativas

Forme grupos de cuatro estudiantes y resuelvan las preguntas

¿Cuántos resultados posibles hay en cada experimento aleatorio?

a. Lanzar dos dados, uno primero y el otro a continuación, y obtener suma par.

b. Lanzar dos dados, uno primero y el otro a continuación, y obtener suma impar.

c. Lanzar dos dados, uno primero y el otro a continuación, y obtener suma mayor que 6.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

Tipos de sucesos

a. Pida a los estudiantes que por parejas resuelvan la siguiente actividad y escuche las respuestas:
Javier tiene una bolsa con pinturas de color naranja, amarillo y rosa. Sin mirar saca dos pinturas para dárselas a Susana. Escribe El espacio muestral. Nombra Un suceso seguro. Nombra dos sucesos imposibles.

b. Tenga en cuenta que muchos de los estudiantes confunden el espacio muestral con el espacio del suceso, aclároles la diferencia.

c. Explique los tipos de sucesos y proponga varios ejercicios de refuerzo.

d. Recuerde las gráficas de diagramas de Veen para que representen los sucesos y las operaciones unión e intersección, para determinar sucesos compatibles e incompatibles

Actividades colaborativas

Considera el experimento de lanzar una moneda al aire tres veces.

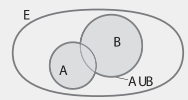
a. Escribe el espacio muestral del experimento.
b. Indica si este experimento es aleatorio y explica tu respuesta.
c. Escribe un suceso seguro, un posible y uno imposible de ese experimento
d. Para los sucesos: A = {(s, s, c), (c, c, c), (c, s, c)}; B = {(s, s, s), (c, c, c)}, escribe los sucesos contrarios. Llámalos C y D respectivamente.

3 Experimentos y eventos aleatorios. Espacios muestrales

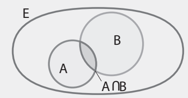
Ten en cuenta

- Los diagramas de Venn representan los sucesos y sus operaciones.

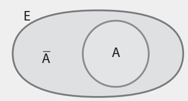
Unión de sucesos



Intersección de sucesos



Sucesos contrarios



3.4 Operaciones con eventos o sucesos

Al igual que con los conjuntos, con los sucesos aleatorios también es posible realizar las operaciones de unión e intersección.

Unión de sucesos. El suceso $A \cup B$ se da cuando se realiza A o se realiza B.

Intersección de sucesos. El suceso $A \cap B$ se da cuando se realizan simultáneamente los sucesos A y B.

Sucesos incompatibles. Dos sucesos A y B son incompatibles si no pueden realizarse simultáneamente, es decir, si $A \cap B = \varnothing$.

Ejemplo 7

Un experimento consiste en extraer una bola de una urna en la que hay 20, numeradas del 1 a 20. Se consideran los siguientes sucesos:

A: "Extraer un número primo". B: "Extraer un número par".
C: "Extraer un múltiplo de 5". D: "Extraer un divisor de 18".

a. Escribe en palabras y determina los siguientes sucesos:
$A \cup B$, $A \cap B$, $C \cap D$, $C - A$

b. Determina dos sucesos incompatibles.

a. $A \cup B$: "Extraer un número primo o un número par".
$A \cup B = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20 \}$
$A \cap B$: "Extraer un número primo y número par".
Entonces, $A \cap B = \{ 2 \}$
$C \cap D$: "Extraer un múltiplo de 5 y divisor de 18".
Así, $C \cap D = \varnothing$
$C - A$: "Extraer un múltiplo de 5 que no sea primo".
$C - A = \{ 10, 15, 20 \}$

b. C y D son sucesos incompatibles, porque $C \cap D = \varnothing$.

CULTURA del Buen Vivir

La perseverancia

La perseverancia se construye día a día con la práctica de una rutina en la que te comprometas con dedicación y un firme propósito de cumplir tus metas.

- ¿Consideras que la formación en matemáticas te ayuda a ser más perseverante? Explica.

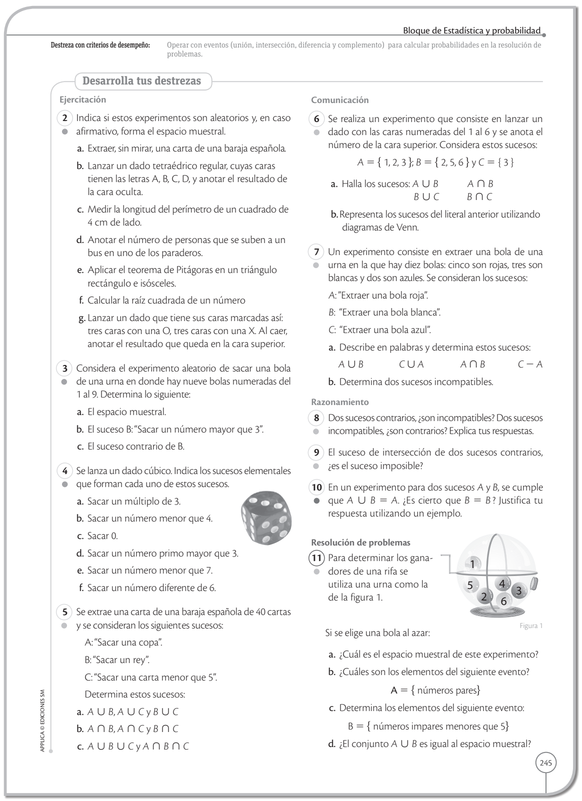
Actividad resuelta

Resolución de problemas

1. Se lanza una moneda y se consideran los siguientes sucesos:
A: "Salir cara".
B: "Salir sello".
a. ¿$A \cup B$ es el espacio muestral?
b. Determina $A - B$
c. ¿Son compatibles los sucesos A y B?

Solución:

a. $A \cup B$ es el espacio muestral, ya que $A \cup B = \{$ cara, sello $\}$.
b. $A - B = \{$ cara $\}$
c. A y B son sucesos compatibles, porque $A \cap B = \varnothing$.



Bloque de Estadística y probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Operar con eventos (unión, intersección, diferencia y complemento) para calcular probabilidades en la resolución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Indica si estos experimentos son aleatorios y, en caso afirmativo, forma el espacio muestral.

a. Extraer, sin mirar, una carta de una baraja española.

b. Lanzar un dado tetraédrico regular, cuyas caras tienen las letras A, B, C, D, y anotar el resultado de la cara oculta.

c. Medir la longitud del perímetro de un cuadrado de 4 cm de lado.

d. Anotar el número de personas que se suben a un bus en uno de los paraderos.

e. Aplicar el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo e isósceles.

f. Calcular la raíz cuadrada de un número

g. Lanzar un dado que tiene sus caras marcadas así: tres caras con una O, tres caras con una X. Al caer, anotar el resultado que queda en la cara superior.

3 Considera el experimento aleatorio de sacar una bola de una urna en donde hay nueve bolas numeradas del 1 al 9. Determina lo siguiente:

a. El espacio muestral.

b. El suceso B: "Sacar un número mayor que 3".

c. El suceso contrario de B.

4 Se lanza un dado cúbico. Indica los sucesos elementales que forman cada uno de estos sucesos.

a. Sacar un múltiplo de 3.

b. Sacar un número menor que 4.

c. Sacar 0.

d. Sacar un número primo mayor que 3.

e. Sacar un número menor que 7.

f. Sacar un número diferente de 6.

5 Se extrae una carta de una baraja española de 40 cartas y se consideran los siguientes sucesos:

A: "Sacar una copa".

B: "Sacar un rey".

C: "Sacar una carta menor que 5".

Determina estos sucesos:

a. $A \cup B$, $A \cup C$ y $B \cup C$

b. $A \cap B$, $A \cap C$ y $B \cap C$

c. $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$

Comunicación

6 Se realiza un experimento que consiste en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6 y se anota el número de la cara superior. Considera estos sucesos:

$A = \{1, 2, 3\}$; $B = \{2, 5, 6\}$ y $C = \{3\}$

a. Halla los sucesos: $A \cup B$ $A \cap B$ $B \cup C$ $B \cap C$

b. Representa los sucesos del literal anterior utilizando diagramas de Venn.

7 Un experimento consiste en extraer una bola de una urna en la que hay diez bolas: cinco son rojas, tres son blancas y dos son azules. Se consideran los sucesos:

A: "Extraer una bola roja".

B: "Extraer una bola blanca".

C: "Extraer una bola azul".

a. Describe en palabras y determina estos sucesos:

$A \cup B$ $C \cup A$ $A \cap B$ $C - A$

b. Determina dos sucesos incompatibles.

Razonamiento

8 Dos sucesos contrarios, ¿son incompatibles? Dos sucesos incompatibles, ¿son contrarios? Explica tus respuestas.

9 El suceso de intersección de dos sucesos contrarios, ¿es el suceso imposible?

10 En un experimento para dos sucesos A y B, se cumple que $A \cup B = A$. ¿Es cierto que $B = B$? Justifica tu respuesta utilizando un ejemplo.

Resolución de problemas

11 Para determinar los ganadores de una rifa se utiliza una urna como la de la figura 1.

Figura 1

Si se elige una bola al azar:

a. ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

b. ¿Cuáles son los elementos del siguiente evento?

A = { números pares}

c. Determina los elementos del siguiente evento:

B = { números impares menores que 5}

d. ¿El conjunto $A \cup B$ es igual al espacio muestral?

245

2. **a.** E = {O1, O2,..., B1, B2,..., E1, E2,..., C1, C2,... C11, C12}

b. E = {A,B,C,D} **c.** No es aleatorio

d. E = {1,2,3...} **e.** No es aleatorio

f. No es aleatorio **g.** E = {X, O}

3. **a.** E = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

b. Es un suceso elemental: sacar un número mayor que 3, cuyos resultados pueden ser "4, 5, 6, 7, 8 o 9".

c. Es un suceso elemental: sacar un número menor que 3, cuyos resultados pueden ser "1 o 2".

4. **a.** Los resultados pueden ser 3 o 6

b. Los resultados pueden ser 1, 2 o 3

c. Suceso incompatible

d. El resultado puede ser 5.

e. Los resultados pueden ser 1, 2, 3, 4, 5, 6

f. Los resultados pueden ser 1, 2, 3, 4, 5

5. **a.** A ∪ B = {C1, C2, C3, C4, C5, C6, C8, C10, C11, C12, O12, B12, E12}

A ∪ C = {C1, C2, C3, C4, C5, C6, C8, C10, C11, C12, O1, O2, O3, O4, E1, E2, E3, E4, B1, B2, B3, B4}

B ∪ C = {C12, O12, B12, E12, C1, C2, C3, C4, O1, O2, O3, O4, E1, E2, E3, E4, B1, B2, B3, B4}

b. A ∩ B = { C12}

A ∩ C = { C1, C2, C3, C4}

B ∩ C = {∅}

c. A ∪ B ∪ C = {C1, C2, C3, C4, C5, C6, C8, C10, C11, C12, O12, B12, E12, O1, O2, O3, O4, E1, E2, E3, E4, B1, B2, B3, B4}

A ∩ B ∩ C = {∅}

Comunicación

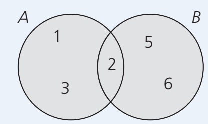
6. **a.** A ∪ B = {1,2,3,5,6}

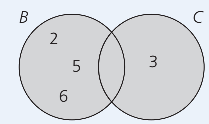
A ∩ B = {2}

B ∪ C = {2,3,5,6}

B ∩ C = {∅}

b. A ∪ B B ∪ C





7. **a.** A ∪ B = {R,R,R,R,R,B,B,B}

C ∪ A 5 {A, A, R, R ,R ,R ,R}

A ∩ B = {∅}

C − A = {A}

b. D: "Extraer una balota negra".

