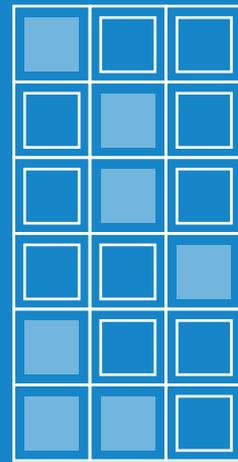
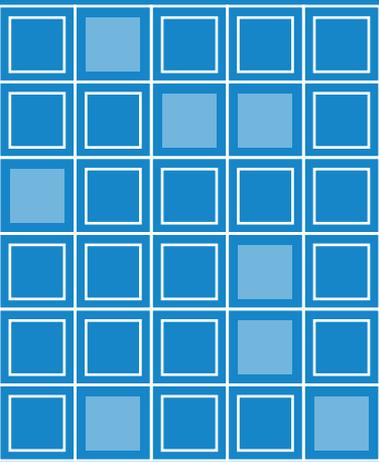




Bachillerat General Unificado



MATEMÁTICA

2.º Curso
GUÍA DEL DOCENTE

DISTRIBUCIÓN GRATUITA
PROHIBIDA SU VENTA



Ministerio
de Educación

Transformar la educación
MISIÓN DE TODOS

PRESIDENTE DE LA REPÚBLICA
Rafael Correa Delgado

MINISTRO DE EDUCACIÓN
Augusto Espinosa Andrade

Viceministro de Educación
Freddy Peñafiel Larrea

Viceministro de Gestión Educativa
Wilson Rosalino Ortega Mafla

Subsecretario de Fundamentos Educativos (E)
Miguel Ángel Herrera Pavo

Subsecretaria de Administración Escolar
Mirian Maribel Guerrero Segovia

Directora Nacional de Currículo (S)
María Cristina Espinosa Salas

Directora Nacional de Operaciones y Logística
Ada Leonora Chamorro Vásquez

© Ministerio de Educación del Ecuador, 2016
Av. Amazonas N34-451 y Atahualpa
Quito, Ecuador
www.educacion.gob.ec

La reproducción parcial o total de esta publicación, en cualquier forma y por cualquier medio mecánico o electrónico, está permitida siempre y cuando sea autorizada por los editores y se cite correctamente la fuente.



Editorial Don Bosco
OBRAS SALESIANAS DE COMUNICACIÓN

Marcelo Mejía Morales
Gerente general

Eder Acuña Reyes
Dirección editorial

Sylvia Freile Montero
Adaptación y edición de contenidos

Sylvia Freile Montero
Creación de contenidos nuevos

Luis Felipe Sánchez
Coordinación de estilo

Luis Felipe Sánchez
Revisión de estilo

Pamela Cueva Villavicencio
Coordinación gráfica

Pamela Cueva Villavicencio
Diagramación

Darwin Parra
Ilustración

Darwin Parra
Diseño de portada e ilustración

En alianza con

Grupo edebé
Proyecto: Matemáticas 1
Bachillerato primer curso

Antonio Garrido González
Dirección general

José Luis Gómez Cutillas
Dirección editorial

José Francisco Vílchez Román
Dirección de edición de Educación Secundaria

Santiago Centelles Cervera
Dirección pedagógica

Juan López Navarro
Dirección de producción

Equipo de edición Grupo edebé
© grupo edebé, 2008
Paseo San Juan Bosco, 62
08017 Barcelona
www.edebe.com



ISBN 978-9942-23-049-2
Primera impresión: julio 2016
Este libro fue evaluado por la Universidad Tecnológica Equinoccial, y obtuvo la certificación curricular del Ministerio de Educación el 30 de mayo de 2016.

ADVERTENCIA

Un objetivo manifiesto del Ministerio de Educación es combatir el sexismo y la discriminación de género en la sociedad ecuatoriana y promover, a través del sistema educativo, la equidad entre mujeres y hombres. Para alcanzar este objetivo, promovemos el uso de un lenguaje que no reproduzca esquemas sexistas, y de conformidad con esta práctica preferimos emplear en nuestros documentos oficiales palabras neutras, tales como las personas (en lugar de los hombres) o el profesorado (en lugar de los profesores), etc. Sólo en los casos en que tales expresiones no existan, se usará la forma masculina como genérica para hacer referencia tanto a las personas del sexo femenino como masculino. Esta práctica comunicativa, que es recomendada por la Real Academia Española en su Diccionario Panhispánico de Dudas, obedece a dos razones: (a) en español es posible <referirse a colectivos mixtos a través del género gramatical masculino>, y (b) es preferible aplicar <la ley lingüística de la economía expresiva> para así evitar el abultamiento gráfico y la consiguiente ilegibilidad que ocurriría en el caso de utilizar expresiones como las y los, os/as y otras fórmulas que buscan visibilizar la presencia de ambos sexos.



Ministerio
de **Educación**



Este libro de texto que tienes en tus manos es una herramienta muy importante para que puedas desarrollar los aprendizajes de la mejor manera. Un libro de texto no debe ser la única fuente de investigación y de descubrimiento, pero siempre es un buen aliado que te permite descubrir por ti mismo la maravilla de aprender.

El Ministerio de Educación ha realizado un ajuste curricular que busca mejores oportunidades de aprendizaje para todos los estudiantes del país en el marco de un proyecto que propicia su desarrollo personal pleno y su integración en una sociedad guiada por los principios del Buen Vivir, la participación democrática y la convivencia armónica.

Para acompañar la puesta en marcha de este proyecto educativo, hemos preparado varios materiales acordes con la edad y los años de escolaridad. Los niños y niñas de primer grado recibirán un texto que integra cuentos y actividades apropiadas para su edad y que ayudarán a desarrollar el currículo integrador diseñado para este subnivel de la Educación General Básica. En adelante y hasta concluir el Bachillerato General Unificado, los estudiantes recibirán textos que contribuirán al desarrollo de los aprendizajes de las áreas de Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, Lengua y Literatura, Matemática y Lengua Extranjera-Inglés.

Además, es importante que sepas que los docentes recibirán guías didácticas que les facilitarán enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir del contenido del texto de los estudiantes, permitiendo desarrollar los procesos de investigación y de aprendizaje más allá del aula.

Este material debe constituirse en un apoyo a procesos de enseñanza y aprendizaje que, para cumplir con su meta, han de ser guiados por los docentes y protagonizados por los estudiantes.

Esperamos que esta aventura del conocimiento sea un buen camino para alcanzar el Buen Vivir.

Ministerio de Educación

2016

CÓMO ES LA GUÍA. PROGRAMACIÓN Y ORIENTACIONES DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS

Conoce
TU
GUÍA

Unidad 0

UNIDAD 0

Competencias previas

Orientación didáctica

En esta unidad se hace un desarrollo de competencias previas relacionadas con la formación de los conocimientos matemáticos y, sobre todo, con el álgebra lineal. Es importante que se reconozca el rol de la tecnología.

El propósito que se establece es reconocer la importancia de cada función en las diferentes situaciones de la vida cotidiana y en los contextos de los problemas que se plantean. Se sugiere que se trabaje en grupos y se fomente la participación de todos los estudiantes.

Se sugiere que se trabaje con situaciones que involucren en la vida cotidiana y en los contextos de los problemas que se plantean. Se sugiere que se trabaje en grupos y se fomente la participación de todos los estudiantes.

Banco de preguntas

BANCO DE PREGUNTAS

1. ¿Qué es una cónica?
2. ¿Cuál es la ecuación general de las cónicas?
3. ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de una recta fija y un punto fijo llamado foco?
4. Ecuación cónica que se usó para modelar los picos de las cónicas de TV.
5. Ecuación cónica que incluye dos lugares geométricos llamados focos.
6. Ecuación cuadrática de dos variables en la que ambos cuadrado tienen signo desigual.
7. ¿Cómo identificar si una elipse tiene su eje mayor paralelo al eje x o paralelo al eje de los y?
8. ¿Cuál es la diferencia entre las excentricidades de los ejes de la hipérbola?
9. ¿Qué es el lado recto de una cónica?
10. ¿Qué representa la excentricidad?

Evaluación diagnóstica

Evaluación diagnóstica

Indicadores de aprendizaje	Nivel
1. Obtener un plano cartesiano los ejes rectos, para: A. G. (2, 3), B. (4, 1), C. (-2, -3), D. (4, -2)	4. Completar el siguiente cuadro los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos de los triángulos.
2. En el siguiente cuadro escribir el nombre del triángulo en el que se está cada punto del siguiente cuadro:	5. Completar los valores con los funciones trigonométricas de los ángulos.
3. En la gráfica representada en el plano cartesiano:	6. En una circunferencia de radio 300 m se encuentran dos puntos que están a:

Recursos propios del área

RECURSOS PROPIOS DEL ÁREA

La Excel es una herramienta que cuando más se trabaja, puede resultar útil debido por la cantidad de datos numéricos que debe manejar para hacer cálculos. Después de un tiempo se puede hacer la hoja de cálculo de Excel.

Este puede ser usado en los contextos de la vida cotidiana. Se usan los datos en los libros de texto para registrar los datos que se manejan en un problema con el uso de la tecnología de la información.

La hoja de cálculo es un recurso TIC con una gran posibilidad pedagógica en el aula y en Matemáticas en general.

- Es un recurso en el aula que se puede utilizar para registrar los datos que se manejan en un problema con el uso de la tecnología de la información.
- Puede utilizarse en los contextos de la vida cotidiana.
- Puede utilizarse con los gráficos estadísticos como parte de la enseñanza de la matemática, para el desarrollo de los conocimientos de matemática y estadística de los estudiantes.
- Se puede utilizar en el aula de la hoja de cálculo como herramienta de registro y representación de datos, desde el cálculo con funciones matemáticas y representación de gráficos.

Ampliación de contenidos

AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS

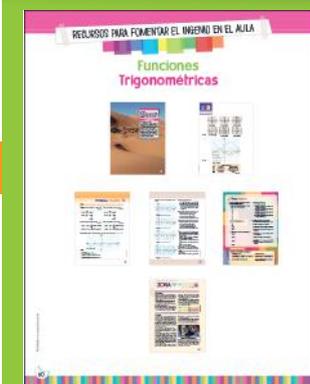
Uno de los aplicaciones de las tecnologías de la información es la comunicación por medio de satélites. Este sistema permite la comunicación a gran distancia, tanto en tierra como en el espacio, que los satélites usan como medio de comunicación para transmitir el mensaje.

Los datos de este sistema se obtienen en la vida cotidiana, se obtienen en un plano cartesiano. Este sistema permite la comunicación por medio de satélites.

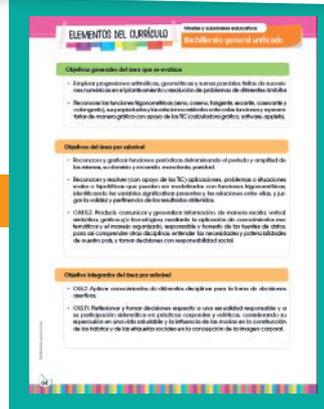
Como parte de la enseñanza de la matemática, se sugiere que se trabaje en el aula con este sistema de comunicación por medio de satélites.

Actualmente el sistema de comunicación por medio de satélites se usa en Chile.

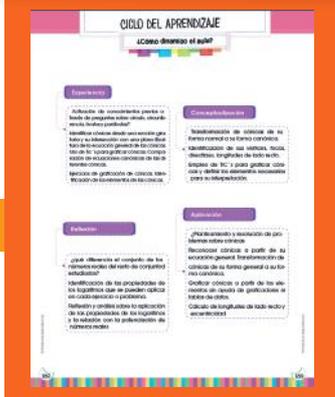
Recursos para fomentar el ingenio



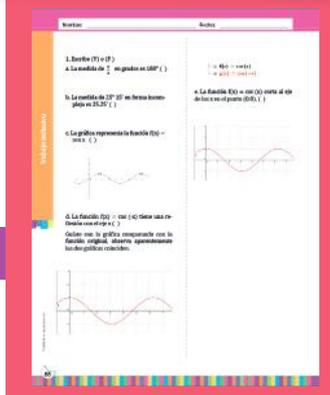
Elementos del currículo



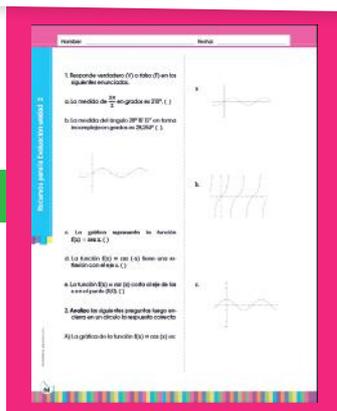
Ciclo de aprendizaje



Trabajo inclusivo



Recursos para la evaluación



Solucionarios



INGENIOS: El proyecto educativo de Editorial Don Bosco

La sociedad actual se enfrenta a nuevos retos que solo pueden superarse con educación, esfuerzo y talento personal y social.

INGENIOS es el proyecto de Editorial Don Bosco que promueve el desarrollo óptimo de los potenciales individuales de cada alumno, contribuye a mejorar la calidad de su educación y le permite afrontar con garantías de éxito los retos del futuro y alcanzar un mayor nivel de felicidad.

INGENIOS contempla las esencias del talento y los contextos del talento, contribuyendo a un modelo de escuela que potencia al máximo el desarrollo de la persona.

Las esencias del talento

Talento analítico y crítico

Aprender a pensar, utilizar rutinas de pensamiento, valorar el pensamiento... Toda una actitud ante la vida.

Talento creativo

Dejar aflorar la imaginación, la expresividad... en la resolución de problemas y retos.

Talento emprendedor

Iniciativa, imaginación, trabajo en equipo, comunicación, constancia... Persigue tus sueños.

Talento emocional

Talento que permite gestionar de manera eficaz las emociones y las hace fluir adecuadamente.

Talento social

Sensible a la justicia social para lograr un mundo mejor.

Talento cooperativo

Para aprender con y de los demás, y generar productos de valor.

Los contextos del talento

El desarrollo del talento se lleva a cabo en un contexto determinado, relacionado con un **modelo de escuela** y **de sociedad**:

1. Un aprendizaje en un contexto práctico y funcional. El proyecto INGENIOS integra el trabajo del desarrollo de las destrezas con criterios de desempeño y las inteligencias múltiples.

- El aprendizaje se sitúa en contextos reales, próximos y significativos para los alumnos, mediante actividades prácticas y funcionales.
- Las destrezas con criterios de desempeño se programan, se trabajan (actividades, tareas y proyectos) y se evalúan (rúbricas).