F: "Extraer una balota roja y blanca"

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

Tenga en cuenta que muchos de los estudiantes confunden el espacio muestral con el espacio del suceso, acláreles la diferencia. Explíqueles que el diagrama de árbol es una técnica de conteo que permite enumerar los resultados posibles de un experimento que consta de dos o más pasos.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

Actividades para desarrollar:

Se lanzan tres monedas de $ 1, $ 0,50 y $ 0,25. Forma el espacio muestral del experimento, construyendo previamente el diagrama en árbol.

En el bar del colegio exponen tres tipos de platos fuertes, dos clases de postres y tres tipos de bebidas, realiza el diagrama de árbol para conocer el espacio muestral.

Actividades TIC

En el link:

http://www.educa.jcyl.es/educacyl/cm/gallery/recursos_atica/IES%20Campo%20Charro/arbol.swf

Descubre la información y utiliza esta herramienta para aplicar la técnica de conteo de diagrama de árbol.

4 Técnicas de conteo. Diagrama de árbol

Explora

Unos estudiantes diseñan camisetas para un evento. En su diseño tienen en cuenta tres criterios tal como se muestra en la Figura 1

Talla	Motivos	Colores
S M L XL	Serio Divertido	Rojo Verde

Tabla 1

- ¿Cuántos modelos diferentes crean los estudiantes?

Para responder, es necesario efectuar el conteo de las posibles combinaciones de los tres criterios que se tienen en cuenta al elaborar cada camiseta.
Dos posibles combinaciones son:

- Camisa talla S, motivo serio y de color rojo.
- Camisa talla S, motivo divertido y color verde.

Sin embargo, hacer esta enumeración no es sencilla debido a que hay varias posibilidades de combinación. Para garantizar que se tengan en cuenta todas las combinaciones y que no se repitan, se puede utilizar un diagrama de árbol.

El **diagrama de árbol** es una técnica de conteo que permite enumerar los resultados posibles de un experimento que consta de dos o más pasos.

El diagrama de árbol correspondiente a los diseños de las camisetas es este:

Tamaños	Motivos	Colores	Resultados
S	serio	rojo	S - s - r
		verde	S - s - v
	divertido	rojo	S - d - r
		verde	S - d - v
M	serio	rojo	M - s - r
		verde	M - s - v
	divertido	rojo	M - d - r
		verde	M - d - v
L	serio	rojo	L - s - r
		verde	L - s - v
	divertido	rojo	L - d - r
		verde	L - d - v
XL	serio	rojo	XL - s - r
		verde	XL - s - v
	divertido	rojo	XL - d - r
		verde	XL - d - v

Figura 1

Para **calcular el número de combinaciones posibles,** se debe tener en cuenta que si un primer experimento tiene p resultados distintos y un segundo experimento tiene q resultados distintos, entonces el número de resultados distintos para los dos experimentos es $p \cdot q$. Por lo tanto, el caso de las camisetas se calcula así:

4 tamaños posibles $\times$ 2 motivos posibles $\times$ 2 colores posibles $=$ 16

Por lo tanto, los estudiantes deben diseñar 16 modelos diferentes de camisetas.

Actividad resuelta

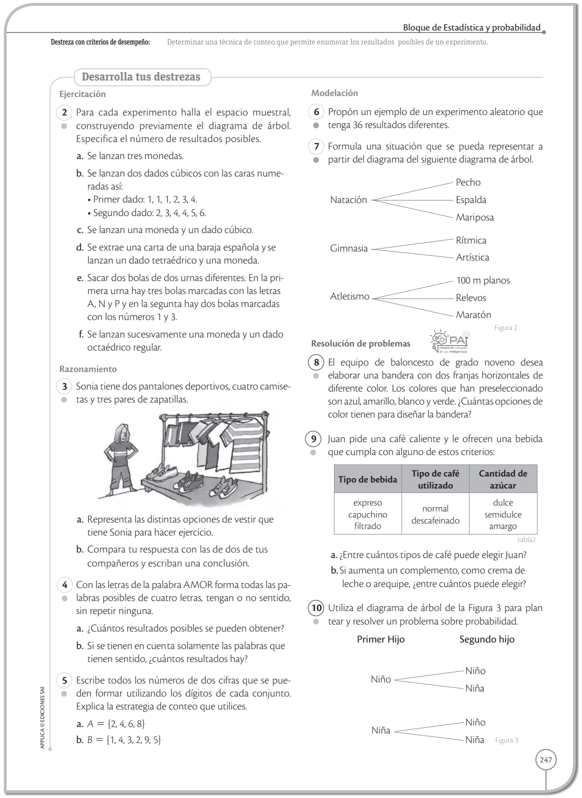
Ejercitación

1 ¿Cuántos resultados diferentes se obtendrán cuando se lanzan tres dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6?

Solución:

Como para cada dado hay seis posibles valores, el espacio muestral tendrá:

$$6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216 \text{ resultados posibles}$$



Bloque de Estadística y probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Determinar una técnica de conteo que permite enumerar los resultados posibles de un experimento.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Para cada experimento halla el espacio muestral, construyendo previamente el diagrama de árbol. Especifica el número de resultados posibles.

a. Se lanzan tres monedas.

b. Se lanzan dos dados cúbicos con las caras numeradas así:
• Primer dado: 1, 1, 1, 2, 3, 4.
• Segundo dado: 2, 3, 4, 4, 5, 6.

c. Se lanzan una moneda y un dado cúbico.

d. Se extrae una carta de una baraja española y se lanzan un dado tetraédrico y una moneda.

e. Sacar dos bolas de dos urnas diferentes. En la primera urna hay tres bolas marcadas con las letras A, N y P y en la segunta hay dos bolas marcadas con los números 1 y 3.

f. Se lanzan sucesivamente una moneda y un dado octaédrico regular.

Razonamiento

3 Sonia tiene dos pantalones deportivos, cuatro camisetas y tres pares de zapatillas.

a. Representa las distintas opciones de vestir que tiene Sonia para hacer ejercicio.

b. Compara tu respuesta con las de dos de tus compañeros y escriban una conclusión.

4 Con las letras de la palabra AMOR forma todas las palabras posibles de cuatro letras, tengan o no sentido, sin repetir ninguna.

a. ¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener?

b. Si se tienen en cuenta solamente las palabras que tienen sentido, ¿cuántos resultados hay?

5 Escribe todos los números de dos cifras que se pueden formar utilizando los dígitos de cada conjunto. Explica la estrategia de conteo que utilices.

a. $A = \{2, 4, 6, 8\}$

b. $B = \{1, 4, 3, 2, 9, 5\}$

APPLICA © EDICIONES SM

Modelación

6 Propón un ejemplo de un experimento aleatorio que tenga 36 resultados diferentes.

7 Formula una situación que se pueda representar a partir del diagrama del siguiente diagrama de árbol.

Figura 2

Resolución de problemas

8 El equipo de baloncesto de grado noveno desea elaborar una bandera con dos franjas horizontales de diferente color. Los colores que han preseleccionado son azul, amarillo, blanco y verde. ¿Cuántas opciones de color tienen para diseñar la bandera?

9 Juan pide una café caliente y le ofrecen una bebida que cumpla con alguno de estos criterios:

Tipo de bebida	Tipo de café utilizado	Cantidad de azúcar
expreso capuchino filtrado	normal descafeinado	dulce semidulce amargo

tabla2

a. ¿Entre cuántos tipos de café puede elegir Juan?

b. Si aumenta un complemento, como crema de leche o arequipe, ¿entre cuántos puede elegir?

10 Utiliza el diagrama de árbol de la Figura 3 para plan tear y resolver un problema sobre probabilidad.

Figura 3

247

Ejercitación

2. a. E = {sss,ssc,scs,scc,css,csc,ccs,ccc}

b. E = {12,13,14,14,15,16,12,13,14,14,15,16,12,13,14,14,15,16,22,23,24,24,25,26,32,33,34,34,35,36,42,43,44,44,45,46}

c. E = {S1,S2,S3,S4,S5,S6,C1,C2,C3,C4,C5,C6,}

d. (S,C):sello o cara; (1,2,3,4): lanzamientos del dado; (B,E,O,C): bastos, espadas, oros, copas con su respectiva numeración.

e. E = {A1,A3,N1,N3,P1,P3}

f. E = {S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7,S8, C1,C2,C3,C4,C5,C6,C7,C8}

Razonamiento

3. (P): pantalón, (C): camisa, (Z):zapato cada uno con su respectiva numeración.

a. E = {1P1C1Z,1P2C1Z, 1P3C1Z, 1P4C1Z, 2P1C1Z, 2P2C1Z, 2P3C1Z, 2P4C1Z, 1P1C2Z,1P2C2Z, 1P3C2Z, 1P4C2Z, 2P1C2Z, 2P2C2Z, 2P3C2Z, 2P4C2Z, 1P1C3Z,1P2C3Z, 1P3C3Z, 1P4C3Z, 2P1C3Z, 2P2C3Z, 2P3C3Z, 2P4C3Z}

4. a. 24 posibles resultados

E={AMOR,AMRO,AORM,AOMR,AROM,ARMO,OAMR,OARM,OMAR,OMRA,ORMA,ORAM,RMOA,RMAO,ROAM,ROMA,RAOM,RAMO,MAOR,MARO,MROA,MOAR,MORA,MRAO}

b. 6 posibles resultados

E = {AMOR, MORA, ROMA, OMAR,ARMO, RAMO}

5. a. E = {24,26,28,42,46,48,82,84,86,62,64,68}

b. E = {14,13,12,19,15,41,43,42,49,45,31,34,32,39,35,21,24,23,29,25,91,94,93,92,95,51,54,53,52,59}

Una estrategia puede ser dejando el primer dígito quieto e ir variando el siguiente con los demás datos.

Modelación

6. Para escoger los ingredientes en el restaurante de la escuela se tienen 3 tipos de pan (mantequilla, integral, orégano) 6 tipos de proteína (jamón, atún, pechuga, tofu, queso, pavo) y dos tipos de salsa (tomate, mostaza) ¿Cuántos tipos de sándwiches son posibles obtener en el restaurante?

7 . En un colegio cada estudiante puede escoger tres deportes como práctica deportiva (natación, gimnasia y atletismo) si cada una tiene 3, 2 y 3 (pecho, espalda, mariposa; rítmica y artística; 100m, relevos, maratón) disciplinas respectivamente ¿Cuántas posibilidades tiene cada estudiante para escoger?

Resolución de problemas

8. Se tiene doce opciones diferentes para diseñar la bandera

E = {AzAm, AzB, AzV, AmAz, AmB, AmV, BAz, BAm, BV, VAz, VAm, VB}

9. a. 18 tipos de café puede elegir Juan

E = {END, ENS, ENA, EDD, EDS, EDA, CND, CNS, CNA, CDD, CDS, CDA, FND, FNS, FNA, FDD,FDS, FDA}

b. Con dos complementos adicionales se tendría 36 tipos.

E = {ENDC, ENAC, EDDC, EDSC, EDAC, CNDC, CNSC, CNAC, CDDC, CDSC, CDAC, FNDC, FNSC, FNAC, FDDC,FDSC, FDAC, ENDA, ENSA, ENAA, EDDA, EDSA, EDAA, CNDA, CNSA, CNAA, CDDA, CDSA, CDAA, FNDA, FNSA, FNAA, FDDA,FDSA, FDAA}

10. Una pareja está planeado tener dos hijos y se preguntan por todas las posibilidades que tendrían si primero fuera niño o niña en los dos casos.

Se tendría cuatro posibilidades: (No: niño, Na: niña)

E = {NoNo, NoNa, NaNo, NaNa}

Libro del alumno

Ampliación conceptual

Probabilidad de sucesos. Regla de Laplace

Cuando se habla de un experimento o fenómeno aleatorio no se puede predecir con certeza su resultado, pero, sí se puede saber cuál de ellos tiene mayor posibilidad de ocurrir.

La probabilidad de un suceso se calcula teóricamente, con el cociente entre el número de casos favorables del suceso (CF) y el número total de casos posibles (TC).

Probabilidad de ocurrencia de un suceso o evento = número de casos favorables del suceso/ el total y la probabilidad de ocurrencia del evento Una probabilidad se interpreta en fracción o porcentaje.

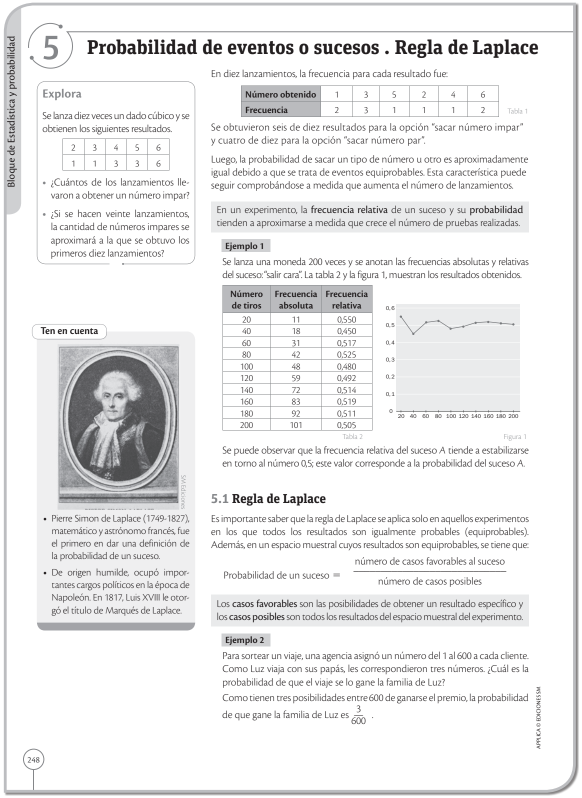
$$P(A) = \frac{CF}{TC} \text{ ó } P(A) = \frac{CF}{TC} \times 100\ \%$$

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Pida a los estudiantes que den ejemplos de experimentos aleatorios, pídales luego que los clasifiquen como posibles, seguros o imposibles algunos eventos asociados a dichos experimentos.

b. Proporcione suficientes ejemplos al explicar el concepto de probabilidad y la fórmula matemática que permite calcularla, y que, teóricamente, brinda información sobre qué tan probable es que suceda un evento. Insista en que, para aplicar la regla de Laplace, los sucesos deben ser equiprobables.

c. Una vez que los estudiantes entiendan que la probabilidad de un suceso imposible es 0 y la de un suceso seguro es 1, pídales que analicen que la probabilidad de cualquier suceso es un número comprendido entre 0 y 1, y que cualquier otro valor significa una resolución incorrecta de la situación. Proponga el desarrollo de las actividades sugeridas en la página por parejas y luego pídales que compartan las respuestas con el resto del grupo.


Bloque de Estadística y probabilidad

5 Probabilidad de eventos o sucesos . Regla de Laplace

Explora

Se lanza diez veces un dado cúbico y se obtienen los siguientes resultados.

2	3	4	5	6
1	1	3	3	6

- ¿Cuántos de los lanzamientos llevaron a obtener un número impar?
- ¿Si se hacen veinte lanzamientos, la cantidad de números impares se aproximará a la que se obtuvo los primeros diez lanzamientos?

En diez lanzamientos, la frecuencia para cada resultado fue:

Número obtenido	1	3	5	2	4	6
Frecuencia	2	3	1	1	1	2

Tabla 1

Se obtuvieron seis de diez resultados para la opción "sacar número impar" y cuatro de diez para la opción "sacar número par".

Luego, la probabilidad de sacar un tipo de número u otro es aproximadamente igual debido a que se trata de eventos equiprobables. Esta característica puede seguir comprobándose a medida que aumenta el número de lanzamientos.

En un experimento, la **frecuencia relativa** de un suceso y su **probabilidad** tienden a aproximarse a medida que crece el número de pruebas realizadas.

Ejemplo 1

Se lanza una moneda 200 veces y se anotan las frecuencias absolutas y relativas del suceso: "salir cara". La tabla 2 y la figura 1, muestran los resultados obtenidos.

Número de tiros	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
20	11	0,550
40	18	0,450
60	31	0,517
80	42	0,525
100	48	0,480
120	59	0,492
140	72	0,514
160	83	0,519
180	92	0,511
200	101	0,505

Tabla 2

Figura 1

Se puede observar que la frecuencia relativa del suceso *A* tiende a estabilizarse en torno al número 0,5; este valor corresponde a la probabilidad del suceso *A*.

Ten en cuenta

- Pierre Simon de Laplace (1749-1827), matemático y astrónomo francés, fue el primero en dar una definición de la probabilidad de un suceso.
- De origen humilde, ocupó importantes cargos políticos en la época de Napoleón. En 1817, Luis XVIII le otorgó el título de Marqués de Laplace.

5.1 Regla de Laplace

Es importante saber que la regla de Laplace se aplica solo en aquellos experimentos en los que todos los resultados son igualmente probables (equiprobables). Además, en un espacio muestral cuyos resultados son equiprobables, se tiene que:

$$\text{Probabilidad de un suceso} = \frac{\text{número de casos favorables al suceso}}{\text{número de casos posibles}}$$

Los **casos favorables** son las posibilidades de obtener un resultado específico y los **casos posibles** son todos los resultados del espacio muestral del experimento.

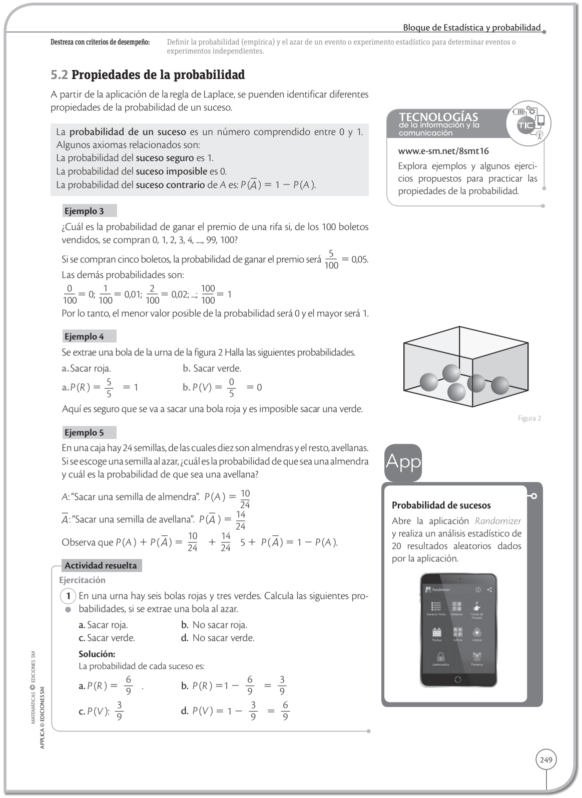
Ejemplo 2

Para sortear un viaje, una agencia asignó un número del 1 al 600 a cada cliente. Como Luz viaja con sus papás, les correspondieron tres números. ¿Cuál es la probabilidad de que el viaje se lo gane la familia de Luz?

Como tienen tres posibilidades entre 600 de ganarse el premio, la probabilidad de que gane la familia de Luz es $\frac{3}{600}$.

248

APPLICA © EDICIONES SM


Bloque de Estadística y probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Definir la probabilidad (empírica) y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes.

5.2 Propiedades de la probabilidad

A partir de la aplicación de la regla de Laplace, se puenden identificar diferentes propiedades de la probabilidad de un suceso.

La **probabilidad de un suceso** es un número comprendido entre 0 y 1. Algunos axiomas relacionados son:
La probabilidad del **suceso seguro** es 1.
La probabilidad del **suceso imposible** es 0.
La probabilidad del **suceso contrario** de *A* es: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Ejemplo 3

¿Cuál es la probabilidad de ganar el premio de una rifa si, de los 100 boletos vendidos, se compran 0, 1, 2, 3, 4, ..., 99, 100?

Si se compran cinco boletos, la probabilidad de ganar el premio será $\frac{5}{100} = 0{,}05$.
Las demás probabilidades son:
$\frac{0}{100} = 0$; $\frac{1}{100} = 0{,}01$; $\frac{2}{100} = 0{,}02$; ...; $\frac{100}{100} = 1$
Por lo tanto, el menor valor posible de la probabilidad será 0 y el mayor será 1.

Ejemplo 4

Se extrae una bola de la urna de la figura 2 Halla las siguientes probabilidades.

a. Sacar roja. b. Sacar verde.

a. $P(R) = \frac{5}{5} = 1$ b. $P(V) = \frac{0}{5} = 0$

Aquí es seguro que se va a sacar una bola roja y es imposible sacar una verde.

Figura 2

Ejemplo 5

En una caja hay 24 semillas, de las cuales diez son almendras y el resto, avellanas. Si se escoge una semilla al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea una almendra y cuál es la probabilidad de que sea una avellana?

A: "Sacar una semilla de almendra". $P(A) = \frac{10}{24}$

$\overline{A}$: "Sacar una semilla de avellana". $P(\overline{A}) = \frac{14}{24}$

Observa que $P(A) + P(\overline{A}) = \frac{10}{24} + \frac{14}{24}$ 5 + $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 En una urna hay seis bolas rojas y tres verdes. Calcula las siguientes probabilidades, si se extrae una bola al azar.

a. Sacar roja. b. No sacar roja.
c. Sacar verde. d. No sacar verde.

Solución:
La probabilidad de cada suceso es:

a. $P(R) = \frac{6}{9}$. b. $P(R) = 1 - \frac{6}{9} = \frac{3}{9}$

c. $P(V)$: $\frac{3}{9}$ d. $P(V) = 1 - \frac{3}{9} = \frac{6}{9}$

TECNOLOGÍAS de la información y la comunicación

www.e-sm.net/8smt16

Explora ejemplos y algunos ejercicios propuestos para practicar las propiedades de la probabilidad.

App

Probabilidad de sucesos

Abre la aplicación *Randomizer* y realiza un análisis estadístico de 20 resultados aleatorios dados por la aplicación.