2. Unas propuestas educativas abiertas al mundo. Una gran parte del conocimiento se adquiere en contextos no formales, por ello nuestros libros están «abiertos al mundo» (aprendizaje 360°). Para ello:

- Proponemos temas que despierten el interés y la curiosidad y mueven a indagar y ampliar el conocimiento.
- Invitamos al alumno a aprender fuera del aula.

3. Un entorno innovador y tecnológico. El proyecto INGENIOS ha adquirido un compromiso con la innovación y las nuevas tecnologías, avanzando en la Escuela del Siglo XXI. En ese sentido, los principales elementos de innovación son:

- Cultura del pensamiento. Dar valor al pensar; enseñar a

pensar.

- Espíritu emprendedor. El emprendimiento es una oportunidad para desarrollar capacidades, y una necesidad social.
- Compromiso TIC. La tecnología al servicio de la persona (humanismo tecnológico) en formatos amigables y compatibles.

4. Un modelo de escuela integradora. La **diversidad** de la sociedad tiene su reflejo en la escuela y una escuela para todos debe ofrecer respuestas a esa diversidad. Además, una mayor equidad contribuye a mejorar los resultados académicos. INGENIOS apuesta por el enfoque preventivo, y lo concreta en:

- Itinerarios alternativos para acceder al conocimiento basados en las IM.
- Adaptaciones curriculares y actividades multinivel.

5. Una sociedad con valores. La actual sociedad necesita personas con una sólida formación en valores para lograr una convivencia más positiva y afrontar los retos del futuro. INGENIOS se apoya en:

- Valores universalmente aceptados, con un mensaje adaptado a la nueva realidad.
- La adquisición de compromisos firmes en la mejora de la sociedad.

Programación y orientaciones de las unidades didácticas

RUTINAS DEL PENSAMIENTO

En las aulas que han asumido la cultura del pensamiento se enseña a pensar; se deja tiempo para pensar y se valora el pensamiento. Un recurso privilegiado para promover la cultura del pensamiento en el aula lo constituyen las «rutinas del pensamiento», desarrolladas por los investigadores del «Project Zero» de la Universidad de Harvard.

Las rutinas son actividades pautadas se-

gún unos sencillos modelos que estimulan el pensamiento y favorecen la actividad reflexiva por parte de los alumnos, y además, hacen visibles los procesos de pensamiento, de manera que el alumno toma conciencia de su manera de pensar y de cómo piensan los demás.

Consideramos las rutinas que se han mostrado más eficaces, y las incorporamos en a continuación:

Círculo de puntos de vista



Desarrolla el «pensamiento de perspectiva», la capacidad para enfocar una situación desde distintos puntos de vista.

Ante una imagen (cuadro, fotografía...)

o un texto, se pide a cada uno de los alumnos que dé su versión de lo que está pasando, situándose en el punto de vista de uno de los personajes que aparecen.

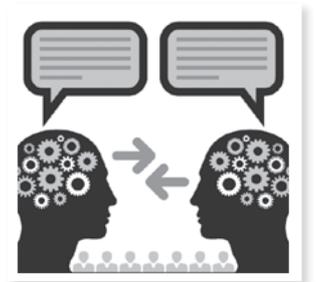
Al poner en común los distintos puntos de vista se obtiene una visión mucho más rica de la situación. Se adquiere el hábito (la rutina) de considerar diferentes puntos de vista al abordar un tema.

Palabra-Idea-Frase

Utilizar el pensamiento para comprender, para investigar y llegar al fondo de un texto.

De forma individual, los alumnos eligen una palabra, una idea y una frase que les hayan resultado llamativas en un texto, o que expresen mejor su contenido.

Tras la puesta en común, los alumnos pueden llegar a alcanzar niveles de comprensión muy profundos, a los que difícilmente accederían de forma individual. Además, aprenden a pensar de manera más eficaz.



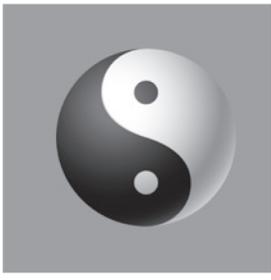
Veo, pienso, me pregunto



Desarrollar la curiosidad, la capacidad de exploración y la creatividad. Mirar la vida, la realidad, el arte, etc., de manera inteligente. Ante una imagen o un texto, individualmente, el alumnado responde a esas tres demandas:

anota lo que ve (sin interpretar), las ideas que le sugiere aquello, y las preguntas que le vienen a la mente. La puesta en común, en la que cada uno justifica su percepción, evidencia las distintas percepciones de un mismo objeto o realidad; todo un aprendizaje.

CSI: Color, Símbolo, Imagen



Asumir el reto de captar la esencia de un texto, esa es la meta de la comprensión. Esta rutina lo pone más fácil.

Tras la lectura, los alumnos, de forma individual, seleccionan las tres ideas que les

parecen más importantes. Representan una con un color, otra mediante un símbolo y la última con una imagen. En la puesta en común se manifiesta la inteligencia artística y la capacidad de comunicación no verbal.

Pienso, me interesa, investigo



Esta rutina permite conectar con el conocimiento previo sobre un tema y ampliarlo a través de la búsqueda de información. Puede utilizarse al comienzo de un tema y como antecedente de una propuesta de

investigación.

Se expone el tema a tratar y se deja a los alumnos un tiempo para reflexionar sobre ello. A continuación se les pide que respondan a:

- Pienso: ¿Qué sabes sobre este asunto?
- Me interesa: ¿Qué preguntas o qué aspecto de este tema despierta tu interés?
- Investigo: ¿Qué te gustaría estudiar sobre este tema? ¿Cómo podrías hacerlo?

Principio, medio, final

Una misma imagen cambia su significado dependiendo de si forma parte del principio de una historia, del nudo o del desenlace. Lo mismo ocurre con un pequeño texto referido a una historia. Esta rutina potencia la creatividad y la imaginación.



Ante una imagen o un texto, cada uno de los alumnos debe construir una historia diferente, según pertenezca al inicio, al nudo o al final. La puesta en común acostumbra a ser una auténtica fiesta creativa.

Diez veces dos (observar y describir)

Hacer observaciones detalladas sobre un objeto o una imagen y expresarlas mediante palabras o frases.

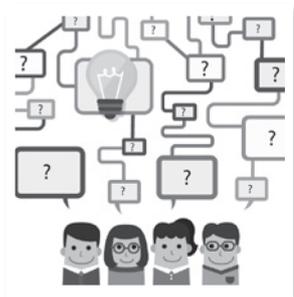
Se observa la imagen durante 30 segundos. Se deja viajar a los ojos. Se elabora una lista de diez palabras o frases sobre la imagen. Se pone en común. Finalmente se repiten los pasos anteriores y se añaden diez nuevas palabras.



Preguntas creativas

Para ampliar y profundizar el pensamiento del alumnado, activar su curiosidad y motivarlo a investigar.

Se propone a los alumnos que formulen preguntas sobre el tema que se está trabajando (como si de tratase de una «lluvia de ideas»).



Se seleccionan las que se consideran más interesantes; se elige una y se abre un diálogo sobre ella.

De esta manera, el alumno reflexiona y se plantea preguntas que le van a proporcionar nuevas ideas.

RUTINAS DEL PENSAMIENTO

Colores, formas y líneas



En ocasiones resulta difícil analizar una situación o expresar un mensaje con palabras. Esta rutina permite hacerlo utilizando colores, líneas o formas geométricas.

cas.

En primer lugar se pide a los alumnos que reconozcan los colores, las formas y las líneas existentes en una imagen o en una situación; o qué colores, formas y líneas emplearían para describir esa situación.

En la puesta en común se comprueba la creatividad y el poder expresivo de esta rutina.

Titulares (Headlines)



Funciona igual que un titular de periódico, y ayuda a los alumnos a capturar la esencia de un texto, una clase, un debate, una exposición...

Al final de una discusión en el aula, de una sesión de trabajo... se propone a los alumnos que escriban el titular que mejor exprese la esencia de lo que se ha estado trabajando en clase. Durante la puesta en común se crea una lista de «titulares».

Al final, el profesor pregunta: ¿Cómo ha cambiado tu titular a partir de la puesta en común? ¿En qué difiere del que habías propuesto?

3 - 2 - 1 - Puente

Esta rutina se basa en establecer un «puente» entre el nuevo aprendizaje y los conocimientos previos que tenga el alumno.

Pasos para su aplicación:

1. Los alumnos escriben 3 ideas, 2 preguntas y 1 metáfora o analogía sobre el tema que se trabaja.

2. Se realizan las actividades de aprendizaje programadas (lecturas, vídeos...).

3. Finalizada la actividad, los alumnos completan de nuevo el primer paso: apuntan 3 ideas, 2 preguntas, 1 metáfora.

4. En parejas, comparten su pensamiento inicial y su nuevo pensamiento, explicando cómo y por qué se ha producido el cambio. Esto ayuda a encontrar aspectos interesantes en la idea del otro y a justificar por qué ha seleccionado esas ideas o preguntas (esto es, a hacer visible su pensamiento). A continuación se comparte con el resto de la clase, creándose un ambiente de reflexión, de respeto y confianza que mejora el clima escolar.

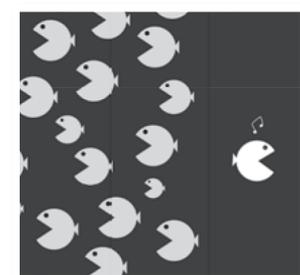


El semáforo (Pensamiento crítico)

Ayuda a detectar señales de duda sobre la veracidad en los medios de comunicación.

Los estudiantes analizan un editorial, una noticia, un discurso... y detectan «luces rojas o amarillas» en aquellos puntos en los que aprecian señales de duda (afirmaciones sin argumentos, generalizaciones demasiado amplias, interés propio manifiesto, argumentos unilaterales...).

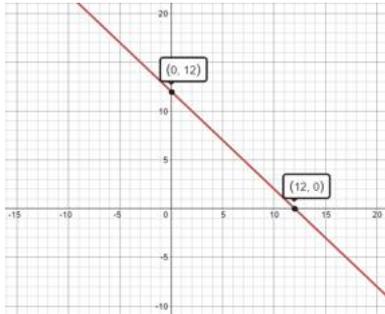
Se elabora una lista de los puntos rojos y amarillos y se señalan «zonas de peligro» en el texto analizado. Finalmente, se reflexiona sobre lo aprendido.



Actividades complementarias

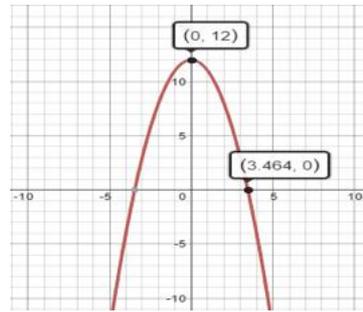
Ejercicios para calculadora graficadora.

1. Grafique las ecuaciones $y = 12 - x$ y $y = 12 - x^2$. Haga los ajustes necesarios para que en la gráfica se vean la ordenada y la abscisa al origen. Regule el intervalo (RANGE) y la escala para poder leer esas coordenadas. Compruebe sustituyendo en las ecuaciones las coordenadas de las intersecciones.



Si $x = 0$ entonces, $y = 12 - 0$; $y = 12$

Si $y = 0$ entonces, $0 = 12 - x$; $x = 12$

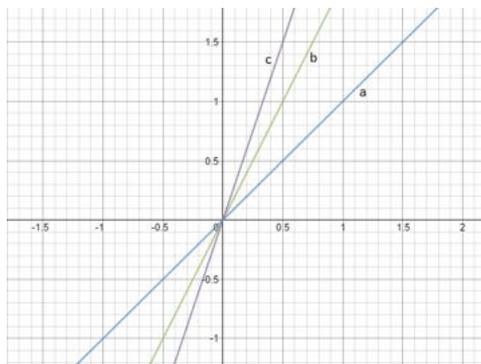


Si $x = 0$ entonces, $y = 12 - 0^2$; $y = 12$

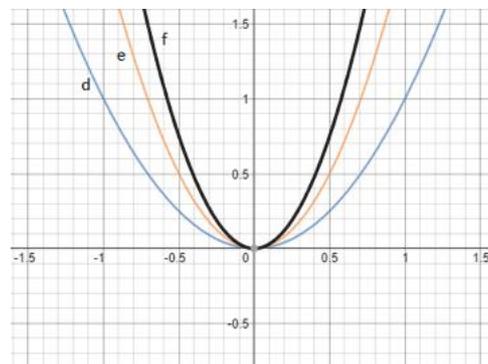
Si $y = 0$ entonces, $0 = 12 - x^2$; $x = 3,464$

2. Grafique las siguientes ecuaciones en el mismo plano cartesiano. ¿Cómo se relaciona la ecuación a, b, c, con la pendiente de su recta? ¿Cómo se relaciona la ecuación d, e, f con sus gráficas?

a. $y = x$ b. $y = 2x$ c. $y = 3x$ d. $y = x^2$ e. $y = 2x^2$ f. $y = 3x^2$



En las rectas a, b, c en la medida que aumenta la pendiente en la ecuación, gráficamente la recta se observa más inclinada



En las ecuaciones d, e, f en la medida que aumenta el coeficiente cuadrático, la gráfica se cierra paulatinamente.

REPASO Y REVISIÓN DE CONTENIDOS

1. Ecuaciones lineales

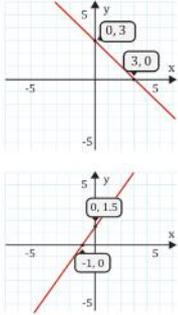
1. Sean los puntos, **determina** el valor de la pendiente.

- a. (-2, 7) y (1, 8)
- b. (2, 6) y (5, 9)
- c. (-4, 4) y (2, -8)
- d. (3, -1) y (2, 0)
- e. $(\frac{2}{5}, \frac{7}{4})$ y $(\frac{2}{4}, \frac{7}{4})$
- f. $(\frac{7}{2}, \frac{5}{4})$ y $(5, -\frac{1}{4})$

2. **Determina** la ecuación de la recta en forma general, que pasa a través de los puntos.

- a. (0, 2) y (6, 0)
- b. (-2, -2) y (-6, 0)
- c. $(-\frac{12}{5}, 0)$ y $(-3, -\frac{3}{2})$
- d. (-4, 0) y (0, 12)
- e. $(\frac{13}{2}, -10)$ y (-8, 19)
- f. (0, 4) y (2, -10)

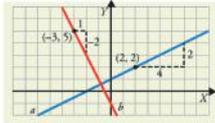
3. Considerando las siguientes gráficas, **establece** la ecuación de la recta.