MATEMÁTICAS © EDICIONES SM

APPLICA © EDICIONES SM

249

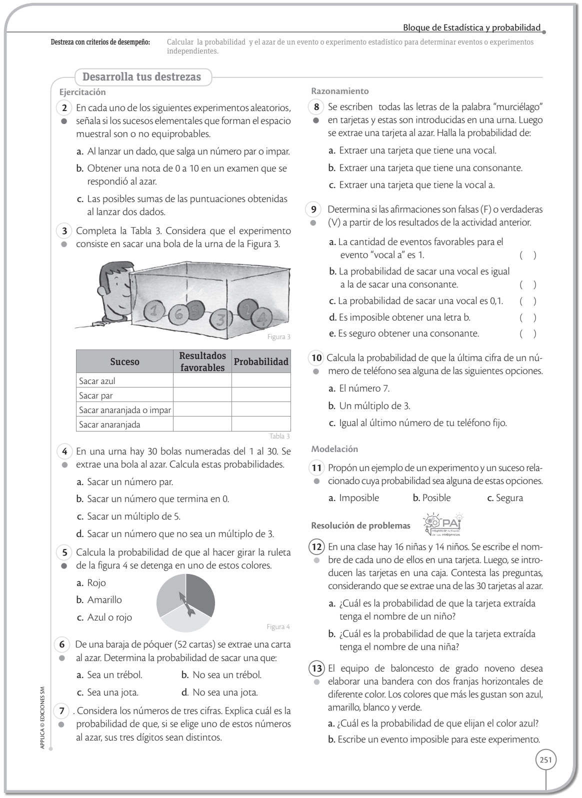
Actividades colaborativas

Forma grupos de trabajo y propón que resuelvan el ejercicio 13 de la página 251.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

Resuelve aplicando las propiedades de las probabilidades

La probabilidad de que Nancy estudie para su examen de matemáticas es 7/10 y de que estudie inglés es 1/6 ¿Cuál es la probabilidad de que haya estudiado matemáticas o inglés?



Bloque de Estadística y probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Calcular la probabilidad y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 En cada uno de los siguientes experimentos aleatorios, señala si los sucesos elementales que forman el espacio muestral son o no equiprobables.

a. Al lanzar un dado, que salga un número par o impar.

b. Obtener una nota de 0 a 10 en un examen que se respondió al azar.

c. Las posibles sumas de las puntuaciones obtenidas al lanzar dos dados.

3 Completa la Tabla 3. Considera que el experimento consiste en sacar una bola de la urna de la Figura 3.

Figura 3

Suceso	Resultados favorables	Probabilidad
Sacar azul		
Sacar par		
Sacar anaranjada o impar		
Sacar anaranjada		

Tabla 3

4 En una urna hay 30 bolas numeradas del 1 al 30. Se extrae una bola al azar. Calcula estas probabilidades.

a. Sacar un número par.

b. Sacar un número que termina en 0.

c. Sacar un múltiplo de 5.

d. Sacar un número que no sea un múltiplo de 3.

5 Calcula la probabilidad de que al hacer girar la ruleta de la figura 4 se detenga en uno de estos colores.

a. Rojo

b. Amarillo

c. Azul o rojo

Figura 4

6 De una baraja de póquer (52 cartas) se extrae una carta al azar. Determina la probabilidad de sacar una que:

a. Sea un trébol. b. No sea un trébol.

c. Sea una jota. d. No sea una jota.

7 . Considera los números de tres cifras. Explica cuál es la probabilidad de que, si se elige uno de estos números al azar, sus tres dígitos sean distintos.

Razonamiento

8 Se escriben todas las letras de la palabra "murciélago" en tarjetas y estas son introducidas en una urna. Luego se extrae una tarjeta al azar. Halla la probabilidad de:

a. Extraer una tarjeta que tiene una vocal.

b. Extraer una tarjeta que tiene una consonante.

c. Extraer una tarjeta que tiene la vocal a.

9 Determina si las afirmaciones son falsas (F) o verdaderas (V) a partir de los resultados de la actividad anterior.

a. La cantidad de eventos favorables para el evento "vocal a" es 1. ( )

b. La probabilidad de sacar una vocal es igual a la de sacar una consonante. ( )

c. La probabilidad de sacar una vocal es 0,1. ( )

d. Es imposible obtener una letra b. ( )

e. Es seguro obtener una consonante. ( )

10 Calcula la probabilidad de que la última cifra de un número de teléfono sea alguna de las siguientes opciones.

a. El número 7.

b. Un múltiplo de 3.

c. Igual al último número de tu teléfono fijo.

Modelación

11 Propón un ejemplo de un experimento y un suceso relacionado cuya probabilidad sea alguna de estas opciones.

a. Imposible b. Posible c. Segura

Resolución de problemas PAI Proyecto de Activación de las Inteligencias

12 En una clase hay 16 niñas y 14 niños. Se escribe el nombre de cada uno de ellos en una tarjeta. Luego, se introducen las tarjetas en una caja. Contesta las preguntas, considerando que se extrae una de las 30 tarjetas al azar.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta extraída tenga el nombre de un niño?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la tarjeta extraída tenga el nombre de una niña?

13 El equipo de baloncesto de grado noveno desea elaborar una bandera con dos franjas horizontales de diferente color. Los colores que más les gustan son azul, amarillo, blanco y verde.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que elijan el color azul?

b. Escribe un evento imposible para este experimento.

Ejercitación

2.a. Si es equiprobable.

b. Si es equiprobable.

c. No es equiprobable.

3.

Suceso	Resultados favorables	Probabilidad
Sacar azul	4	$\frac{2}{3}$
Sacar par	3	$\frac{1}{2}$
Sacar anaranjada o impar	1	$\frac{1}{6}$
Sacar anaranjada	2	$\frac{1}{3}$

4.a. $\frac{15}{30}$ **b.** $\frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

c. $\frac{6}{30} = \frac{1}{5}$ **d.** $\frac{20}{30} = \frac{2}{3}$

5.a. $\frac{1}{3}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{2}{3}$

6.a. $\frac{13}{52}$

b. $\frac{4}{52} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$

c. $1 - \frac{13}{52} = \frac{39}{52}$

d. $1 - \frac{4}{52} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13}$

7. Respuesta libre.

Razonamiento

8.a. $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

b. $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

c. $\frac{1}{10}$

9.a. V **b.** V **c.** F

d. V **e.** F

10.

Modelación

11.a. Imposible: La probabilidad de obtener 7 al lanzar un dado cubico.

b. Posible: La probabilidad de obtener un multiplo de 4 al lanzar un cubo octaédrico.

c. Seguro: La probabilidad de obtener sello al lanzar una moneda alterada con doble sello

Resolución de problemas

12.a. $\frac{14}{30} = \frac{7}{15}$ **b.** $\frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

13.a. $\frac{1}{4}$

b. El evento que elijan por ejemplo negro u otro color diferente a los dados.

UNIDAD 6

Evaluación formativa

Nombre:...

Grado:................ . **Fecha:**................ .

1. Determina la población, muestra y variable de la situación estadística. El colegio realiza una encuesta a 150 estudiantes sobre su deporte favorito.

2. Construye la gráfica circular con los datos de la Tabla.

Color preferido	Cantidad de personas
Rojo	8
Verde	5
Azul	3
Negro	4
Total	20

3. Calcula la media aritmética y la desviación de los datos 8, 3, 7, 5, 9 y 9

4. Se realiza el experimento de lanzar un dado.

   A. ¿Cuál es el espacio muestral?

   B. ¿Cuáles pueden ser dos sucesos compuestos?

5. Un experimento consiste en extraer una bola de una urna en la que hay 10, numeradas del 1 a 10. Se consideran los siguientes sucesos: A: “Extraer un número primo”. B: “Extraer un número impar”.

   A. Escribe en palabras y determina los siguientes sucesos: $A \cup B$, $A \cap B$?

   B. Determina dos sucesos incompatibles.

6. Construye un diagrama de árbol para determinar el espacio muestral del evento lanzar dos monedas simultáneamente

7. En una urna hay cinco bolas rojas y tres verdes. Calcula las siguientes probabilidades, si se extrae una bola al azar.

   A. Sacar una bola roja.

   B. No sacar una bola roja

1. Determina la población, muestra y variable de la situación estadística. El colegio realiza una encuesta a 150 estudiantes sobre su deporte favorito. Población: Colegio Muestra: 10 estudiantes de 15 cursos Variable: deporte favorito

2. Construye la gráfica circular con los datos de la Tabla. Verificar gráfica

Color preferido	Cantidad de personas
Rojo	8
Verde	5
Azul	3
Negro	4
Total	20

3. Calcula la media aritmética y la desviación de los datos 8, 3, 7, 5, 9 y 9.
Media aritmética =(3 + 8 + 7 + 5 + 9 + 9)/6= 6,38
Desviación =1,505

4. Se realiza el experimento de lanzar un dado.

A. ¿Cuál es el espacio muestral? El espacio muestral es el conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6}

B. ¿Cuáles pueden ser dos sucesos compuestos? Son sucesos compuestos sacar un número impar, cuyos resultados pueden ser "1, 3 o 5", y sacar un número mayor que 3, que tendría como resultados posibles "4, 5 o 6".

5. Un experimento consiste en extraer una bola de una urna en la que hay 10, numeradas del 1 a 10. Se consideran los siguientes sucesos: A: "Extraer un número primo". B: "Extraer un número impar".

A. Escribe en palabras y determina los siguientes sucesos: $A \cup B$, $A \cap B$?

A U B: "Extraer un número primo o un número impar".

A U B = {1, 3, 5, 7, 9}

$A \cap B$: "Extraer un número primo y número impar".

Entonces, $A \cap B$ ={ 1,3,5,7}

B. Determina dos sucesos incompatibles. Dos sucesos incompatibles son números múltiplos de 3 y números múltiplos del 4 en el conjunto del 1 al 10

6. Construye un diagrama de árbol para determinar el espacio muestral del evento lanzar dos monedas simultáneamente

{ (c,c), (c,s), (s,c), (s,s)}

7. En una urna hay cinco bolas rojas y tres verdes. Calcula las siguientes probabilidades, si se extrae una bola al azar.

A. Sacar una bola roja.

$\frac{5}{8}$

B. No sacar una bola roja $1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

Destrezas con criterios de desempeño	Preguntas N.°	N.° de aciertos	N.° de desaciertos	Refuerzo sí / no
Interpreta datos agrupados y no agrupados en tablas de distribución de frecuencias y gráficas estadísticas con el uso de la tecnología.	1, 2 y 3			
Utiliza información cuantificable del contexto social, calcula e interpreta medidas de tendencia central, de dispersión y de posición.	4			
Calcula probabilidades de eventos aleatorios	5, 6 y 7			

Nota: Si el número de desaciertos es mayor que el número de aciertos, los estudiantes necesitan refuerzo en la destreza.

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Recuerde a los y las estudiantes las operaciones entre conjuntos y, en particular, su representación gráfica.

b. Es importante que represente la situación que se presenta en la página del libro utilizando conjuntos. Identifique con un color diferente la unión y la intersección de los sucesos, para que comprendan cada uno de los conceptos en forma experimental para luego dar la explicación teórica

c. Se demostrará la probabilidad de sucesos incompatibles cuando los conjuntos de eventos de los ejemplos son disjuntos o no son intersecantes

d. Se demostrará la probabilidad de sucesos compatibles cuando los conjuntos de eventos de los ejemplos son intersecantes

e. Se presentan un ejemplo del lanzamiento de un dado y una actividad resuelta sobre el lanzamiento de un cubo con las caras marcadas con 0,1,1,2,3 y 4

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

Dados los eventos A = {2, 4, 7}, B ={3, 7, 9, 12}, determina A U B

Una urna contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8. Se extrae una bola al azar y se anota el número marcado en ella. Considera A ={2, 3, 5}, B = {3, 8} y C = {1, 2, 5, 7}, halla los siguientes eventos y represéntalos gráficamente. A U B y A U C

6 Probabilidad de la unión de eventos o sucesos

Explora

Isabela introdujo algunas bolas de colores en una urna.