4. Según los elementos que describen a una recta, **determina** la ecuación de la misma.

- a. Punto (5, 17) y pendiente = 4
- b. Puntos (-3, 0) y (0, -3)
- c. $m = -5$ e intersección con el eje $y = -2$
- d. $m = 4$ y Punto (3, 7)
- e. $m = -\frac{2}{3}$ y $P(-2, 5)$
- f. $N(-2, 5)$ y $m = \frac{1}{5}$

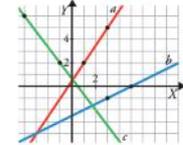
5. **Escribe** la ecuación de las rectas a y b.



6. **Escribe**, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m:

- a. $P(4, -3)$, $m = 4$
- b. $P(0, 2)$, $m = -\frac{1}{2}$
- c. $P(-3, 1)$, $m = \frac{5}{4}$
- d. $P(0, 0)$, $m = -1$

7. **Determina** la ecuación de las siguientes rectas:



8. Una recta pasa por el punto A(-1, 3) y por el punto P(2, 5). **Escribe** su ecuación punto pendiente.

9. **Hallá** la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(-2, 3) y B(4, 2).

Prohibida su reproducción

Solucionario

reemplazando un punto en la ecuación $y = mx + b$ y la pendiente m , se obtiene

$$2 = (-1)0 + b \rightarrow b = 2$$

$$y = -x + 2 \rightarrow x + y - 2 = 0$$

$$m = \frac{0 - (-2)}{-6 - (-2)} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

reemplazando un punto en la ecuación $y = mx + b$ y la pendiente m , se obtiene

$$0 = \left(-\frac{1}{2}\right)(-6) + b \rightarrow b = -3$$

$$x + 2y + 6 = 0$$

- c. $m = \frac{5}{2}$, entonces $-5x + 2y + 12 = 0$
- d. $m = 3$, entonces $-3x + y - 12 = 0$
- e. $m = -2$, entonces $2x + y - 3 = 0$
- f. $m = -7$, entonces $7x + y - 4 = 0$

3. a. $m = \frac{0-3}{3-0} = -\frac{3}{3} = -1$, entonces $x + y = 3$

b. $m = \frac{0-3/2}{-1-0} = \frac{3}{1} = 3$, entonces $-3x + 2y = 3$

- 4. a. $m = 4$, entonces $4x - y - 3 = 0$
- b. $m = -1$, entonces $x + y + 3 = 0$
- c. $m = -5$, entonces $5x + y + 2 = 0$
- d. $m = 4$, entonces $4x - y - 5 = 0$
- e. $m = -\frac{2}{3}$, entonces $2x + 3y - 11 = 0$
- f. $m = \frac{1}{5}$, entonces $x - 5y + 27 = 0$

5. a. recta a: $x - 2y = -2$

b. recta b: $2x + y = -1$

6. a. $-4x + y = -19$, b) $x + 2y = 4$ c) $-5x + 4y = 19$, d) $y = -x$

7. recta a: $-3x + 2y = 1$

recta b: $-x + 2y = -5$

recta c: $4x + 3y = 2$

8. $m = \frac{2}{3}$, $-2x + 3y - 11 = 0$

9. $m = -\frac{1}{6}$, $x + 6y - 16 = 0$

1. a. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 7}{1 - (-2)} = \frac{1}{3}$

b. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 6}{5 - 2} = \frac{3}{3} = 1$

c. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-8 - 4}{2 + 4} = \frac{-12}{6} = -2$

d. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-1)}{2 - 3} = \frac{1}{-1} = -1$

e. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{7}{4} - \frac{7}{4}}{\frac{2}{2} - \frac{2}{5}} = 0$

f. $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{21}{4} - \frac{5}{4}}{5 - \frac{7}{2}} = \frac{\frac{16}{4}}{\frac{10 - 7}{2}} = \frac{4}{\frac{3}{2}} = -\frac{13}{3}$

2. a. $m = \frac{0 - 6}{6 - 0} = \frac{-6}{6} = -1$

Solucionario

10. a. $m = -\frac{5}{4}$

Intersección eje x: $(\frac{2}{5}, 0)$

Intersección eje y: $(0, \frac{1}{2})$

b. $m = \frac{5}{4}$

Intersección eje x: $(\frac{2}{5}, 0)$

Intersección eje y: $(0, -\frac{1}{2})$

c. $m = -\frac{2}{3}$

Intersección eje x: $(-\frac{7}{2}, 0)$

Intersección eje y: $(0, -\frac{7}{3})$

d. $m = 2$

Intersección eje x: $(6, 0)$

Intersección eje y: $(0, -\frac{7}{3})$

11. Las líneas paralelas nunca se cortan y las líneas perpendiculares se cortan en un punto formando un ángulo de 90°.

12. Líneas paralelas tienen igual pendiente, es decir, $m_1 = \frac{1}{m_1}$

Líneas perpendiculares tienen pendientes inversas y opuestas, es decir, $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

- | | |
|--------------------|----------------------|
| 13. a. paralelas | 14. a. No pertenecen |
| b. perpendiculares | b. Si pertenecen |
| c. perpendiculares | c. Si pertenecen |
| d. ninguno | |

- | | | |
|----------------------|---------------|-----------|
| 15. a. $3x+5y = -20$ | c. $x+3y=-6$ | e. $y=-1$ |
| b. $-2x+y=7$ | d. $-4x+y=-3$ | |

16. Rectas paralelas: $x+2y=1$
 Rectas perpendiculares: $-2x+y=-1$

10. Considerando las siguientes ecuaciones determina el valor de la pendiente, intersección:
- $5x + 4y = 2$
 - $5x + 4y = 2$
 - $2x + 3y + 7 = 0$
 - $-y + 2x - 12 = 0$

2 Líneas Paralelas y Perpendiculares

- ¿Cuáles son las características de las representaciones gráficas de las líneas paralelas? ¿Y de las perpendiculares?
- ¿Cuáles la relación de las pendientes en las líneas paralelas? ¿Y en las líneas perpendiculares?
- Identifica ¿Cuál de los siguientes pares de rectas son líneas paralelas? ¿Y cuáles son líneas perpendiculares? O Ninguno.
 - $x + 3y = 20$; $x + 3y = -2$
 - $2x + y = 2$; $x + 2y = -3$
 - $-4x + 3y = 19$; $3x + 4y = -2$
 - $-9x - 3y = -1$; $x + 3y = -1$
- Demuestra que los siguientes puntos pertenecen a la misma recta, utilizando el cálculo de las pendientes.
 - $(0, 12)$, $(6, 0)$, $(14, 20)$
 - $(30, 6)$, $(0, -6)$, $(15, 0)$
 - $(-5, 0)$, $(0, -3)$, $(-30, 15)$
- A continuación se presentan ejercicios que vinculan las propiedades de las rectas paralelas y perpendiculares. Analiza el enunciado propuesto y resuelve los siguientes ejercicios.
 - Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0, -4)$ y que es paralela a la recta que tiene por ecuación $3x + 5y = 15$
 - Determina la ecuación de la recta que pasa a través del punto $(-3, 1)$ y que es perpendicular a la recta que tiene por ecuación $2x + 4y = 7$
 - Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -3)$ y es perpendicular a la recta cuya ecuación es $3x - y = -12$
 - Determina la ecuación de la recta de tal manera que pase por el punto de intersección entre las rectas $x + y = 2$ con $4x - y = 3$ y que sea perpendicular a la segunda recta mencionada.

e. Determina la pendiente que se obtiene entre los puntos de intersección de las rectas $5x + 3y = 2$, $3x - 2y = 5$ con la intersección rectas $x - 2y = 2$, $4x - y = 1$

16. Hallar una recta paralela y otra perpendicular a $r \equiv x + 2y + 3 = 0$, que pasen por el punto $A(3, 5)$.

17. Calcula k para que las rectas $r \equiv x + 2y - 3 = 0$ y $s \equiv x - ky + 4 = 0$, sean paralelas y perpendiculares.

18. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(1, 3)$ y $B(2, -5)$.

19. Calcula una recta paralela a la recta $r \equiv y = -2x + 1$ que pase por el punto $(4, -1)$.

20. Calcula una recta paralela a la recta $r \equiv y = \frac{3}{2}x + 2$ que pase por el punto $(-2, 1)$.

21. Calcula una recta que sea paralela a la recta $r \equiv 3x + 2y - 7 = 0$ que pase por el punto $(0, -3)$.

22. Calcula la recta paralela a la recta $r \equiv x - y + 4 = 0$ que pase por el punto $(-2, 1)$.

23. Comprueba si las rectas $r \equiv 2x - 3y - 1 = 0$ y la recta $s \equiv -6x + 9y - 5 = 0$ son paralelas.

24. Entre estas rectas, ¿cuál no es paralela a las otras dos?
 $r \equiv y = \frac{4}{3}x - \frac{6}{5}$
 $s \equiv 3x - 4y + 2 = 0$
 $t \equiv 8x - 6y - 3 = 0$

25. Comprueba si la recta $r \equiv x - 2y + 9 = 0$ y la recta s que pasa por los puntos $(-1, -2)$ y $(7, 2)$, son paralelas.

26. Comprueba si las rectas r que pasa por los puntos $(2, -3)$ y $(4, 7)$ y s que pasa por los puntos $(-1, -4)$ y $(5, 2)$, son paralelas.

17. Paralelas:

$$m_1 = -\frac{1}{2} \text{ y } m_2 = \frac{1}{k}$$

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{k} \text{ despejando } k = -2 \quad -3x + 2y - 8 = -2$$

Perpendiculares:

$$m_1 = -\frac{1}{2} \text{ y } m_2 = \frac{1}{k} \quad -\frac{1}{2} \times \frac{1}{k} = -1$$

$$\text{despejando } k = \frac{1}{2}$$

18. $m = \frac{-5-3}{2-1} = -8$, entonces

$$8x + y - 7 = 0$$

19. $m = -2$ y $(4, -1)$, entonces

$$2x + y - 7 = 0$$

20. $m = \frac{3}{2}$ y $(-2, -1)$, entonces

21. $m = -\frac{3}{2}$ y $(0, -3)$, entonces $3x + 2y + 6 = 0$

$$22. -x + y - 3 = 0$$

23. Paralelas

24. La recta s

25. Paralelas

26. No paralelas

3 Sistemas de ecuaciones lineales

27. Analiza las siguientes preguntas y subraya la respuesta correcta según corresponda.

a) Al resolver el sistema $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 11 \end{cases}$

- b. El tipo de soluciones que se obtiene es:
- Inconsistente
 - Soluciones infinitas
 - Solución única
 - No tiene solución

b. Para un sistema compatible determinado, las rectas que se obtienen al graficar son:

- Coincidentes
- Secantes
- Intersecantes
- No intersecantes

c. Al despejar la variable "y", en la primera y segunda ecuación del sistema $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = 2 \end{cases}$

se obtiene, respectivamente:

- $y = 10 - x$; $y = 2 - x$
- $y = 10 + x$; $y = -2 - x$
- $y = -10 + x$; $y = 2 - x$
- $y = -x + 10$; $y = -2 + x$

d. El conjunto solución del sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$

- es:
- (1; 2)
 - (-1; 2)
 - (1; -2)
 - (2; 1)

e. Aplicando el método de igualación e igualando la variable y para el sistema $\begin{cases} x + y = 5 \\ 3x + y = 11 \end{cases}$

- resulta:
- $5 - x = 11 + 3x$
 - $5 + x = 11 + 3x$
 - $-5 - x = 11 - 3x$
 - $5 - x = 11 - 3x$

f. En el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ 3x - 6y = 11 \end{cases}$

despejando x en la primera ecuación resulta:

- $x = -2y + 3$
- $x = -2y - 3$
- $x = 3y + 2$
- $x = 2y + 3$

g. Aplicando el método de igualación e igualando la variable x para el sistema $\begin{cases} x + 4y = 9 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$, la expresión que resulta es:

- $9 + 4y = 5 + 2y$
- $9 - 4y = 5 - 2y$
- $-9 - 4y = 5 + 2x$
- $4 - 9y = 5 - 2y$

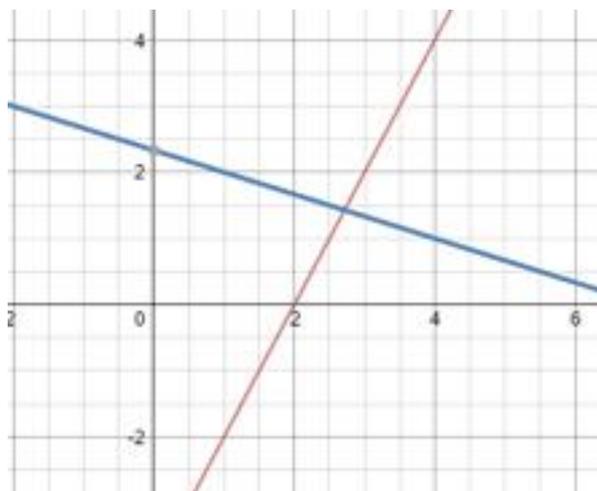
h. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas para el sistema de ecuaciones? $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

- El gráfico del sistema muestra dos rectas paralelas.
- El gráfico del sistema muestra una sola recta.
- El gráfico del sistema muestra dos rectas que se intersecan en el primer cuadrante.
- El gráfico del sistema muestra dos rectas que se intersecan en el cuarto cuadrante.

i. Al resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 6c \\ x + y = 3c \end{cases}$ en función de c la respuesta es:

- $x = \frac{3}{2}c$; $y = \frac{9}{2}c$
- $x = \frac{3}{2}c$; $y = -\frac{9}{2}c$
- $x = \frac{3}{2}c$; $y = \frac{9}{2}c$
- $x = \frac{3}{2}c$; $y = \frac{9}{2}c$

PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN



el gráfico muestra dos rectas que se intersecan en el primer cuadrante

Solucionario

27. a. ① $x = 3 + 2y$

② $x = \frac{11 + 6y}{3}$

① = ②

$3 + 2y = \frac{11 + 6y}{3}$

$9 + 6y = 11 + 6y$

$6y - 6y = 11 - 9$

$0 \neq 2$

b. Intersecantes

c. $y = -x + 10$; $y = -2 + x$

d. ① $x = \frac{7 - 2}{3}$

② $x = \frac{12 - 5y}{2}$

① = ② $\frac{7 - 2y}{3} = \frac{12 - 5y}{2}$

$14 - 4y = 36 - 15y$

$15y - 4y = 36 - 14$

$11y = 22$

$y = 2$

$x = \frac{7 - 2(2)}{3} = \frac{7 - 4}{3}$

$x = \frac{3}{3} \quad x = 1$

El conjunto solución es (1, 2)

e. ① $y = 5 - x$

② $y = 11 - 3x$

Por lo tanto queda:

$5 - x = 11 - 3x$

f. $x = 2y + 3$

g. ① $x = 9 - 4y$

② $x = 5 - 2y$

① = ②

$9 - 4y = 5 - 2y$

② $y = 3c - x$

① = ② se obtiene

$6c + x = 3c - x$ despejando x

$2x = -3c \quad x = -\frac{3}{2}c$

reemplazando x en ①, queda

$y = 6c - \frac{3}{2}c \quad y = \frac{9}{2}c$

entonces,

$x = -\frac{3}{2}c, \quad y = \frac{9}{2}c$, se obtiene

Solucionario

27. a. ① $x = \frac{-1 - 3y}{2}$

② $x = -\frac{4y}{3}$

① = ② tenemos,

$\frac{-1 - 3y}{2} = -\frac{4y}{3}$ despejamos y

$-3 - 9y = -8y$

$-9y + 8y = 3$

$-y = 3$

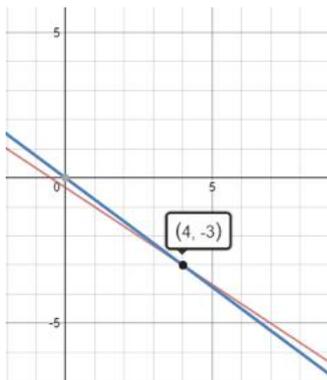
$y = -3$

Reemplazamos y en la ②

$x = \frac{4(-3)}{3} \quad x = 4$

Solución, $x = 4, y = -3$

Gráficamente,



b. ① $x = y + 2$

② $x = 3y + 2$

① = ② tenemos,

$y + 2 = 3y + 2$, despejamos y

$y - 3y = 2 - 2$

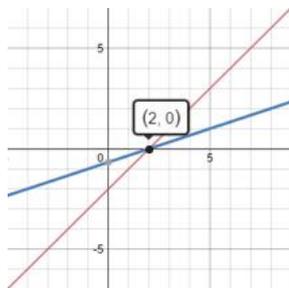
$-2y = 0, y = 0$

Reemplazamos en ①

$x = 0 + 2, x = 2$

Solución, $x = 2, y = 0$

Gráficamente,



28. Resuelve por sustitución, igualación, reducción y gráficamente los sistemas:

a. $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x + 4y = 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} \frac{x+y}{2} = x-1 \\ \frac{x-y}{2} = y+1 \end{cases}$

29. Halla las soluciones del sistema $\begin{cases} \frac{x+3y}{2} = 5 \\ 3x - y = 5y \end{cases}$

30. Resuelve $\begin{cases} \frac{x+3y}{2} = 5 \\ 4 - \frac{2x-y}{2} = 1 \end{cases}$

31. Resuelve $\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ 4x - 3y = -2 \end{cases}$

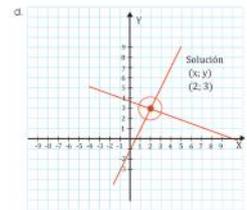
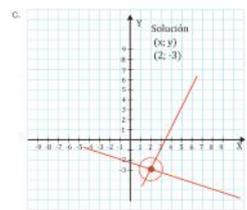
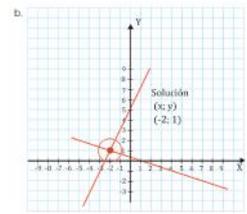
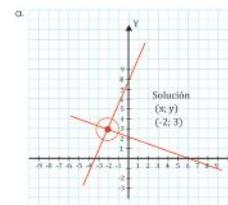
32. Resuelve el sistema: $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4 \\ \frac{x}{3} + y = 1 \end{cases}$

33. Halla las soluciones del sistema:

$\begin{cases} \frac{x+1}{3} + \frac{y-1}{2} = 0 \\ \frac{x+2y}{3} - \frac{x+y+2}{4} = 1 \end{cases}$

34. Al resolver el sistema: $\begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$

Utilizando el método gráfico, resultará:



29. ① $x = 10 - 3y$

② $x = 2y$

① = ② tenemos,

$10 - 3y = 2y$ despejamos y

$5y = 10$

$y = 2$, reemplazamos en la ②

$x = 2(2), x = 4$

Solución, $x = 4, y = 2$

30. ① $y = 2x - 6$ ② $y = \frac{10 - x}{3}$

① = ② tenemos,

$2x - 6 = \frac{10 - x}{3}$, despejamos x

$6x - 18 = 10 - x$

$6x + x = 10 + 18$

$7x = 28, x = 4$ reemplazamos en ①

$y = 2(4) - 6, y = 8 - 6, y = 2$ Solución, $x = 4, y = 2$

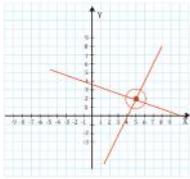
31. Solución, $x = 1, y = 2$

32. Solución, $x = \frac{66}{7}, y = -\frac{15}{7}$

33. Solución, $x = -7, y = 5$

34. Solución, literal a.

35. La solución gráfica a continuación, a cuál sistema de ecuaciones lineales pertenece.



- a. $5x - 2y = 29$
 $2x - 3y = 4$
- b. $5x + 2y = 29$
 $2x - 3y = -4$
- c. $5x + 2y = 29$
 $2x - 3y = 4$
- d. $5x + 2y = -9$
 $2x + y = -4$

4 Función Cuadrática

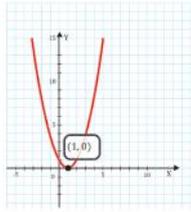
36. Factoriza las siguientes expresiones cuadráticas:

- a. $x^2 - 9$
- b. $x^2 - 25y^2$
- c. $x^2 - 2x + 1$
- d. $x^2 + 16x + 64$
- e. $x^2 - 8x$
- f. $-4x^2 - 16x$
- g) $x^2 + 8x + 7$
- h) $x^2 - x - 6$

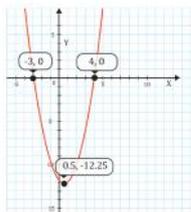
37. Determina el vértice de las siguientes funciones.

- a. $f: x \rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x + 6$
- b. $f: x \rightarrow f(x) = -x^2 + 3x - 6$
- c. $f: x \rightarrow f(x) = x^2 - 4$
- d. $f: x \rightarrow f(x) = 4x^2 - 16x$

38. Considerando las siguientes gráficas, determina la ecuación correspondiente.



Ecuación:.....



Ecuación:.....

37. a. $a = 2, b = -4$, entonces

$$V\left(-\frac{b}{2a}, y\right), \text{ reemplazando}$$

$$V\left(-\frac{-4}{2(2)}, y\right), V\left(\frac{4}{4}, y\right), V(1, y)$$

Sustituyendo x en la función $f(x)$,

$$f(1) = 2(1)^2 - 4(1) + 6$$

$$f(1) = 4, \text{ por tanto } V(1, 4)$$

b. $a = -1, b = 3$, entonces

$$V\left(-\frac{b}{2a}, y\right), \text{ reemplazando}$$

$$V\left(-\frac{3}{2(-1)}, y\right), V\left(-\frac{3}{-2}, y\right), V\left(\frac{3}{2}, y\right)$$

Sustituyendo x en la función $f(x)$,

$$f(3/2) = -(3/2)^2 + 3(3/2) - 6$$

$$f(3/2) = \frac{15}{4}, \text{ Por tanto } V\left(\frac{3}{2}, -\frac{15}{4}\right)$$

c. $a = 1, b = 0$, entonces $V\left(-\frac{b}{2a}, y\right)$, reemplazando

$$V\left(-\frac{0}{2(1)}, y\right), V\left(\frac{0}{2}, y\right), V(0, y). \text{ Sustituyendo } x$$

en la función $f(x)$, $f(0) = (0)^2 - 4$, $f(0) = -4$,
por tanto $V(0, -4)$.

d. $a = 4, b = -16$, entonces $V\left(-\frac{b}{2a}, y\right)$, reemplazando

$$V\left(-\frac{-4}{2(4)}, y\right), V\left(-\frac{-16}{8}, y\right), V(2, y)$$

Sustituyendo x en la función $f(x)$, $f(2) = 4(2)^2 - 16(2)$,
 $f(2) = -16$, por tanto $V(2, -16)$.

38. $(x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

Ecuación, $x^2 - 2x + 1$

39. $x_1 = -3$ y $x_2 = 4$ por tanto los factores son
 $(x + 3)(x - 4) = x^2 - x - 12$. Ecuación, $x^2 - x - 12$.

Solucionario

35. a. ① $x = \frac{29 - 2y}{5}$

② $x = \frac{3y + 5}{2}$

① = ② tenemos,

$$\frac{29 - 2y}{5} = \frac{3y + 5}{2}$$

$$58 - 4y = 15y + 20$$

$$19y = 38, y = 2$$

Reemplazando en ②

$$x = \frac{3(2) + 5}{2} = \frac{11}{2}, x = 5.5$$

Solución, $x = 5, y = 2$. Literal c

36. a. $(x - 3)(x + 3)$

b. $(x - 5y)(x + 5y)$

c. $(x - 1)^2$

d. $(x + 8)^2$

e. $x(x - 8)$

f. $-4x(x + 4)$

g. $(x + 7)(x + 1)$

h. $(x - 3)(x + 2)$

1. **Selecciona** la respuesta correcta en cada caso.

La recta paralela a la línea $2x - 3y = 5$ que pasa por el punto $(-8, 4)$ tiene la ecuación:

a. $y = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$ b. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{28}{3}$ c. $y = -\frac{3}{2}x + 16$ d. $y = -\frac{3}{2}x - 8$

2. ¿Cuál de las siguientes es la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -3)$ y es paralela al eje Y?

a. $x = 2$ b. $y = -3$ c. $x = -2$ d. $y = -3$

3. La función $f(x) = x^2 - 8x + 10$ tiene:

- a. El valor mínimo 6 cuando $x = -4$
- b. El valor mínimo 26 cuando $x = 4$
- c. El valor mínimo 10 cuando $x = 8$
- d. El valor mínimo -6 cuando $x = 4$

4. ¿Cuál de las siguientes es la ecuación de una recta perpendicular a $2x - 3y = 6$?

a. $y = \frac{3}{2}x - 3$ b. $y = -\frac{2}{3}x + 2$ c. $y = -\frac{3}{2}x + 3$ d. $y = -\frac{2}{3}x + 2$

5. ¿Cuál de los planteamientos siguientes es verdadero para la función $y = -4x^2 + 20x - 25$?

- a. Se abre hacia abajo y tiene una abscisa al origen.
- b. Se abre hacia abajo y no tiene abscisas al origen.
- c. Se abre hacia la izquierda y tiene dos abscisas al origen.
- d. Se abre hacia abajo y tiene dos abscisas al origen.

6. La ecuación de la recta cuyas coordenadas al origen son $(0, -4)$ y $(2, 0)$ es:

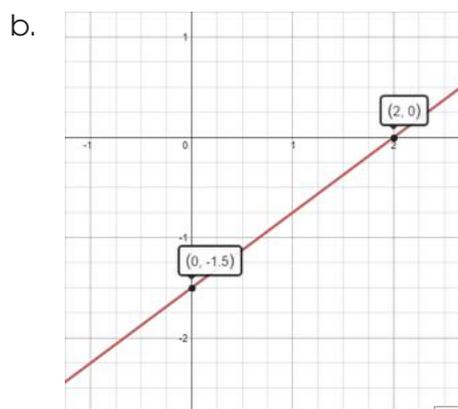
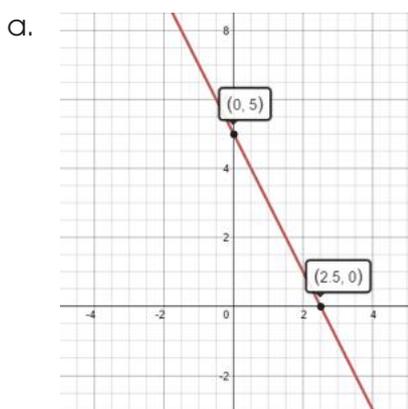
a. $2x + 4y = 8$ b. $2x - y = 4$ c. $2x - 4y = 8$ d. $2x + 8y = 4$

7. Las soluciones de $3x^2 + 6x + 2 = 0$ son:

a. $\frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$ b. $-1 \pm \sqrt{2}$ c. $\frac{-18 \pm \sqrt{3}}{3}$ d. $-6 \pm 2\sqrt{3}i$

SOLUCIONARIO

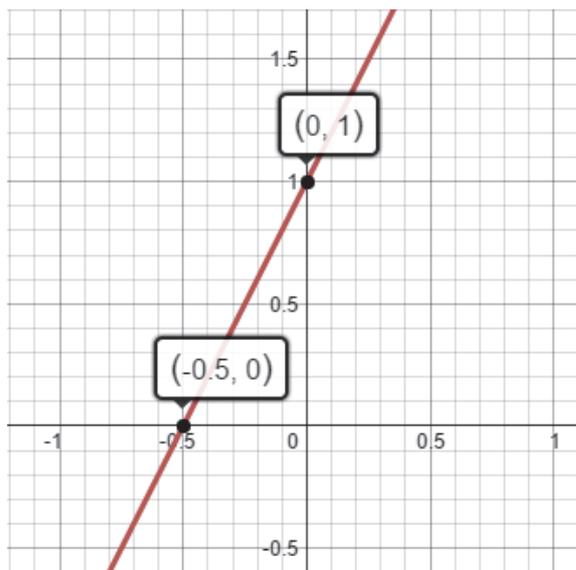
- Deduzca** la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-3, 2)$ y $(-2, 5)$
 - En su forma simplificada.
 - En su forma general.
 - En su forma punto-pen.
- Grafique** la función lineal $f(x) = 2x + 1$, usando la pendiente y la ordenada al origen.
- Dadas las siguientes gráficas, **determine** la ecuación de la recta en su forma general en cada una de ellas.



- Una recta cuya ecuación es $ax + by = 3$, pasa por los puntos $(6,3)$ y $(-1,-1)$. **Determina** los valores de a y b utilizando sistema de ecuaciones.
- Los puntos $(-8, -16)$, $(0, 10)$ y $(12, 4)$ son tres de los vértices de un paralelogramo. **Determina** las coordenadas del cuarto vértice, que está en el tercer cuadrante.
- Una recta cuya ecuación es $y = mx + b$, pasa por los puntos $(-\frac{1}{3}, -6)$ y $(2,1)$. **Determina** m y b , sustituyendo las coordenadas en la ecuación y resolviendo el sistema de ecuaciones.
- Determina** si el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} x - 5y = 15 \\ 0,01x - 0,05y = 0,5 \end{cases}$ es inconsistente, soluciones infinitas, solución única o no tiene solución.