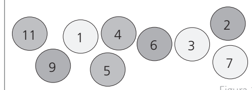


Figura 1

Ella saca una de las bolas al azar.

- ¿Cuál es la probabilidad de que saque una bola amarilla o un número par?
- ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una bola roja o un número par?

Para los experimentos propuestos se tienen en cuenta los siguientes sucesos:

A: "sacar bola amarilla" B: "sacar un número par"
C: "sacar bola roja" D: "sacar un número par"

Al analizar las bolas amarillas, identificamos que ninguna tiene número par. Luego, los sucesos A y B no pueden suceder simultáneamente. Al revisar las bolas rojas, vemos que dos de ellas tienen número par. Luego, los sucesos C y D pueden ocurrir conjuntamente. Estas condiciones varían la probabilidad de la unión de los sucesos.

La **unión de dos eventos** *A* y *B*, que pertenecen al mismo experimento, es otro suceso que incluye los resultados de los eventos A o B y se determina $A \cup B$. Luego:
- Si A y B son sucesos **incompatibles**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Si A y B son sucesos **complatibles**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Entonces, en los experimentos propuestos se obtiene lo siguiente.

Evento: sacar bola amarilla o número par	**Evento:** sacar bola roja o número par
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $= \frac{3}{9} + \frac{3}{9}$ $= \frac{6}{9}$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ $= \frac{3}{9} + \frac{3}{9} - \frac{2}{9}$ $= \frac{4}{9}$

Tabla 1

Ejemplo 1

Se lanza un dado con las caras numeradas del 1 al 6. Se consideran los sucesos *A*: "salir impar" y *B*: "salir múltiple de 4".

Al hallar el suceso $A \cup B$ y su probabilidad se tiene que $A \cup B$: "salir impar o múltiplo de 4" = {1, 3, 4, 5} $P(A \cup B) = \frac{4}{6}$.

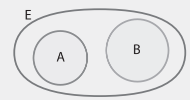
Además, al calcular $P(A) = \frac{3}{6}$ y $P(B) = \frac{1}{6}$ se verifica que:

$\frac{4}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6}$ y, por lo tanto, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Luego, *A* y *B* son incompatibles.

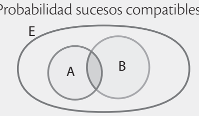
Ten en cuenta

- Probabilidad sucesos incompatibles



$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

- Probabilidad sucesos compatibles



$P(A \cup B) =$
$P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Se lanza un dado cúbico. Una de sus caras no está marcada y las otras caras están marcadas así: 1, 1, 2, 3, 4. Se consideran los siguientes sucesos.

A: "salir número primo" *B*: "salir número par"

a. ¿Cuál es el suceso $A \cup B$ y su probabilidad?

b. ¿Los sucesos *A* y *B* son compatibles? Verifícalo.

Solución:

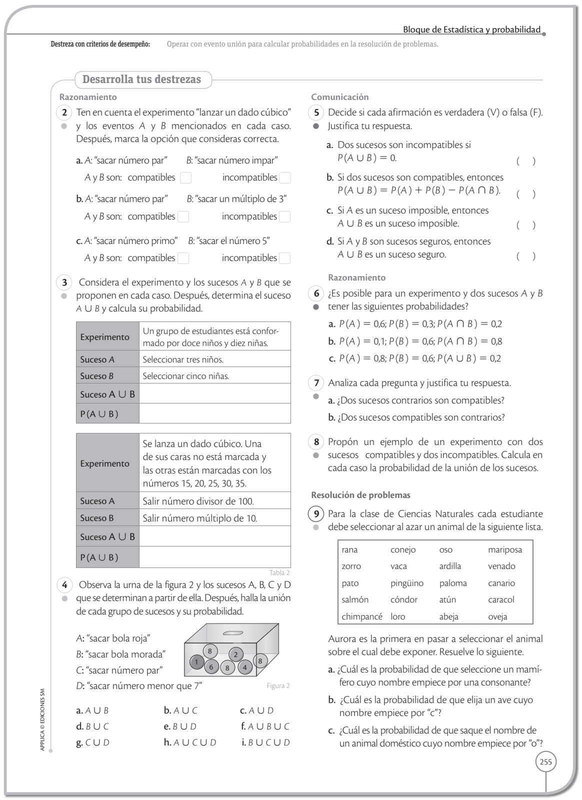
a. $P(A) = \frac{2}{6}$ y $P(B) = \frac{2}{6}$ $\rightarrow A \cup B = \{2, 3, 4\}$ y $P(A \cup B) = \frac{3}{6}$

$A \cap B = \{2\}$, entonces $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

b. Si *A* y *B* son compatibles, se cumple lo siguiente.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \rightarrow \frac{3}{6} = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$

Entonces, se verificó que *A* y *B* son compatibles.



Bloque de Estadística y probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Operar con evento unión para calcular probabilidades en la resolución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Razonamiento

2 Ten en cuenta el experimento "lanzar un dado cúbico" y los eventos A y B mencionados en cada caso. Después, marca la opción que consideras correcta.

a. A: "sacar número par" B: "sacar número impar"
A y B son: compatibles ☐ incompatibles ☐

b. A: "sacar número par" B: "sacar un múltiplo de 3"
A y B son: compatibles ☐ incompatibles ☐

c. A: "sacar número primo" B: "sacar el número 5"
A y B son: compatibles ☐ incompatibles ☐

3 Considera el experimento y los sucesos A y B que se proponen en cada caso. Después, determina el suceso $A \cup B$ y calcula su probabilidad.

Experimento	Un grupo de estudiantes está conformado por doce niños y diez niñas.
Suceso A	Seleccionar tres niños.
Suceso B	Seleccionar cinco niñas.
Suceso A ∪ B	
P(A ∪ B)	

Experimento	Se lanza un dado cúbico. Una de sus caras no está marcada y las otras están marcadas con los números 15, 20, 25, 30, 35.
Suceso A	Salir número divisor de 100.
Suceso B	Salir número múltiplo de 10.
Suceso A ∪ B	
P(A ∪ B)	

Tabla 2

4 Observa la urna de la figura 2 y los sucesos A, B, C y D que se determinan a partir de ella. Después, halla la unión de cada grupo de sucesos y su probabilidad.

A: "sacar bola roja"
B: "sacar bola morada"
C: "sacar número par"
D: "sacar número menor que 7"

Figura 2

a. $A \cup B$ **b.** $A \cup C$ **c.** $A \cup D$
d. $B \cup C$ **e.** $B \cup D$ **f.** $A \cup B \cup C$
g. $C \cup D$ **h.** $A \cup C \cup D$ **i.** $B \cup C \cup D$

Comunicación

5 Decide si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica tu respuesta.

a. Dos sucesos son incompatibles si $P(A \cup B) = 0$. ( )

b. Si dos sucesos son compatibles, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. ( )

c. Si A es un suceso imposible, entonces $A \cup B$ es un suceso imposible. ( )

d. Si A y B son sucesos seguros, entonces $A \cup B$ es un suceso seguro. ( )

Razonamiento

6 ¿Es posible para un experimento y dos sucesos A y B tener las siguientes probabilidades?

a. $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}3$; $P(A \cap B) = 0{,}2$

b. $P(A) = 0{,}1$; $P(B) = 0{,}6$; $P(A \cap B) = 0{,}8$

c. $P(A) = 0{,}8$; $P(B) = 0{,}6$; $P(A \cup B) = 0{,}2$

7 Analiza cada pregunta y justifica tu respuesta.

a. ¿Dos sucesos contrarios son compatibles?

b. ¿Dos sucesos compatibles son contrarios?

8 Propón un ejemplo de un experimento con dos sucesos compatibles y dos incompatibles. Calcula en cada caso la probabilidad de la unión de los sucesos.

Resolución de problemas

9 Para la clase de Ciencias Naturales cada estudiante debe seleccionar al azar un animal de la siguiente lista.

rana	conejo	oso	mariposa
zorro	vaca	ardilla	venado
pato	pingüino	paloma	canario
salmón	cóndor	atún	caracol
chimpancé	loro	abeja	oveja

Aurora es la primera en pasar a seleccionar el animal sobre el cual debe exponer. Resuelve lo siguiente.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que seleccione un mamífero cuyo nombre empiece por una consonante?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que elija un ave cuyo nombre empiece por "c"?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que saque el nombre de un animal doméstico cuyo nombre empiece por "o"?

255

Razonamiento

2. a. Incompatibles.

b. Compatibles

c. Compatibles

3. a. Suceso A ∪ B = {tres niños y cinco niñas}

$$P(A \cup B) = \frac{3}{22} + \frac{5}{22} = \frac{8}{22}$$

b. Suceso A ∪ B = {20,25,30}

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$$

4. a. $A \cup B = \{1,2,4,6\}$

$$P(A \cup B) = \frac{3}{7} + \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$$

b. $A \cup C = \{2,4,6,8,8,8\}$

$$P(A \cup C) = \frac{3}{7} + \frac{6}{7} - \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$$

c. $A \cup D = \{1,2,4,6\}$

$$P(A \cup D) = \frac{3}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

d. $B \cup C = \{1,2,4,6,8,8,8\}$

$$P(B \cup C) = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = \frac{7}{7}$$

e. $B \cup D = \{1,2,4,6\}$

$$P(B \cup D) = \frac{1}{7} + \frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{4}{7}$$

f. $A \cup B \cup C = \{1,2,4,6,8,8,8\}$

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{7} + \frac{1}{7} + \frac{6}{7} = \frac{10}{7}$$

g. $C \cup D = \{1,2,4,6,8,8,8\}$

$$P(C \cup D) = \frac{6}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{7}{7}$$

h. $A \cup C \cup D = \{1,2,4,6,8,8,8\}$

$$P(A \cup C \cup D) = \frac{3}{7} + \frac{6}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$

i. $B \cup C \cup D = \{1,2,4,6,8,8,8\}$

$$P(B \cup C \cup D) = \frac{1}{7} + \frac{6}{7} + \frac{4}{7} - \frac{1}{7} - \frac{3}{7} = \frac{7}{7}$$

Comunicación

5. a. F **b.** V **c.** F **d.** V

Razonamiento

6. a. No es posible

b. No es posible

c. No es posible

7. a. Dos sucesos contrarios no pueden ser compatibles ya que no tienen elementos en común.

b. No se puede dar que dos sucesos compatibles sean contrarios.

8. Pregunta abierta

9. a. $\frac{4}{20}$ **b.** $\frac{2}{20}$

c. $\frac{1}{20}$

Ampliación conceptual

Un experimento compuesto es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples.

Es decir, si tiramos un dado, o una moneda, son experimentos aleatorios simples, pero si realizamos el experimento de tirar un dado y posteriormente una moneda, estamos realizando un experimento compuesto.

En los experimentos compuestos es conveniente usar el llamado diagrama en árbol para hacerse una idea global de todos ellos.

Por ejemplo el experimento de lanzar tres monedas puede considerarse compuesto del experimento simple de lanzar una moneda tres veces seguidas.