- I. 1. $m = \frac{2}{3}$ y pasa por $(-8, 4)$, entonces es la opción b. $y = \frac{2}{3}x + \frac{28}{3}$
2. Pasa por $(2, -3)$ y paralela al eje Y, entonces es la opción a. $x = 2$
3. $f(4) = (4)^2 - 8(4) + 10 = 16 - 32 + 10 = -6$. Es la opción d. El valor mínimo -6 cuando $x=4$
4. $m = -\frac{2}{3}$ Por tanto, es la opción c. $y = -\frac{2}{3}x + 3$
5. Es la opción a. Se abre hacia abajo y tiene una abscisa al origen
6. Corte con el eje X en 2, corte con el eje Y en -4, $m = 2$. Es la opción b. $2x - y = 4$
7. $a = 3, b = 6, c = 2$. Reemplazando en la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, se obtiene la opción
- a. $\frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$
- a. Solución: si $m = 3$ y pasa por los puntos dados, se obtiene, $y = 3x + 11$
- b. Solución: si $m = 3$ y pasa por los puntos dados, se obtiene, $3x - y + 11 = 0$
- c. Solución: si $m=3$ y pasa por los puntos dados, se obtiene $y - 2 = 3(x + 3)$
- II. a. Solución: si $m=3$ y pasa por los puntos dados, se obtiene, $y = 3x + 11$
- b. Solución: si $m=3$ y pasa por los puntos dados, se obtiene, $3x - y + 11 = 0$
- c. Solución: si $m=3$ y pasa por los puntos dados, se obtiene $y - 2 = 3(x + 3)$

III.



IV. a. Solución: $2x + y - 5 = 0$

b. Solución: $-3x + 4y + 6 = 0$

V. Solución: $a = 4$; $b = -7$

VI. Solución: $(-20, -20)$

VII. Solución: $m=2$ y $b=-3$

VIII. Solución: inconsistente

Funciones

EN CONTEXTO

Una función es una relación entre dos conjuntos de elementos, donde a cada elemento del primer conjunto le corresponde un único elemento del segundo conjunto.

Las funciones se representan gráficamente en un plano cartesiano, donde el eje horizontal representa el dominio y el eje vertical representa el codominio.

Resumen

Operaciones con funciones

El conjunto de las funciones reales de variable real puede ser definido operativamente.

Adición
 La función suma de f y g es la función que asigna a cada número real x el número real que es la suma de los valores que f y g toman en x .
 $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Restricción
 La función restricción de f a A es la función que asigna a cada número real x el número real que es el valor que f toma en x .
 $(f|_A)(x) = f(x)$

Composición
 La función composición de f y g es la función que asigna a cada número real x el número real que es el valor que f toma en el número real que es el valor que g toma en x .
 $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

2. PROGRESIONES ARITMÉTICAS

Una progresión aritmética es una sucesión de números reales en la que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante.

Primer término: a_1
Diferencia: d
Número de términos: n

Fórmulas:
 $a_n = a_1 + (n-1)d$
 $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$



Y TAMBIÉN:

A partir de la fórmula del interés compuesto, podemos obtener otras:

$$C = \frac{C_0}{(1+i)^n}$$

$$i = \sqrt[n]{\frac{C_0}{C}} - 1$$

Interés compuesto

El interés compuesto es el interés que se genera sobre el interés que se genera.

Fórmula:
 $C = C_0(1+i)^n$

Ejemplo:
 Si $C_0 = 1000$, $i = 0.05$, $n = 10$, entonces $C = 1000(1.05)^{10} \approx 1628.89$.

Ejercicios y problemas

Análisis de funciones inversas, sus aplicaciones y gráficas.

1. Analiza la función $f(x) = 2x + 3$.
 a) ¿Es invertible?
 b) ¿Cuál es su dominio?
 c) ¿Cuál es su imagen?

2. Analiza la función $f(x) = x^2$.
 a) ¿Es invertible?
 b) ¿Cuál es su dominio?
 c) ¿Cuál es su imagen?

Para finalizar

1. Responde V o F en Verdadero o Falso según corresponda.
 a) Las funciones reales de variable real forman un conjunto de composición de funciones.
 b) Todas las funciones reales invertibles son biyectivas.
 c) Si f y g son funciones reales de variable real, entonces $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

2. Dada la siguiente función $f(x) = x^2 - 2x + 3$,
 a) ¿Cuál es su dominio?
 b) ¿Cuál es su imagen?
 c) ¿Cuál es su rango?

ZONA

En la física

El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA) es un tipo de movimiento que se produce cuando un objeto se mueve en línea recta con una aceleración constante.

La radio

La radio es un medio de comunicación que utiliza ondas electromagnéticas para transmitir información.

Prohibida su reproducción

UNIDAD I

1 Funciones

CONTENIDOS:

1. Función
 - 1.1. Concepto de función
 - 1.2. Propiedades de las funciones
 - 1.3. Función sobreyectiva
 - 1.4. Función biyectiva
 - 1.5. Operaciones con funciones
 - 1.6. Función inversa
2. Progresiones aritméticas
3. Progresiones geométricas
 - 3.1. Término general de una progresión geométrica
 - 3.2. Suma de los n términos de una progresión geométrica
 - 3.3. Producción de los n términos de una progresión geométrica
4. Intermediarios financieros

Noticia

El consejo directivo del Observatorio Europeo Austral ha aprobado la construcción del telescopio óptico más grande del mundo. El proyecto planea instalarse en el desierto Atacama, al norte de Chile. Consulta la noticia en el siguiente enlace: <http://goo.gl/d1k6G5>

Web

La observación y las herramientas matemáticas han sido la base para poder evolucionar en el conocimiento de las diferentes ramas de las ciencias. En el siguiente documento se explica cómo Aristarco de Samos y su obra contribuyeron a la determinación del tamaño del Sol y de la Luna, y la distancia que les separa de la Tierra. <http://linkadebebe.com/cw/>

EN CONTEXTO

a. **Lee** la noticia anterior y **responde**:
 ¿Qué es un eclipse? ¿A qué distancia se encuentran los tres astros más cercanos a la Tierra?
 Habrás observado que las distancias están expresadas en años luz, pero ¿es esta magnitud realmente una magnitud de longitud? Averigua cómo se define año luz, por qué se utiliza en las distancias muy grandes y su equivalencia con el metro.

b. **Lee** con detenimiento cómo en la época de Aristarco se determinó la distancia de la Tierra a la Luna.
 • ¿Qué herramientas y relaciones matemáticas utilizaron que ya conocías?
 • ¿Qué nuevas relaciones se propusieron para poder efectuar estas mediciones?
 • ¿Qué es lo que sigue siendo confuso respecto a las mediciones llevadas a cabo?

Eje temático	Contenidos
Álgebra y funciones	<p>Ecuación lineal y función cuadrática</p> <ul style="list-style-type: none"> • Ecuaciones lineales (11) • Líneas paralelas y perpendiculares (12) • Sistemas de ecuaciones lineales (13 - 14) • Función cuadrática (15) <hr/> <p>Funciones</p> <ul style="list-style-type: none"> • Concepto de función. Imágenes, antiimágenes, gráficas, dominio y recorrido (18 - 22) • Características de las funciones. Inyectiva y biyectiva (23 - 24) • Función sobreyectiva (25 - 26) • Función biyectiva (27) • Operaciones con funciones. Composición (28-31) • Función inversa (32 - 34) • Progresiones aritméticas (35 - 37) • Progresiones geométricas (38 - 42) • Intermediarios financieros. Interés simple y compuesto (43 - 48)

LOGO INSTITUCIONAL		NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN			AÑO LECTIVO	
Plan de unidad temática						
1. DATOS INFORMATIVOS:						
Docente:	Nombre del docente que ingresa la información	Área/ asignatura:	MATEMÁTICA Grado/Curso:	3° BACHILLERATO	Paralelo:	Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos Matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social. Desarrollar estrategias individuales y grupales que permitan un cálculo mental, escrito, exacto o estimado y la capacidad de interpretación y solución de situaciones problemáticas del medio. Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentado la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.
N.º de unidad de planificación:	1	Título de unidad de planificación:	FUNCIONES Objetivos específicos de la unidad de planificación:			
PERÍODOS	24	SEMANA DE INICIO:				
2. PLANIFICACIÓN						
DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:			CRITERIOS DE EVALUACIÓN			
<ul style="list-style-type: none"> Graficar y analizar el dominio, el recorrido, la monotonicidad, los extremos y paridad de las diferentes funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con $n = -1, -2$, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín) utilizando TIC. Realizar la composición de funciones reales analizando las características de la función resultante (dominio, recorrido, monotonicidad, máximos, mínimos, paridad). Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas con el empleo de la modelización con funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con $n = -1, -2$, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín), identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos. Reconocer funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas para calcular la función inversa (de funciones biyectivas) comprobando con la composición de funciones. Resolver y plantear aplicaciones de la composición de funciones reales en problemas reales o hipotéticos. Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales aplicando propiedades de los números reales. Resolver ecuaciones que se pueden reducir a ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones cuadráticas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos. Identificar sucesiones numéricas reales, sucesiones monótonas y sucesiones definidas por recurrencia a partir de las fórmulas que las definen. Reconocer y calcular uno o varios parámetros de una progresión (aritmética o geométrica) conociendo otros parámetros. 			<p>CE.M.5.3. Opera y emplea funciones reales: lineales, cuadráticas, polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.</p>			

<ul style="list-style-type: none"> • Aplicar los conocimientos sobre progresiones aritméticas, progresiones geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas para resolver aplicaciones en general y de manera especial en el ámbito financiero de las sucesiones numéricas reales. • Resolver ejercicios numéricos y problemas con la aplicación de las progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas. • Reconocer las aplicaciones de las sucesiones numéricas reales en el ámbito financiero y resolver problemas, juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. • Emplear progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas en el planteamiento y resolución de problemas de diferentes ámbitos. • Realizar las operaciones de suma y multiplicación entre sucesiones numéricas reales y la multiplicación de escalares por sucesiones numéricas reales aplicando las propiedades de los números reales. • Identificar sucesiones convergentes y calcular el límite de la sucesión. 	<p>CE.M.5.6. Emplea vectores geométricos en el plano y operaciones en \mathbb{R}, con aplicaciones en física y en la ecuación de la rmeda todos gráficos, analíticos y tecnológicos.</p>
<p>ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE</p> <p>Aseguramiento del nivel de partida mediante una lluvia de ideas sobre funciones, tipos y gráficas.</p> <p>Manipulación de material con fotos y representación de distintos tipos de funciones y sus gráficas.</p> <p>Resolución de problemas de aplicación de funciones en el ámbito financiero y comercial.</p> <p>Uso de diagramas que resumen los principales conceptos, propiedades, procedimientos, gráficas y análisis de diferentes funciones.</p> <p>Uso de <i>softwares</i> que facilitan la representación gráfica y posterior interpretación de información.</p> <p>¿Qué podemos decir sobre las funciones y sus aportes en la economía?</p> <p>Identificación de funciones y su aplicación en las finanzas y economía.</p> <p>Reflexión y análisis sobre dichas aplicaciones.</p> <p>¿Por qué es importante conocer, graficar, analizar e interpretar gráficas de funciones?</p> <p>Planteamiento y resolución de problemas que apliquen funciones en el ámbito financiero y comercial.</p>	<p>TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN</p> <p>Comprobar el desarrollo de las habilidades necesarias para reconocer, interpretar, graficar, analizar las características y operar con funciones de variable real (lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica, polinomiales y racionales). Que el estudiante analice el dominio, el recorrido, la monotonía, los ceros, máximos y mínimos, paridad y composición de las diferentes funciones. También se incluyen las propiedades de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. Apoyándose con las TIC, debe poder graficar, interpretar y encontrar las intersecciones con los ejes, y la intersección de las gráficas de funciones; además de hallar la solución de ecuaciones de manera gráfica; interpretar geoméricamente la derivada de una función cuadrática y sus aplicaciones; y comprender la noción de límite y su aplicación, así como la modelización de situaciones reales a través de las funciones.</p>
<p>ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA</p> <p>J.3. Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.</p> <p>I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.</p> <p>I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.</p> <p>I.4. Actuamos de manera organizada, con autonomía e independencia; aplicamos el razonamiento lógico, crítico y complejo; y practicamos la humildad intelectual en un aprendizaje a lo largo de la vida.</p>	
<p>Docente:</p> <p>Firma:</p> <p>Fecha:</p>	<p>REVISADO</p> <p>Director del área:</p> <p>Firma:</p> <p>Fecha:</p>
<p>ELABORADO</p>	<p>APROBADO</p> <p>Vicorrector:</p> <p>Firma:</p> <p>Fecha:</p>

Criterio de evaluación

- Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.
- Reconoce patrones presentes en sucesiones numéricas reales, monótonas y definidas por recurrencia; identifica las progresiones aritméticas y geométricas; y, mediante sus propiedades y fórmulas, resuelve problemas reales de matemática financiera e hipotética.

Objetivos del área por subnivel

- O.M.5.1. Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.

Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.

Indicadores para la evaluación del criterio

- Grafica funciones reales y analiza su dominio, recorrido, monotonía, ceros, extremos, paridad; identifica las funciones afines, potencia, raíz cuadrada, valor absoluto; reconoce si una función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva; realiza operaciones con funciones aplicando las propiedades de los números reales en problemas reales e hipotéticos.

Identifica las sucesiones según sus características y halla los parámetros desconocidos; aplica progresiones en aplicaciones cotidianas y analiza el sistema financiero local, apreciando la importancia de estos conocimientos para la toma de decisiones asertivas.

Objetivo integrador del área por subnivel

- OI.5.1. Analizar los diversos proyectos políticos, las propuestas de cambio democrático en una sociedad intercultural y sus efectos en diferentes ámbitos, a partir del reconocimiento de las características del origen, expansión y desarrollo, así como las limitaciones de la propia y otras culturas y su interrelación, y la importancia de sus aportes tecnológicos, económicos y científicos.
- OI.5.12. Participar en procesos interdisciplinarios de experimentación y creación colectiva, responsabilizándose del trabajo compartido, respetando y reconociendo los aportes de los demás durante el proceso y en la difusión de los resultados obtenidos.