Podemos construir el espacio muestral mediante un diagrama de árbol, como se vio anteriormente, y consta de 8 elementos:

E = {CCC, CCX, CXC, CXX, XCC, XCX, XXC, XXX}

Así la probabilidad de obtener tres caras es:

$$P(CCC) = \frac{1}{8}$$

Pero se llega al mismo resultado si se multiplica la probabilidad de obtener cara en cada uno de los tres lanzamientos:

$$P(C_1) \cdot P(C_2) \cdot P(C_3) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

Se lanza una moneda dos veces. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a. Sacar dos sellos.

b. Obtener al menos una cara.

c. No obtener ninguna cara.

Bloque de Estadística y probabilidad

7 Probabilidad de eventos o sucesos en experimentos compuestos

Explora

Se lanza una moneda y simultáneamente se hace girar la ruleta marcada con los números del 1 al 4.

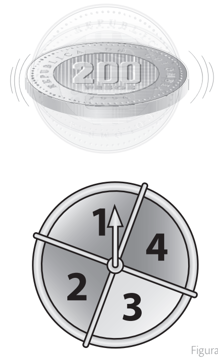


Figura 1

- ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en la moneda y tres en la ruleta?

La acción de lanzar una moneda y anotar su resultado es un experimento simple. Igualmente, hacer girar una ruleta y anotar el resultado obtenido es otro experimento simple. Por el contrario, el experimento que consiste en lanzar una moneda y girar una ruleta numerada, simultáneamente, es un experimento compuesto.

Un **experimento simple** no se puede descomponer en dos experimentos.
Un **experimento compuesto** está formado por dos o más experimentos simples.

Para determinar el espacio muestral del experimento de lanzar la moneda y girar la ruleta al tiempo, se utiliza un diagrama de árbol como el de la Figura 2

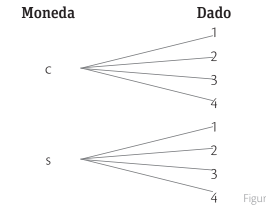


Figura 2

El espacio muestral es: $E = \{(c, 1), (c, 2), (c, 3), (c, 4), (s, 1), (s, 2), (s, 3), (s, 4)\}$

El suceso del que se quiere calcular la probabilidad es: $\{(c, 3)\}$

Por lo tanto: $P(c, 3) = \dfrac{\text{número de casos favorables}}{\text{número de casos posibles}} = \dfrac{1}{8}$

Ahora, si se calculan las probabilidades de cada suceso, se tendría:

- La probabilidad de que caiga cara en la moneda es $\frac{1}{2}$.
- La probabilidad de que salga 3 es la ruleta es $\frac{1}{4}$.

7.1 Regla del producto

En un experimento compuesto, la p**robabilidad de un camino del diagrama de árbol** es igual al producto de las probabilidades de cada una de las ramas que componen dicho camino.

Actividad resuelta

Ejercitación

1 Se lanzan dos dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6. ¿Cuál es la probabilidad de obtener par en el primer dado y múltiplo de tres en el segundo?

Solución:

En el diagrama de árbol se ubica la probabilidad de ocurrencia de cada suceso o rama. (Figura 3).

$P(\text{par y múltiplo de 3}) =$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

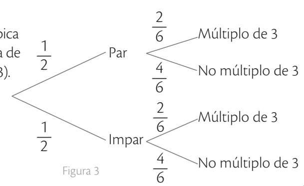


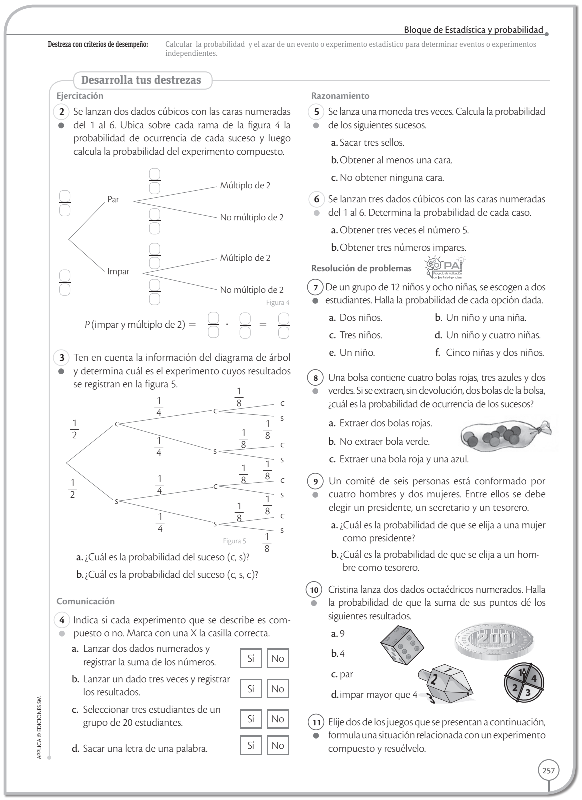
Figura 3

CULTURA del Buen Vivir

La perseverancia

Para alcanzar las metas que te propones es necesario que te sientas a gusto con lo que haces y ser constante en las tareas o rutinas necesarias para su cumplimiento.

- Cuando no comprendes fácilmente un tema de matemáticas, ¿aplicas tu perseverancia para cumplir el objetivo de aprenderlo?


Bloque de Estadística y probabilidad

Destreza con criterios de desempeño: Calcular la probabilidad y el azar de un evento o experimento estadístico para determinar eventos o experimentos independientes.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Se lanzan dos dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6. Ubica sobre cada rama de la figura 4 la probabilidad de ocurrencia de cada suceso y luego calcula la probabilidad del experimento compuesto.

Par — Múltiplo de 2; No múltiplo de 2
Impar — Múltiplo de 2; No múltiplo de 2

Figura 4

P(impar y múltiplo de 2) = $\frac{\square}{\square} \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

3 Ten en cuenta la información del diagrama de árbol y determina cuál es el experimento cuyos resultados se registran en la figura 5.

Figura 5

a. ¿Cuál es la probabilidad del suceso (c, s)?

b. ¿Cuál es la probabilidad del suceso (c, s, c)?

Comunicación

4 Indica si cada experimento que se describe es compuesto o no. Marca con una X la casilla correcta.

a. Lanzar dos dados numerados y registrar la suma de los números. Sí No

b. Lanzar un dado tres veces y registrar los resultados. Sí No

c. Seleccionar tres estudiantes de un grupo de 20 estudiantes. Sí No

d. Sacar una letra de una palabra. Sí No

Razonamiento

5 Se lanza una moneda tres veces. Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos.

a. Sacar tres sellos.

b. Obtener al menos una cara.

c. No obtener ninguna cara.

6 Se lanzan tres dados cúbicos con las caras numeradas del 1 al 6. Determina la probabilidad de cada caso.

a. Obtener tres veces el número 5.

b. Obtener tres números impares.

Resolución de problemas

7 De un grupo de 12 niños y ocho niñas, se escogen a dos estudiantes. Halla la probabilidad de cada opción dada.

a. Dos niños. b. Un niño y una niña.

c. Tres niños. d. Un niño y cuatro niñas.

e. Un niño. f. Cinco niñas y dos niños.

8 Una bolsa contiene cuatro bolas rojas, tres azules y dos verdes. Si se extraen, sin devolución, dos bolas de la bolsa, ¿cuál es la probabilidad de ocurrencia de los sucesos?

a. Extraer dos bolas rojas.

b. No extraer bola verde.

c. Extraer una bola roja y una azul.

9 Un comité de seis personas está conformado por cuatro hombres y dos mujeres. Entre ellos se debe elegir un presidente, un secretario y un tesorero.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que se elija a una mujer como presidente?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que se elija a un hombre como tesorero.

10 Cristina lanza dos dados octaédricos numerados. Halla la probabilidad de que la suma de sus puntos dé los siguientes resultados.

a. 9

b. 4

c. par

d. impar mayor que 4

11 Elije dos de los juegos que se presentan a continuación, formula una situación relacionada con un experimento compuesto y resuélvelo.

257

Ejercitación

2. $\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

3. a. P(c, s): $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b. P(c, s, c): $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Comunicación

4. a. Sí **b.** Sí **c.** No **d.** No

Razonamiento

5. a. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

b. $\frac{7}{8}$ **c.** $\frac{1}{8}$

6. a. $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot = \frac{1}{216}$

b. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

Resolución de problemas

7. a. $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

b. $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{96}$

c. $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

d. $\frac{1}{12} \cdot \frac{4}{8} = \frac{4}{96} = \frac{1}{24}$

e. $\frac{1}{12}$

f. $\frac{5}{8} \cdot \frac{2}{12} = \frac{5}{48}$

8 . a. $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$

b. $\frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9} = \frac{49}{81}$

c. $\frac{4}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{4}{27}$

9 . a. $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ **b.** $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

10. a. $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$ **b.** $\frac{8}{64} = \frac{1}{8}$

c. $\frac{32}{64} = \frac{1}{2}$ **d.** $\frac{12}{64} = \frac{3}{16}$

11. Respuesta libre

Libro del alumno

Recomendaciones para desarrollar la lección

a. Recuerde a los estudiantes las operaciones entre conjuntos unión e intersección, en particular, su representación gráfica en diagramas de Veen.

b. Es importante que represente la situación que se presenta en la página del libro utilizando conjuntos. Identifique con un color diferente la unión y la intersección de los sucesos, para que comprendan cada uno de los conceptos en forma experimental para luego dar la explicación teórica.

Actividades de refuerzo y ampliación del conocimiento

Dados los eventos A ={2, 4, 7}, B ={3, 7, 9, 12}, determina $A \cap B$

Una urna contiene ocho bolas numeradas del 1 al 8. Se extrae una bola al azar y se anota el número marcado en ella. Considera A ={2, 3, 5}, B = {3, 8} y C = {1, 2, 5, 7}, halla los siguientes eventos y represéntalos gráficamente. $A \cap B$ y $A \cap C$

Actividades TIC

En el link:

www.primaria.librosvivos.net/archivosCMS/3/3/16/usuarios/103294/9/4EP_mate_ud9_seguro_posible/frame_prim.swf

Descubre la información y utiliza esta herramienta para aplicar en la resolución de ejercicios con operaciones de probabilidades.

8 Probabilidad de la intersección de sucesos

Explora

En un experimento se lanzan simultáneamente una moneda y un dado cúbico con los números del 1 al 6.

• ¿Qué probabilidad existe de que se obtenga como resultado *A*:"cara" y *B*:"número par"?

Al lanzar simultáneamente una moneda y un dado, los dos eventos *A*:"cara" y *B*:"número par" pueden suceder al tiempo, ya que la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

Sin embargo, existen otros sucesos cuya probabilidad depende de la ocurrencia o no de otro. Tal es el caso de un experimento en el que se deba extraer una bola después de que ya se haya elegido una y no se haya vuelto a introducir en la urna.

Para poder reconocer estas relaciones entre los sucesos probabilísticos, se estudia la intersección de sucesos independientes y la intersección de sucesos dependientes.

8.1 Intersección de sucesos independientes. Probabilidad

Se considera que *A* y *B* son **sucesos independientes** si la probabilidad de que ocurra *A* no afecta la probabilidad de que ocurra *B*.

La **probabilidad** de que ocurran dos sucesos independientes simultáneamente se denota como $P(A \cap B)$ y se calcula como $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Ejemplo 1

Determina la probabilidad de obtener cara y de obtener un número par en el lanzamiento simultáneo de una moneda y un dado.