Básicos imprescindibles

Básicos deseables

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
Álgebra	Identificar la intersección gráfica de dos rectas como solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
	Resolver analíticamente sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando diferentes métodos (igualación, sustitución, eliminación).
	Graficar y analizar el dominio, el recorrido, la monotonía, ceros, extremos y paridad de las diferentes funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con $n = -1, -2$, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín) utilizando TIC.
	Reconocer funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas para calcular la función inversa (de funciones biyectivas) comprobando con la composición de funciones.
	Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales, aplicando propiedades de los números reales.
	Realizar la composición de funciones reales analizando las características de la función resultante (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos, paridad).
	Reconocer las aplicaciones de las sucesiones numéricas reales en el ámbito financiero y resolver problemas, juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.
	Realizar las operaciones de suma y multiplicación entre sucesiones numéricas reales y la multiplicación de escalares por sucesiones numéricas reales aplicando las propiedades de los números reales.
Identificar sucesiones convergentes y calcular el límite de la sucesión.	

En esta unidad se aborda el tema de funciones, sus gráficas y análisis. Como orientación metodológica el docente puede abordar la unidad con el apoyo de las TIC. Una herramienta que se sugiere es el manejo de los *software* DESMOS y GEOGEBRA, los cuales ayudarán a los estudiantes a comprender, interpretar y analizar con mayor profundidad el tema de funciones.

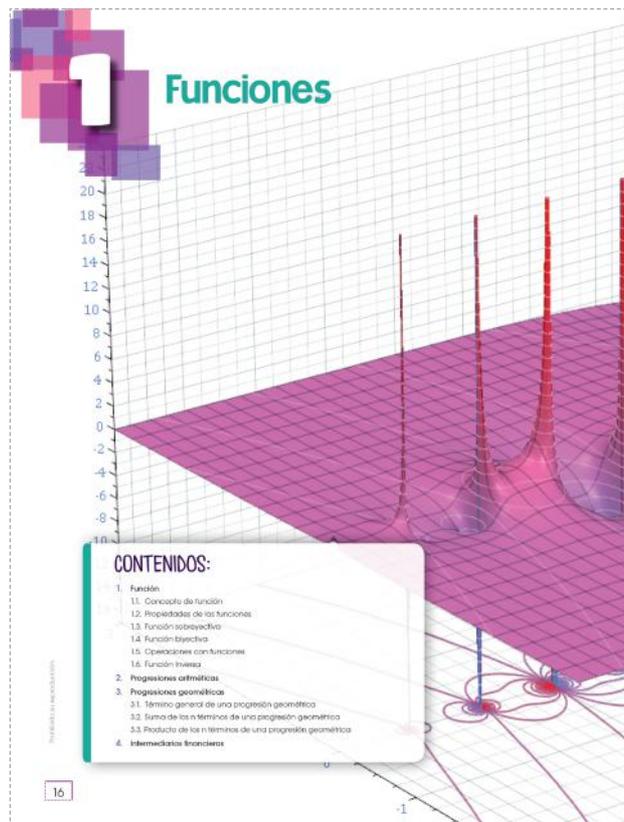
Forme grupos de trabajo que busquen y analicen gráficas en los medios de información y las relacionen con los distintos tipos de funciones estudiados en la unidad.

Puede presentar diferentes gráficas para que los alumnos reconozcan a qué tipo de función corresponde. También puede proponer situaciones contrarias, dibujar una gráfica y plantear situaciones que se adapten a ella.

La aplicabilidad de subtemas que recoge esta unidad como por ejemplo, sucesiones puede ser enfocada desde un punto de vista práctico, con problemas de la vida real para que los estudiantes se familiaricen con la aplicabilidad del tema.

Una vez reconocidas las sucesiones, es frecuente confundir el lugar que ocupa cada uno de los términos con su valor. Por ello, es conveniente hacer observar el orden que se establece en una sucesión.

Puede presentarse la siguiente situación y proponer que la continúen: la



numeración de los portales en uno de los lados de una calle, por ejemplo, el de los pares:

$$\begin{aligned} \text{1.er portal: } N.^\circ 2 \\ a_1 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2.er portal: } N.^\circ 4 \\ a_2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{3.er portal: } N.^\circ 6 \\ a_3 = 6 \end{aligned}$$

El alumno debe saber distinguir entre progresiones aritméticas y geométricas. Para ello, pueden proponerse actividades en las que deban diferenciarlas, como por ejemplo, dibujar un segmento de 5 cm, y llevar a cabo las siguientes actividades:

- Construir una sucesión de segmentos a partir del dibujado en la que cada nuevo segmento que se dibuje tenga 2 cm más que el anterior. ¿Qué clase de progresión forman estos segmentos?
- Construir una sucesión de segmentos a partir del dibujado en la que cada nuevo segmento que se dibuje tenga una longitud doble que el anterior. ¿Qué clase de progresión forman estos segmentos?

Es importante que el estudiante aprenda a obtener las expresiones

del término general, de la suma de los n primeros términos y del producto de los n primeros términos de una progresión geométrica, así como de la suma ilimitada de una progresión geométrica decreciente y de la interpolación de términos geométricos, con el fin de desarrollar su capacidad de razonamiento y de deducción.

Además, se puede solicitar a los estudiantes que busquen información sobre la *sucesión de Fibonacci* y el *número de oro* y sus aplicaciones en la vida cotidiana. El alumnado puede recurrir, con la ayuda de un buscador, a la consulta en Internet.

Las edades de tres hermanas están en progresión aritmética y suman 27 años. Sabiendo que la edad de la mayor es el doble de la edad de la menor, calcula las tres edades.

Actividades complementarias

Las edades de tres hermanas están en progresión aritmética y suman 27 años. Sabiendo que la edad de la mayor es el doble de la edad de la menor, calcula las tres edades.

$$27 = \frac{(a_1 + 2a_1) * 3}{2} ; 3a_1 = 18 ; a_1 = 6$$

$$a_1 + 2d = 2a_1 ; d = \frac{a_1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Las edades son 6, 9 y 12 años.

Solucionario

1. a. $f(x) = 4x^2 + 2$

$$f(-1) = 4(-1)^2 + 2 = 4(1) + 2$$

$$f(-1) = 6$$

$$f(0) = 4(0)^2 + 2 = 4(0) + 2$$

$$f(0) = 2$$

$$f(1) = 4(1)^2 + 2 = 4(1) + 2$$

$$f(1) = 6$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = 4\left(\frac{1}{4}\right) + 2$$

$$f(\sqrt{2}) = 4(\sqrt{2})^2 + 2 = 4(2) + 2$$

$$f(\sqrt{2}) = 10$$

b. $g(x) = -2x^2 + 2$

$$g(-1) = -2(-1)^2 + 2 = -2(1) + 2$$

$$g(-1) = 0$$

$$g(0) = -2(0)^2 + 2 = -2(0) + 2$$

$$g(0) = 2$$

$$g(1) = -2(1)^2 + 2 = -2(1) + 2$$

$$g(1) = 0$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = -2\left(\frac{1}{4}\right) + 2$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$g(\sqrt{2}) = -2(\sqrt{2})^2 + 2 = -2(2) + 2$$

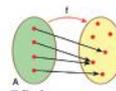
$$g(\sqrt{2}) = -2$$

Expresión analítica de una función

Al conjunto A se le llama conjunto de salida y al conjunto B, conjunto de llegada.

Si un elemento x del conjunto A se corresponde con un elemento y del conjunto B, decimos que y es la imagen de x por la función f, o que x es una antimagen de y por la función f.

En la figura se representa una función mediante diagramas de Venn.



Observa que todos los elementos de A tienen una única imagen, pero que no todos los elementos de B han de tener antimagen, ni esta ha de ser única.

Una función se puede interpretar mediante una expresión matemática que permite calcular las imágenes de los elementos del conjunto de salida y las antimágenes de los elementos del conjunto de llegada.

Esta expresión matemática se convierte en una «fórmula» que se deriva del lenguaje algebraico: por ejemplo, considerando la situación de función en los números reales, al asignar a cada número real el triple del cuadrado de un número aumentado en 5. Es posible definir la función.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = 3x^2 - 5$$

Cálculo de imágenes

En la función anterior $f: x \mapsto f(x) = 3x^2 - 5$

Para calcular la imagen respectiva de cualquier elemento x del conjunto de salida, basta con sustituir el valor considerado para x.

$$\text{Si } x = -1; f(-1) = 3(-1)^2 - 5 = -2$$

Así, -2 es la imagen de -1.

Escribiremos: $f(-1) = -2$

1. Considerando las siguientes funciones, calcula sus respectivas imágenes para $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$; $x = \frac{1}{2}$; $x = \sqrt{2}$.
- a. $f: x \mapsto f(x) = 4x^2 + 2$
 - b. $g: x \mapsto g(x) = -2x^2 + 2$
 - c. $h: x \mapsto h(x) = \sqrt{2} - 2x^2$

Y TAMBIÉN: 21

Lenguaje matemático

Las funciones suelen representarse por los letras f, g, h...

Y TAMBIÉN: 23

Variable independiente y variable dependiente

En la expresión: $y = f(x)$

- A x se le llama variable independiente.
- A y se le llama variable dependiente.

Solucionario

2. a. $f(x) = 2x^2 - 2$

Para -1 : $-1 = 2x^2 - 2$

despejando x , se tiene:

$$2x^2 = 2 - 1 ; 2x^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} ; \text{por tanto:}$$

Para 0 : $0 = 2x^2 - 2$

despejando x , se tiene:

$$2x^2 = 2 ; x^2 = 1$$

$$x = \pm 1 ; \text{por tanto: } f^{-1}(0) = \{1; -1\}$$

Para 1 : $1 = 2x^2 - 2$

despejando x , se tiene:

$$2x^2 = 2 + 1 ; 2x^2 = 3$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{6}}{2} ; \text{por tanto: } f^{-1}(1) = \left\{ \frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2} \right\}$$

Para $1/2$: $\frac{1}{2} = 2x^2 - 2$

despejando x , se tiene:

$$2x^2 = 2 + \frac{1}{2} ; 2x^2 = \frac{5}{2}$$

$$x = 2 \pm \frac{\sqrt{5}}{2} ; \text{por tanto:}$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{ \frac{\sqrt{5}}{2}; -\frac{\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Para $\sqrt{2}$: $2x^2 - 2$

despejando x , se tiene:

$$2x^2 = \sqrt{2} + 2 ; x^2 = \frac{\sqrt{2} + 2}{2}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2\sqrt{2} + 4}}{2} ; \text{por tanto:}$$

$$f^{-1}(\sqrt{2}) = \left\{ \frac{\sqrt{2\sqrt{2} + 4}}{2}; -\frac{\sqrt{2\sqrt{2} + 4}}{2} \right\}$$

Para 0 : $0 = \frac{\sqrt{2}}{3} - 4x^2$

b. $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{3} - 4x^2$

Para -1 : $-1 = \frac{\sqrt{2}}{3} - 4x^2$

despejando x , se tiene:

$$4x^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} + 1 ; 4x^2 = \frac{\sqrt{2} - 3}{3}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3\sqrt{2} - 9}}{6} ; \text{por tanto:}$$

$$f^{-1}(-1) = \left\{ \frac{\sqrt{3\sqrt{2} - 9}}{6}; -\frac{\sqrt{3\sqrt{2} - 9}}{6} \right\}$$

Para 0 : $0 = \frac{\sqrt{2}}{3} - 4x^2$

despejando x , se tiene:

$$f^{-1}(0) = \left\{ \frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{6}; -\frac{\sqrt{3\sqrt{2}}}{6} \right\}$$

Para -1 : $-1 = \frac{\sqrt{2}}{3} - 4x^2$

despejando x , se tiene:

$$4x^2 = \frac{\sqrt{2}}{3} - 1 ; 4x^2 = \frac{\sqrt{2} - 3}{3}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3\sqrt{2} - 9}}{6} ; \text{por tanto:}$$

$$f^{-1}(1) = \left\{ \frac{\sqrt{3\sqrt{2} - 9}}{6}; -\frac{\sqrt{3\sqrt{2} - 9}}{6} \right\}$$

Para $1/2$: $\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3} - 4x^2$

despejando x , se tiene:

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{ \frac{\sqrt{12\sqrt{2} - 18}}{12}; -\frac{\sqrt{12\sqrt{2} - 18}}{12} \right\}$$

Para $\sqrt{2}$: No tiene solución.

UNIDAD I

Solucionario

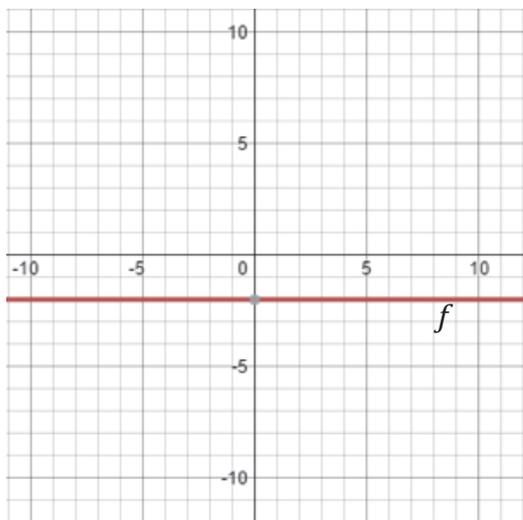
Representa gráficamente las siguientes funciones:

- $f : x \rightarrow f(x) = -2$
- $f : x \rightarrow f(x) = -2x + 5$
- $f : x \rightarrow f(x) = x^2 - 2x - 3$

3. a. $f(x) = -2$

Tabla de Valores

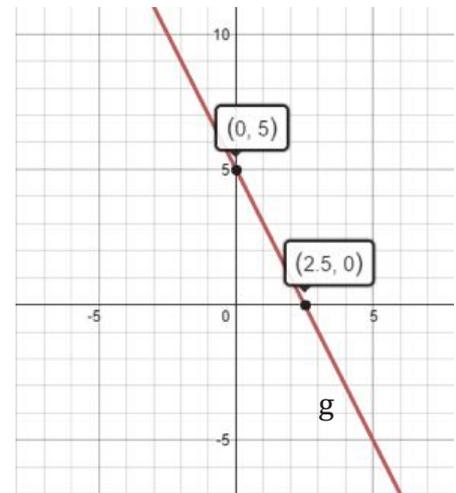
x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-2	-2	-2	-2



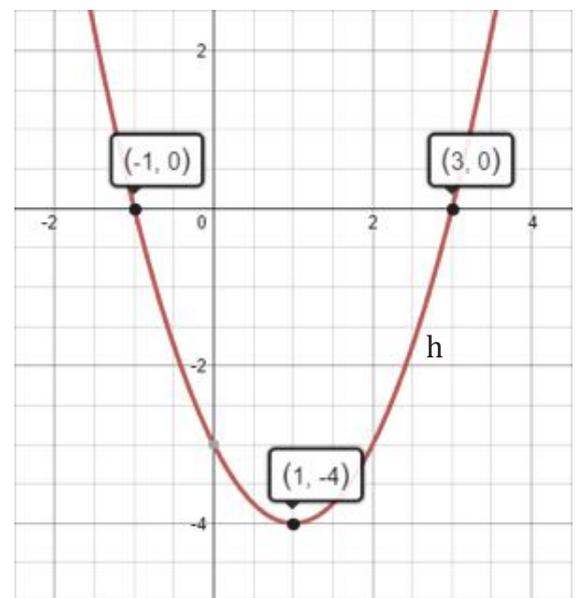
b. $g(x) = -2x + 5$

Tabla de Valores

x	-2	-1	0	1	2
y	9	7	5	3	1



- c. $h(x) = x^2 - 2x - 3$ descomponiendo en factores $h(x) = (x-3)(x+1)$, los cortes con el eje x serían: $x_1 = -1$; $x_2 = 3$ y el vértice es $V(1, -4)$



Y TAMBIÉN:

La siguiente gráfica no representa ninguna función, puesto que a un elemento del dominio le corresponde más de una imagen.

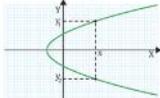


Fig. 4. Una gráfica representa una función si y sólo si cualquier recta vertical corta a la gráfica, como máximo, en un punto.

x	-1	0	3
$f(x)$	0	1	2
$(x, f(x))$	(-1, 0)	(0, 1)	(3, 2)

Tabla 1.

Determinación gráfica del dominio y el recorrido

Dada una función f , se dice que su recorrido son todos los valores definidos de "y" para los cuales le corresponde, a cada uno de ellos, un valor de x determinado que pertenece a su dominio. Se simboliza como: $R(f)$

Para determinar el dominio y el recorrido de una función a partir de su gráfica, nos fijaremos en todos los pares de números reales de la forma (x, y) representados.

- Un número real $x = a$ es del dominio de una función si y sólo si la recta vertical $x = a$ corta a la gráfica en un punto.
- Un número real $y = b$ es del recorrido de una función si y sólo si la recta horizontal $y = b$ corta a la gráfica en al menos un punto.

Hallar el dominio y el recorrido de la función $f: x \rightarrow f(x) = \sqrt{x+1}$ y representarla gráficamente.

- Determinamos el dominio y el recorrido a partir de la gráfica y comprobamos que coinciden con los hallados previamente.

Para que la imagen de x por la función f sea un número real, es necesario que el radicando sea positivo o cero, es decir, $x + 1 \geq 0$. Por tanto, el dominio es:

$$D(f) = [-1, +\infty)$$

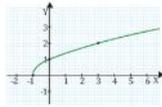
Sólo son imágenes por la función los números reales positivos o cero, es decir, $y \geq 0$. Por tanto, el recorrido es:

$$R(f) = [0, +\infty)$$

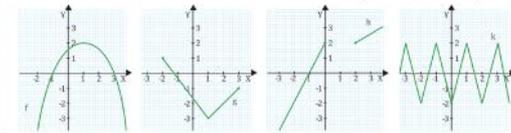
Para representar gráficamente la función, construimos una tabla con unos cuantos pares de valores:

Al representar estos pares de valores en unos ejes de coordenadas, obtendremos diversos puntos del plano situados sobre un arco de parábola.

Observa que una recta vertical $x = a$ corta a la gráfica si $a \geq -1$, y una recta horizontal $y = b$ corta a la gráfica si $b \geq 0$. Luego, el dominio y el recorrido coinciden con los hallados previamente.



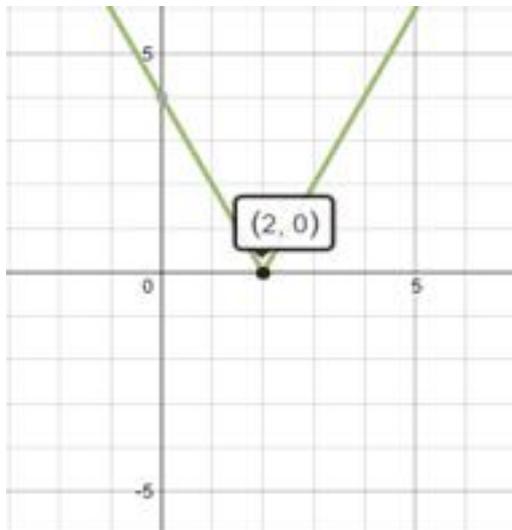
4. Determina el dominio y el recorrido de cada una de las funciones siguientes a partir de su gráfica.



Actividades

Actividades complementarias

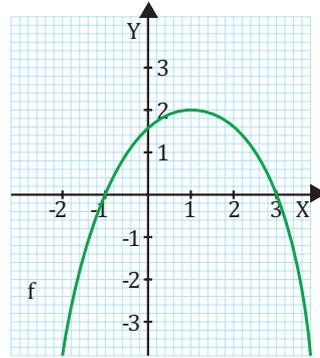
Actividad complementaria. Dada la gráfica, determina dominio y recorrido



Determina el dominio y el recorrido de cada una de las funciones siguientes a partir de su gráfica.

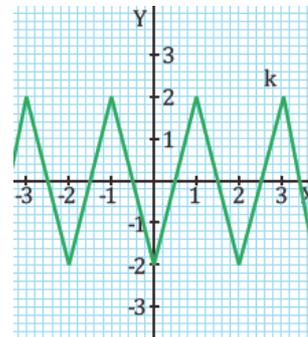
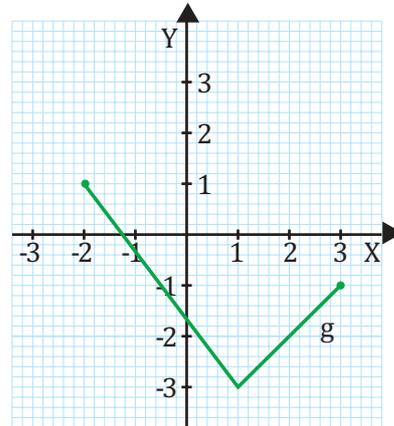
Dominio de $f: x \in \mathbb{R}$

Recorrido de $f: y \in \mathbb{R}; (-\infty, +2]$



Dominio de $g: x \in \mathbb{R}; [-2, 3]$

Recorrido de $g: y \in \mathbb{R}; [-3, 1]$



Dominio de $h: x \in \mathbb{R}; (-\infty, +0] \cup [2+, +\infty)$

Recorrido de $h: y \in \mathbb{R}$

Solucionario

5. a. Análisis algebraico

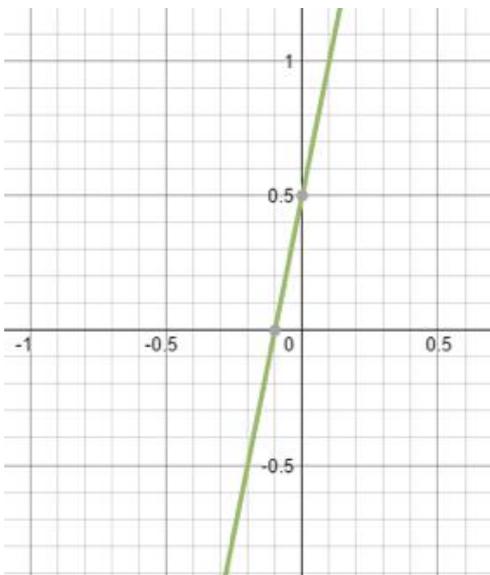
Si $x_1=0$ entonces, $g(0)=1/2$

Si $x_2=1$ entonces, $g(1)=11/2$

Por tanto: $x_1 \neq x_2$ y $g(x_1) \neq g(x_2)$

$g(x)$ es inyectiva

Análisis gráfico



Cualquier recta horizontal corta como máximo en un punto a la gráfica, por tanto, $g(x)$ es inyectiva.

Análisis con tabla de valores

x	-1	0	1	2	
y	-9/2	1/2	11/2	21/2	

Como a cada valor diferente de "x" se le atribuye un valor diferente de "y" entonces, $g(x)$ es inyectiva.

b. $f(x)$ no es inyectiva.

c. $h(x)$ es inyectiva.

d. $f(x)=x^2+1$. Análisis algebraico

Si $x_1=1$ entonces, $f(1)=2$

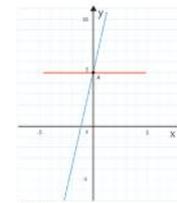


Fig. 6.

x	f(x) = 4x + 5	(x, f(x))
:	:	:
-1	1	(-1, 1)
0	5	(0, 5)
1	9	(1, 9)
:	:	:

Tabla 1.

Tabla de valores de la función $y = 4x + 5$

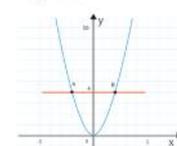


Fig. 7.

x	f(x) = x^2	(x, f(x))
:	:	:
-2	4	(-2, 4)
0	0	(0, 0)
2	4	(2, 4)
:	:	:

Tabla 2.

Tabla de valores de la función $y = x^2$

Análisis de la tabla de valores

Es un conjunto de valores registrados en una tabla, los más que determinan la relación entre dos conjuntos o más, pero que, de manera usual para el estudio de las funciones, utilizaremos únicamente tres columnas de datos.

Recordando el principio de inyectividad, tenemos que:

Si $x_1 \neq x_2$, entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in D(f)$

Es decir, al tomar dos valores diferentes de la columna x (conjunto de partida) registrados en la tabla, los valores respectivos que se obtienen según la columna $(y = 4x + 5)$, sus respectivas imágenes deben ser diferentes.

Así entonces podemos determinar si una función es inyectiva de forma numérica.

Según los datos de la tabla para la función $y = 4x + 5$, podemos observar que, al considerar los valores para x, las imágenes obtenidas son diferentes:

$$f(-1) = 1; f(0) = 5 \text{ y } f(1) = 9$$

Por lo que se verifica que la función correspondiente es inyectiva.

Mientras que al analizar los valores de la función $y = x^2$, observamos que: $f(-2) = 4; f(0) = 0$ y $f(2) = 4$

Las imágenes para $x = -2$ y $x = 2$ son iguales, por lo que se puede concluir que la función $y = x^2$ no es inyectiva.

5. Verifica si las siguientes funciones son inyectivas, utilizando el análisis algebraico, gráfico y de tabla de valores.

- a. $g: x \rightarrow g(x) = 5x + \frac{1}{2}$
- b. $f: x \rightarrow f(x) = -4x^2 + 6$
- c. $h: x \rightarrow h(x) = \sqrt{x} - 3$
- d. $f: x \rightarrow f(x) = x^2 + 1$
- e. $f: x \rightarrow f(x) = 4x - 1$
- f. $f: x \rightarrow f(x) = 3x - 2$

Actividades

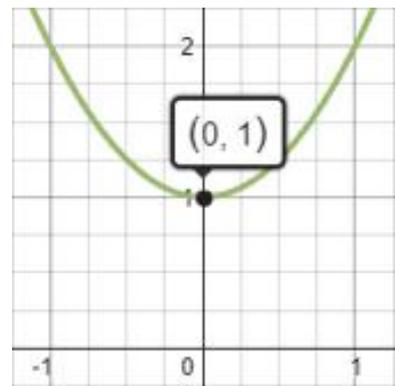
Si $x_2=-1$ entonces, $f(-1)=2$, por tanto: $x_1 \neq x_2$ y

$f(x_1) = f(x_2)$. Entonces $f(x)$ no es inyectiva.

Análisis gráfico

e) Es inyectiva.

f) Es inyectiva.



se le atribuye un valor diferente de "y" entonces, $g(x)$ es inyectiva.

b. $f(x)$ no es inyectiva.

c. $h(x)$ es inyectiva.

d. $f(x)=x^2+1$. Análisis algebraico

Si $x_1=1$ entonces, $f(1)=2$

Análisis Gráfico

Gráficamente, podemos determinar si una función es sobreyectiva cuando al determinar el recorrido de forma gráfica, este debe coincidir con el conjunto de llegada en la función propuesta.

Si consideramos la función: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^2 + 2$

Observamos que el conjunto inicial de f es \mathbb{R} , además que el conjunto de llegada de f es \mathbb{R} .

En la gráfica de la función f definida por $f: x \mapsto f(x) = x^2 + 2$, al determinar el recorrido de manera gráfica, tenemos que la imagen de la función f es $[2, \infty)$.

De modo que podemos concluir que el recorrido de la función no coincide con el conjunto final de f ; entonces concluimos que: $f(x) = x^2 + 2$ no es sobreyectiva.

Ahora bien, analizando la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3$, podemos concluir rápidamente que la función es sobreyectiva, debido a que el conjunto del recorrido coincide con el conjunto final.

Gráfica de la función

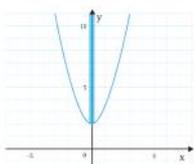


Fig. 9. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = x^2 + 2$
 $\text{Rec}(f) = [2, +\infty[$
 f no es sobreyectiva

Gráfica de la función

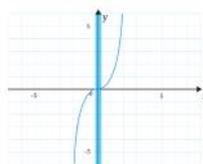


Fig. 10. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto y = x^3$
 $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$
 f sí es sobreyectiva

6. Analiza la inyectividad y sobreyectividad de las funciones $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, utilizando los métodos algebraico, gráfico y de análisis de valores.

- a. $f: x \mapsto f(x) = 4x^2 - 2$ b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x+4}$ c. $f: x \mapsto f(x) = -4x + \frac{3}{4}$

Actividades

Sobreyectividad

Dominio $f: x \in \mathbb{R}$

Recorrido $f: y \in \mathbb{R}; [-2; +\infty)$

Dominio $f \neq$ Recorrido f

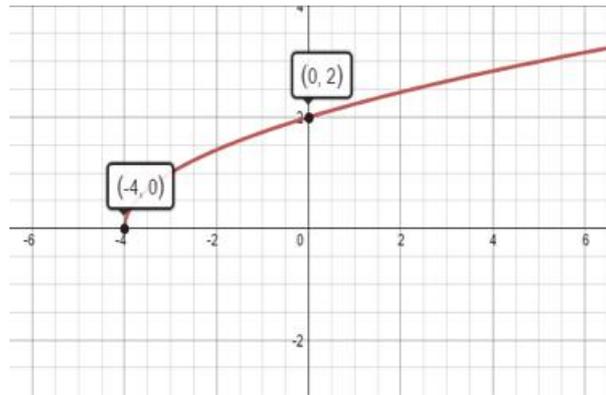
Por tanto, $f(x)$ no es sobreyectiva

c) $f(x) = -4x + 3/4$

Análisis tabla de valores

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	35/4	19/4	3/4	-13/4	-29/4

La tabla muestra que para valores diferentes de x se obtienen imágenes diferentes, por tanto, $f(x)$ es inyectiva. También, es sobreyectiva porque el dominio de f coincide con su recorrido.