En este caso, la probabilidad de obtener "cara" es $P(A) = \frac{1}{2}$ y la probabilidad de obtener "número par" es $P(B) = \frac{1}{2}$.

Por lo tanto:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

8.2 Intersección de sucesos dependientes. Probabilidad

Se considera que *A* y *B* son **sucesos dependientes** cuando la probabilidad de ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

La **probabilidad** de **ocurrencia consecutiva** de *A* y *B* es igual a la probabilidad de que suceda *A* por la probabilidad de que suceda *B* (una vez ocurrido *A*).

Actividad resuelta

Razonamiento

1 Considera el juego de cartas de la izquierda. Si se determinan los sucesos *A*:"sacar una carta de oros" y *B*:"sacar una carta de copas", ¿cuál es la probabilidad de obtener carta de oros en la primera extracción y carta de copas en la segunda extracción.?

Solución:

• La probabilidad de obtener carta de oros en la primera extracción es: $P(A) = \frac{2}{5}$

• La probabilidad de obtener carta de copas en la segunda extracción es: $P(B) = \frac{1}{3}$

• Así, la probabilidad de la ocurrencia sucesiva de los eventos A y B es: $P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

Destreza con criterios de desempeño: Operar con evento intersección para calcular probabilidades en la resolución de problemas.

Desarrolla tus destrezas

Ejercitación

2 Ten en cuenta el experimento "seleccionar sucesivamente dos cartas de una baraja de póquer, sin devolver la primera" y los eventos *A* y *B*, mencionados en cada caso. Luego, marca con ✓ las opciones correctas.

a. *A*: "sacar un as" *B*: "sacar un as"
A y *B* son: dependientes ☐ independientes ☐

b. *A*: "sacar un as" *B*: "sacar una Q"
A y *B* son: dependientes ☐ independientes ☐

c. *A*: "sacar una Q" *B*: "sacar una J"
A y *B* son: dependientes ☐ independientes ☐

3 Considera el experimento y los sucesos *A* y *B* que se proponen en cada caso. Luego, determina el suceso *A* ∩ *B* y calcula su probabilidad.

Experimento	Lanzar dos dados cúbicos, uno rojo y otro azul. En ambos, las caras están numeradas del 1 al 6.
Suceso *A*	Sacar un número impar en el dado rojo.
Suceso *B*	Sacar un múltiplo de 3 en el dado azul.
Suceso A ∩ B	
P(A ∩ B)	

Experimento	De una urna con cinco bolas rojas y tres azules, extraer dos bolas sucesivamente, sin devolver la primera.
Suceso *A*	Sacar bola roja en el primer turno.
Suceso *B*	Sacar bola azul en el segundo turno.
Suceso A ∩ B	
P(A ∩ B)	

Tabla 1

4 Se lanzan simultáneamente dos dados (Figura 1)

Figura 1

a. Escribe el espacio muestral del experimento.
b. Halla la probabilidad de obtener 3 en el dado rojo.
c. Halla la probabilidad de sacar 4 en el dado verde.
d. Calcula la probabilidad de obtener 3 en el dado rojo y 4 en el verde.

Razonamiento

5 La baraja inglesa se compone de 52 cartas, distribuidas así: 13 corazones,13 diamantes, 13 tréboles y 13 picas.

De la baraja se extraen dos cartas con reposición, es decir, se extrae una carta, se retorna a la baraja y luego se extrae una segunda carta.

- Calcula la probabilidad de que la primera carta que se extraiga sea corazón y que la segunda sea diamante.

6 Ten en cuenta el espacio muestral del experimento: "lanzar dos monedas de igual denominación, pero de diferente color".

$E = \{(c, c), (c, s), (s, s), (s, c)\}$

Calcula la probabilidad de obtener estas opciones, considerando que una moneda es amarilla y la otra blanca.

a. Cara en la moneda amarilla.
b. Cara en la moneda blanca.
c. Sello en la moneda amarilla.
d. (c, c)

Resolución de problemas

7 En un grupo de 30 estudiantes, seis obtuvieron una nota superior a 8 en el primer examen de matemáticas. Si tres estudiantes son escogidos al azar para participar en las olimpiadas matemáticas del colegio, ¿cuál es la probabilidad de que los tres estudiantes hayan obtenido una nota superior a 8 en el primer examen de matemáticas?

8 Roberto y Carolina giran simultáneamente las perinolas de la figura 2.

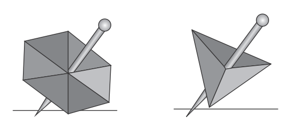


Figura 2

a. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos caigan simultaneamente en el color amarillo?
b. ¿ Cuál es la probabilidad de que al girar primero la perinola triangular, la otra caiga en el mismo color?

Ejercitación

2. a. Sucesos dependientes **b.** Sucesos dependientes
c. Sucesos dependientes

3. a. Suceso A ∩ B = 1/2 · 1/3

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

b. Suceso A ∩ B = 5/8 · 3/7

$P(A \cap B) = \frac{15}{56}$

4. a. E = {R1, R2, R3, R4, R5, R6, V1, V2, V3, V4, V5, V6}

b. $\frac{1}{6}$

c. $\frac{1}{6}$

d. $\frac{1}{35}$

Razonamiento

5. a. $\frac{1}{52}$ **b.** $\frac{1}{2704}$

6. a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{1}{2}$ d. $\frac{1}{2}$

Resolución de problemas

7. $\frac{1}{50}$

8. a. $\frac{1}{18}$ b. $\frac{1}{6}$

UNIDAD 6

Evaluación sumativa

Nombre:...

Grado:................. **Fecha:**.................

1. Se les preguntó a diez estudiantes de noveno grado por su número de hermanos y se obtuvieron estos datos: 0 2 2 0 1 2 3 1 3 1. ¿Qué porcentaje de personas tiene un hermano?

A. 50% B. 45%

C. 40% D. 30%

2. En un estudio estadístico aplicado a un grupo de personas, se consideran las siguientes variables estadísticas: estatura, edad, deporte que practica, comida favorita, número de hermanos, peso y profesión de los padres. ¿Cuáles de esas variables se pueden expresar numéricamente?

A. El deporte que practica, la comida favorita y la profesión de los padres

B. El deporte que practica, la estatua y el peso

C. La estatura, la edad, el peso y el número de hermanos

D. La estatura, la edad, el peso y el deporte que practica

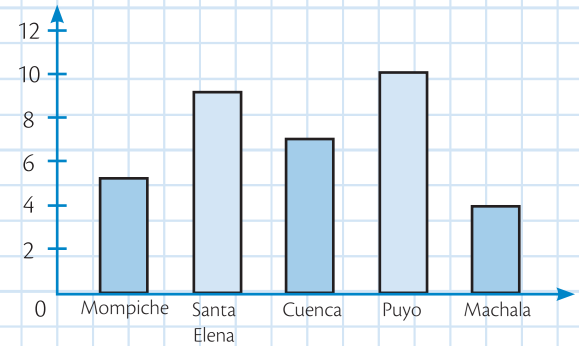
3. La marca de clase del segundo intervalo de la Tabla que muestra es:

Salario ($)	Número de empleados
[50, 70)	8
[70, 90)	10
[90, 110)	16

A. 80 B. 90

C. 100 D. 110

4. La gráfica muestra el destino preferido para realizar la excursión de fin de año.



La frecuencia relativa que representa la preferencia a Mompiche es:

A. 60,2% B. 28,3%

C. 21,7% D. 30,6%

5. La media aritmética, mediana y moda de los datos son:

Tiempo (min)	5	10	12	15	20
Número de personas	2	6	6	4	2

A. 10, 11, 12

B. 11, 12, 12

C. 12, 12, 12

D. 12, 13, 14

6. La varianza y la desviación típica de las edades 4, 8, 2 y 9 cuya media es 5,75 es:

A. 2,86

B. 3,86

C. 3,26

D. 2,26

7. En el experimento que consiste en lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6. El evento de salir un número múltiplo de 3 es:

A. {1, 3, 5}

B. {3, 6}

C. {2, 4, 6}

D. {2, 3, 4}

8. En un salón de clases hay 18 niñas y 22 niños. Si se realiza una rifa, la probabilidad de que gane una niña es:

A. 45%

B. 50%

C. 55%

D. 60%

9. Considera el experimento aleatorio de sacar una bola de una urna en donde hay nueve bolas numeradas del 1 al 9. Determina lo siguiente: El suceso B: "Sacar un número mayor que 3". El suceso contrario de B. es:

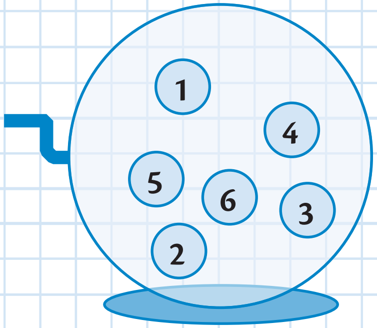
A. {4, 5, 6, 7, 8, 9}

B. {1, 2,}

C. {1, 2, 3}

D. {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

10. Los elementos del evento.



A ={ números pares} B ={ números mayores que 3} Los conjunto A ∪ B y A ∩ B son:

A. {2, 4, 5, 6} y {4, 6]

B. {1, 2, 4, 5, 6} y {3, 6]

C. {2, 4, 3, 5, 6} y {2, 6]

D. {1, 2, 4, 5,} y {4, 5]

Prueba quimestral 1

Nombre:...
Grado:................ . Fecha:................ .

1. Cuál es la medida del radio de un círculo si se conoce que la longitud de la circunferencia correspondiente mide 10 cm.

A. 10π

B. $\frac{10}{\pi}$

C. 5π

D. $\frac{5}{\pi}$

2. La luz viaja aproximadamente a 3×10^5 km por segundo. ¿Si tarda cerca De 5×10^2 segundos en llegar a la Tierra, ¿cuál es la distancia aproximada, en notación científica, del Sol a la Tierra?

A. 15×10^4

B. 15×10^5

C. 15×10^6

D. 15×10^7

3. La medida de la diagonal de un rectángulo que mide 35 mm de alto y 56 mm de largo es:

A. $\sqrt{82}$ **B.** $\sqrt{89}$

C. $\sqrt{84}$ **D.** $\sqrt{85}$

4. El área de un rectángulo es $3\sqrt{3}$ cm y su base mide $\sqrt{12}$ cm. Resuelve. La medida de la altura del rectángulo es:

A. 3 cm

B. 1,5 cm

C. 9 cm

D. 12 cm

5. La expresión que representa el área de un rectángulo cuya base es el doble de su ancho disminuido en 4 es:

A. $x^2 + 4x$

B. $4x^2 - x$

C. $x^2 +1\ 4x$

D. $2x^2 - 4x$

6. Si un lado de un rectángulo se representa con el polinomio 4a - 3b y el otro lado con el polinomio 5b - 2a, la expresión que representa su área es:

A. $8a^2 -26ab + 15b^2$

B. $10a^2 - 21ab + b^2$

C. $a^2 - 21ab + 9b^2$

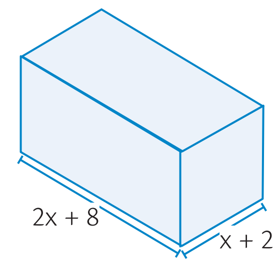
D. $5a^2 - 21ab + 5b^2$

7. Elige el factor que hace válida la igualdad $(4z - w)$. ________ $= 16z^2 - 8zw + w^2$

A. $4z - w$ **B.** $4z + w$

C. $4z - 8 + w$ **D.** $4z + 8 + w$

8. Determina las dimensiones de la caja si el volumen es igual a $6x^3 + 40x^2 + 72x + 32$



A. $3x - 2$ **B.** $3x + 2$

C. $2x + 3$ **D.** $2x - 3$

9. 10. Los factores del polinomio $4x^2 - 2xy + 9yz - 18xz$ son:

A. $(2x + y)\ (2x - 9z)$

B. $(2x - y)\ (2x + 9z)$

C. $(2x - y)\ (2x - 9z)$

D. $(2x + y)\ (2x + 9z)$

10. El producto $(3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$ como diferencia de cubos es:

A. $27x^3 - 8$

B. $9x^3 - 4$

C. $x^3 - 8$

D. $81x^3 - 8$

11. El área de la superficie plana rectangular está dada por $x^2 + 6x + 5$. Las expresiones algebraicas para las medidas de sus lados son:

A. $(x + 5)(x + 1)$

B. $(x - 6)(x + 1)$

C. $(x - 5)(x - 1)$

D. $(x - 5)(2x - 1)$

12. Carlos, David y Sergio han ganado $300 y deciden repartirlos así: Carlos tendrá $20 menos que Sergio, y David $20 menos que Carlos. El dinero que obtuvo cada uno son:

A. Carlos 80 David 100 Sergio 120

B. Carlos120 David 80 Sergio 100

C. Carlos 80 David 120 Sergio 100

D. Carlos 100 David 80 Sergio 120

13. La solución de la inecuación $5x - 18 < 12 + 3x$ es:

A. $X < 15$

B. $X < 10$

C. $X < \frac{30}{8}$

D. $X < 2$

14. La base de un rectángulo mide el doble que su altura. Las medidas de dicho rectángulo para que su perímetro sea inferior a 36 cm. Es:

A. $X < 10$

B. $X < 8$

C. $X < 6$

D. $X < 4$

15. Un viajero plantea visitar España o Italia y luego visitar Colombia, India, Perú, Brasil o China. Establece la probabilidad de que escoja Italia y un país asiático.

A. 0,2

B. 0,3

C. 0,5

D. 0,75

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Prueba quimestral 2

Nombre:..

Grado:................ Fecha:................

1. Se lanza un dado con las caras numeradas del 1 al 6. Se consideran los sucesos A: "salir impar" y B: "salir múltiplo de 4". La probabilidad de A U B es:

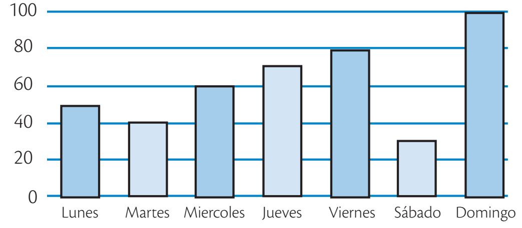
A. {3, 4, 5}

B. {3, 4, 5, 6}

C. {4, 5, 6}

D. {1, 3, 4, 5}

2. La gráfica muestra el número de almuerzos que se venden en un restaurante cada día, en la semana se vendieron:



A. 360

B. 380

C. 410

D. 430

3. La media aritmética de 120, 134, 135, 137, 123, 156, 243 es:

A. 149,7

B. 134,1

C. 132,5

D. 126,5

4. Para 34, 37, 45, 25, 56, 40, la desviación media del segundo dato es:

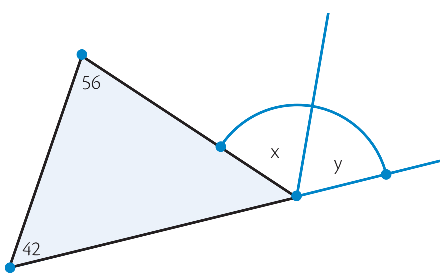
A. 0,5

B. 2,5

C. 5,5

D. 16,5

5. La medida del ángulo (x) y (y) es:



A. 98º

B. 82º

C. 49º

D. 40º

6. Un terreno tiene forma de rectángulo y otro, forma de cuadrado. El terreno rectangular tiene 32 m de largo y 18 m de ancho. Si los dos terrenos tienen el mismo perímetro, ¿cuál tiene mayor superficie?

A. El rectángulo

B. El cuadrado

C. Igual área

D. Ninguna

7. En un curso de 40 estudiantes, quince deben presentar la evaluación de matemáticas, quince deben presentar la evaluación de sociales y diez deben presentar las dos evaluaciones. Los demás no presentan ninguna evaluación. ¿Cuántos estudiantes no tienen que presentar ninguna evaluación?

A. 10 estudiantes

B. 15 estudiantes

C. 20 estudiantes

D. 25 estudiantes

8. El punto de intersección de las alturas es el:

   A. Incentro

   B. baricentro

   C. circuncentro

   D. ortocentro

9. El punto que pertenece a la recta $y = -3x + 5$ es:

   A. $(-3, 4)$

   B. $(4, 3)$

   C. $(3, -4)$

   D. $(-4, -3)$

10. La expresión verbal que relaciona una variable y con el doble de un número x más uno se puede representar mediante:

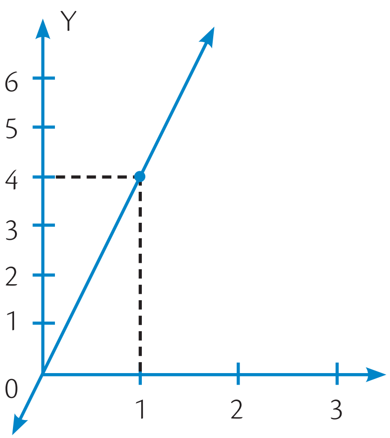
   A. $y = 1$

   B. $y = 2x - 1$

   C. $y = 2x + 1$

   D. $y = -2x + 1$

11. La ecuación que corresponde a la gráfica es:



   A. $y = 4x$

   B. $y = -4x$

   C. $y = \frac{1}{2}x$

   D. $y = -\frac{1}{2}x$

12. Siendo los conjuntos A={a,b,c} y B={2,4,6}.Son elementos del producto cartesiano BxA

   A. (a, 2), (b, 6)

   B. (c, b), (b, c)

   C. (2, a), (c, 6)

   D. (4, c), (6, a)

13. Dado el conjunto A={1, 2, 3, 4, 5} y la relación en A dada por los elementos: {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 5), (2, 3), (3, 2), (5, 1).
   Las propiedades que cumplen los elementos de la relación es:

   A. Reflexiva, simétrica y transitiva

   B. Reflexiva y simétrica

   C. Simétrica y transitiva

   D. Reflexiva y transitiva

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B	B
C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C	C
D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D

Bibliografía

Abdón Montenegro, Ignacio. *Evaluemos competencias matemáticas*. Cooperativa Editorial Magisterio, Bogotá, 1999.

Alem, Jean-Pierre. *Nuevos juegos de ingenio y entretenimiento matemático.* Editorial Gedisa, Barcelona, España, 1990.

Alsina Catalá, Claudi; Burgués F., Carme; Fortuny A., Josep María. *Materiales para construir la geometría*. Editorial Síntesis, Madrid, 1995.

Andonegui, Martín. *El sistema numérico decimal*. Caracas: Federación Internacional Fe y Alegría, 2004.

Boyer, Carl B. *Historia de la matemática*. Alianza Editorial, España, 2007.

Castro, Encarnación; Rico, Luis; Castro, Enrique. *Números y operaciones*. Editorial Síntesis, Madrid, 1996.

Centeno Pérez, Julia. *Matemáticas: cultura y aprendizaje 5*. Editorial Síntesis, España, 1997.

Clemens *et al*. Serie Awli. *Geometría*. Pearson Educación, México, 1998.

De Prada V., María Dolores. *Cómo enseñar las magnitudes, la medida y la proporcionalidad*. Ágora, Málaga, España, 1990.

Dickson, Linda; Brown Margaret; Gibson Olwen. *El aprendizaje de las matemáticas*. Editorial Labor, Madrid, España, 1991.

Doran, Jody L.; Hernández, Eugenio. *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Pearson-Addison Wesley V. A. M, Madrid, 1994.

Fournier, Jean-Louis. *Aritmética aplicada e impertinente*. Editorial Gedisa, Barcelona, España, 1995.

Jouette, André. *El secreto de los números*. Intermedio Editores, Bogotá, 2002.

Küchemann, D. The meaning children give to the letters in generalised arithmetic. En: *Cognitive Development Research in Sci. and Math*, 1980. The University of Leeds, págs. 28-33.

Leithold, Louis. *El cálculo con geometría analítica*. Harla, S. A. de C.V., México, 1972.

Mason, J.; Burton, L.; Stacey, K. *Pensar matemáticamente*. MEC/Labor, 1992.

Moise, Edwin; Downs, Floyd. *Geometría moderna*. Addison Wesley, Estados Unidos, 1966.

Perelman, Yakov. *Aritmética recreativa*. Editorial Mir, Moscú, 1986.

Polya, George. *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas, México, 1989.

Resnick, Robert. *Física volúmenes I y II*. Compañía Editorial Continental S. A., España, 1996.

Rich, Barnett. *Geometría*. McGraw-Hill, México, 1991.

Socas, Martín M.; Camacho, Matías; Palarea, Mercedes; Hernández, Josefa. *Iniciación al álgebra*. Editorial Síntesis, México, 1991.

Spiegel, Murray R. *Probabilidad y estadística*. McGraw-Hill, México, 1975.

Suppes, Patrick; Hill, Shirley. *Introducción a la lógica matemática*. Editorial Reverté S. A., Colombia, 1976.

Swokowski, Earl; Cole, Jeffery. *Álgebra y Trigonometría con geometría analítica*. International Thomson Editores, México, 1998.

Tahan, Malba. *El hombre que calculaba*. Ed. Limusa, México, 1988.

Zill, Dennis; Dewar, Jacqueline. *Álgebra y trigonometría*. McGraw -Hill,Colombia, 2000.

Webgrafía

Banco de Objetos Multimedia Educativos. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://www3.gobiernodecanarias.org/medusa/eltanquematematico/

Banco de Objetos Multimedia Educativos. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://www.genmagic.net/

Cómo mentir con estadísticas. [Consulta: abril de 2015]. Disponible en: http://www.econ.uba.ar/www/departamentos/administracion/plan97/adm_financiera/De%20La%20Fuente/Como_mentir_con_estadisticas.pdf

Diccionario de la Real Academia Española. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://www.rae.es/

Disfruta las matemáticas. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://www.disfrutalasmatematicas.com/puzzles/

El Patio de los Leones de la Alhambra. [Consulta: abril de 2015]. Disponible en: http://www.diariodelviajero.com/museos/el-patio-de-los-leones-de-la-alhambra

Geometría recreativa de Yacob Perelman. [Consulta: mayo de 2015]. Disponible en: http://jnsilva.ludicum.org/HMR13_14/Perelman_Geometry.pdf

Números astronómicos. [Consulta: abril de 2015]. Disponible en: http://es.docsity.com/es-docs/Numeros_Astronomicos_-_Apuntes_-_Astronomia_

¿Qué es una bolsa de valores? [Consulta: abril de 2015]. Disponible en: http://dinero.about.com/od/Ahorrando/a/que-Es-Una-Bolsa-De-Valores.htm