Solucionario

6. a. $f(x) = 4x^2 - 2$

Análisis algebraico

Inyectividad

Si $x_1 = 1$, entonces $f(1) = 2$

Si $x_2 = -1$, entonces $f(-1) = 2$

Por tanto, $x_1 \neq x_2, f(1) = f(-1)$

Entonces, $f(x)$ no es inyectiva

Sobreyectividad

Dominio $f: x \in \mathbb{R}$

Recorrido $f: y \in \mathbb{R}; [-2; +\infty)$

Dominio $f \neq$ Recorrido f

Por tanto, $f(x)$ no es sobreyectiva

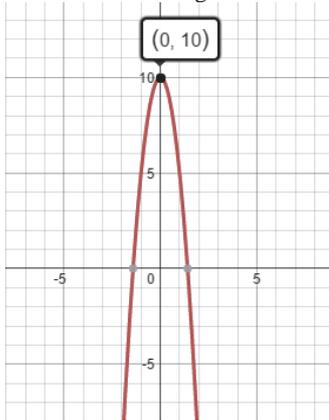
b) $f(x) = \sqrt{x+4}$

Análisis gráfico

Inyectividad

Solucionario

7. a) $f(x) = -5x^2 + 10$
Análisis gráfico



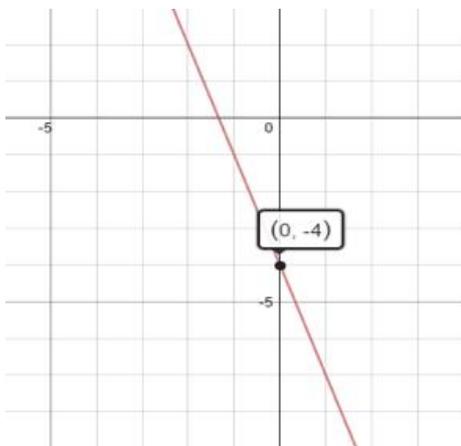
Existe al menos una recta que corta en dos puntos a la gráfica, por tanto, $f(x)$ no es inyectiva. Entonces, no

b. $f(x) = -3x - 4$

Análisis gráfico

Si trazamos una recta horizontal, la gráfica queda cortada en un solo punto.

Por tanto, $f(x)$ es inyectiva.



Cualquier recta trazada horizontalmente corta en un solo punto a la gráfica, por tanto, $f(x)$ es inyectiva. El dominio y recorrido de f es los reales, entonces $f(x)$ es sobreyectiva. Conclusión: $f(x)$ es biyectiva.

1.4. Función biyectiva

Si una función f es sobreyectiva y a la vez inyectiva, entonces es biyectiva.

Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = 3x - 2$, determinemos si es biyectiva.

Ejemplo 7

Análisis algebraico	Análisis numérico	Análisis gráfico														
$3x_1 - 2 = 3x_2 - 2$ $3x_1 - 2 + 2 = 3x_2 - 2 + 2$ $3x_1 = 3x_2$ $\frac{3x_1}{3} = \frac{3x_2}{3}$ $x_1 = x_2$	<table border="1"> <tr><th>x</th><th>f(x) = 3x - 2</th></tr> <tr><td>:</td><td>:</td></tr> <tr><td>-1</td><td>-5</td></tr> <tr><td>0</td><td>-2</td></tr> <tr><td>1</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>4</td></tr> <tr><td>:</td><td>:</td></tr> </table>	x	f(x) = 3x - 2	:	:	-1	-5	0	-2	1	1	2	4	:	:	
x	f(x) = 3x - 2															
:	:															
-1	-5															
0	-2															
1	1															
2	4															
:	:															
Por lo tanto f es inyectiva	Las imágenes obtenidas son diferentes, por lo tanto f es inyectiva.	Se observa que el recorrido coincide con el conjunto de salida, además es inyectiva.														

Tabla 5

Según el análisis, podemos concluir que la función es biyectiva.

Si una función no es inyectiva, no es necesario analizar su sobreyectividad para determinar si es biyectiva, o también, si no es sobreyectiva tampoco será necesario verificar la inyectividad para determinar su biyectividad.

Una función no biyectiva puede ser inyectiva o sobreyectiva, o bien, ninguna de las dos.

7. Dadas las funciones, realiza la representación gráfica y determina si son biyectivas analizando el criterio algebraico, numérico y gráfico.

a. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = -5x^2 + 10$

b. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = -3x - 4$

c. $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{R}; \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x) = \sqrt{x+5} + 2$

Prohibida su reproducción

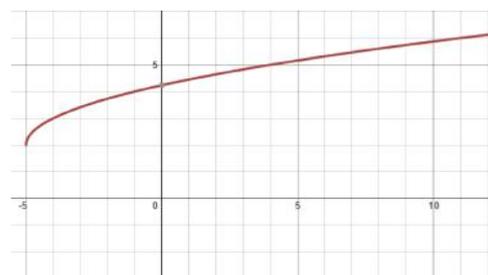
c. $f(x) = \sqrt{x+5} + 2$

Análisis gráfico

Cualquier recta trazada horizontalmente corta en un solo punto a la gráfica, por tanto, $f(x)$ es inyectiva. El dominio y recorrido de f son diferentes, entonces $f(x)$ es no sobreyectiva. Conclusión: $f(x)$ es no biyectiva.

$f(x) = \sqrt{x+5} + 2$

Análisis gráfico



Cualquier recta trazada horizontalmente corta en un solo punto a la gráfica, por tanto, $f(x)$ es inyectiva. El dominio y recorrido de f son diferentes, entonces $f(x)$ es no sobreyectiva. Conclusión: $f(x)$ es no biyectiva.

Ejemplo 9

Dadas las siguientes funciones: $f: x \rightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - x}$; $g: x \rightarrow g(x) = \frac{\sqrt{x}}{4}$. Calcular:

a. $f \cdot g: x \rightarrow f(f \cdot g)(x)$; b. $f \cdot g: x \rightarrow (f \cdot g)(4)$; c. $\frac{f}{g}: x \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)$; d. $\frac{f}{g}: x \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(2)$

a. $f \cdot g: x \rightarrow (f \cdot g)(x)$
 $= (\sqrt{x^2 - x}) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{4}\right)$ Reemplazamos las funciones f y g

$= \frac{\sqrt{x^3 - x^2}}{4}$ Expresión resultante

b. Valor numérico de $(f \cdot g)(4)$

$= \frac{\sqrt{4^3 - 4^2}}{4}$ Reemplazamos $x = 4$

$= \frac{\sqrt{64 - 16}}{4}$ Resolvemos las potencias

$= \frac{\sqrt{48}}{4}$ Resolvemos la diferencia

$= \frac{4\sqrt{3}}{4}$ Simplificamos el radical

$= \sqrt{3}$ Simplificando la fracción

c. $\frac{f}{g}: x \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Reemplazamos las funciones f y g

$= \frac{\sqrt{x^2 - x}}{\frac{\sqrt{x}}{4}}$ Realizamos el producto de medios y extremos

$= \frac{4\sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{x}}$ Simplificamos la expresión

$= 4\sqrt{x - 1}$

d. Calculamos el valor numérico

$\frac{f}{g}: x \rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(2) = 4\sqrt{2 - 1}$ Reemplazamos las funciones f y g

$= 4\sqrt{1}$ Resolvemos la potencia y la diferencia

$= 4$

8. Dadas las siguientes funciones: $h: x \rightarrow h(x) = -\sqrt{x}$; $g: x \rightarrow g(x) = 4x^2 + \frac{1}{2}$; $f: x \rightarrow f(x) = 5x^2 - \frac{1}{2}$ suponiendo que $f(x) \neq 0$ A $g(x) \neq 0$. Calcular:

a. $h + g$ c. $h + 2g$ e. $h + 2g$ g. $\frac{h}{f}$ i. $\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(2)$

b. $h - g$ d. $f + g + h$ f. $g + f$ h. $\frac{h \cdot g}{f}$ j. $\left(\frac{h}{g} + h\right)(4)$

29

Solucionario

8. a) $(h + g)(x) = -\sqrt{x} + 4x^2 + \frac{1}{2}$

b) $(h - g)(x) = -\sqrt{x} - \left(4x^2 + \frac{1}{2}\right)$

$(h - g)(x) = -\sqrt{x} - 4x^2 - \frac{1}{2}$

c) $(h + 2g)(x) = -\sqrt{x} + 2\left(4x^2 + \frac{1}{2}\right)$

$(h + 2g)(x) = -\sqrt{x} + 8x^2 + 1$

d) $(f + g + h)(x) =$

$5x^2 - \frac{1}{2} + 4x^2 + \frac{1}{2} - \sqrt{x}$

e) $(h + 2g)(4) = -\sqrt{4} + 8(4)^2 + 1$

$(h + 2g)(4) = -2 + 8(16) + 1$

$(h + 2g)(4) = -2 + 128 + 1$

$(h + 2g)(4) = 127$

f) $(g + f)(x) = 4x^2 + \frac{1}{2} + 5x^2 - \frac{1}{2}$

$(g + f)(x) = 9x^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$

$(g + f)(x) = 9x^2$

g) $\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{-\sqrt{x}}{5x^2 - \frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{x}}{\frac{10x^2 - 1}{2}}$

h) $\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(x) = \frac{-\sqrt{x}(8x^2 + 1)}{10x^2 - 1}$

$\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(2) = \frac{-\sqrt{2}(8(2)^2 + 1)}{10(2)^2 - 1} = \frac{-\sqrt{2}(32 + 1)}{40 - 1}$

$\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(2) = \frac{-\sqrt{2}(33)}{39} = -\frac{\sqrt{2}(11)}{13} = -\frac{11\sqrt{2}}{13}$

i) $\left(\frac{h}{g} + h\right)(x) = \frac{-\sqrt{x}}{4x^2 + \frac{1}{2}} - \sqrt{x} = \frac{-2\sqrt{x}}{8x^2 + 1} - \sqrt{x}$

$\left(\frac{h}{g} + h\right)(x) = \frac{-2\sqrt{x}}{8x^2 + 1} - \sqrt{x} = \frac{-2\sqrt{x} - \sqrt{x}(8x^2 + 1)}{8x^2 + 1}$

$\left(\frac{h}{g} + h\right)(4) = \frac{-2\sqrt{4} - \sqrt{4}(8(4)^2 + 1)}{8(4)^2 + 1} = \frac{-4 - 2(129)}{129}$

$\left(\frac{h}{g} + h\right)(4) = \frac{-4 - (258)}{129} = -\frac{262}{129}$

$\left(\frac{h}{f}\right)(x) = \frac{-2\sqrt{x}}{10x^2 - 1}$

h) $\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(x) = \frac{-\sqrt{x}}{5x^2 - \frac{1}{2}} \cdot \left(4x^2 + \frac{1}{2}\right)$

$\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(x) = \frac{-\sqrt{x}}{10x^2 - 1} \cdot \left(4x^2 + \frac{1}{2}\right)$

$\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(x) = \frac{-2\sqrt{x}}{10x^2 - 1} \cdot \left(\frac{8x^2 + 1}{2}\right)$

$\left(\frac{h \cdot g}{f}\right)(x) = \frac{-\sqrt{x}(8x^2 + 1)}{10x^2 - 1}$

Solucionario

9. a) $f(x) = x^3 - 1$, despejamos x
 $y = x^3 - 1$; $x^3 = y + 1$

$x = \sqrt[3]{y + 1}$, intercambiamos letras

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

b) $g(x) = \frac{x+1}{2}$, despejamos x

$y = \frac{x+1}{2}$; $x + 1 = 2y$; $x = 2y - 1$

Intercambiamos letras:

$g^{-1}(x) = 2x - 1$

c) $h(x) = \frac{x+1}{x-2}$, despejamos x

$y = \frac{x+1}{x-2}$; $y(x - 2) = x + 1$

multiplicando distributivamente,

$xy - 2y = x + 1$; $xy - x = 2y + 1$

Sacando factor común,

$x(y - 1) = 2y + 1$; $x = \frac{2y+1}{y-1}$

Intercambiamos letras:

$h^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

ACTIVIDADES

COMPLEMENTARIAS

1) Calcula la inversa de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (x - 3)^2$

h) $m(x) = x^3 + 5$

b) $g(x) = x^{1/4} - 4$

i) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

c) $h(x) = \frac{3}{2}x + 1$

j) $g(x) = \frac{3x+5}{x-2}$

d) $i(x) = -x^7$

k) $h(x) = \frac{x}{x+1}$

e) $j(x) = x^{2/5}$

f) $k(x) = \frac{3-x}{4+x}$

g) $l(x) = \sqrt[3]{x - 6}$

l) $f(x) = 7x - \frac{1}{2}$

m) $g(x) = 2x^3 + 1$

n) $h(x) = (x + 1)^2 - 3$

Con las ideas antes propuestas definiremos una función inversa:

Sea f una función biyectiva con dominio X y recorrido Y , se define su función inversa, la cual se denota como f^{-1} , con dominio Y y recorrido X , de la siguiente manera:

$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

Propiedades:

- La función $f^{-1}(x)$ es biyectiva, por ende, será inyectiva y sobreyectiva a la vez.
- Los elementos del dominio de la función f coinciden con los elementos del recorrido de la función inversa y viceversa.
- Al realizar las representaciones gráficas, resultan curvas que forman una figura simétrica.
- No todas las funciones tienen inversa.

Cálculo de la función inversa (algebraicamente)

Encontramos $f^{-1}(x)$ si $f: x \mapsto f(x) = \frac{3x+5}{2}$

$y = \frac{3x+5}{2}$

$x = \frac{3y+5}{2}$

$2x = 3y + 5$

$\frac{2x-5}{3} = y$

$y = \frac{2x-5}{3}$

$f^{-1}(x) = \frac{2x-5}{3}$

$f(x) = \frac{3x+5}{2}$

$f^{-1}(x) = \frac{2x-5}{3}$

Verificación Gráfica

$y = \frac{3x+5}{2}$ función f

$y = \frac{2x-5}{3}$ función f^{-1}

$y = x$ Recta identidad

$x = y$ Eje y

Verificación gráfica de una función inversa.

Ejemplo 11

Finalmente, y se reemplaza por $f^{-1}(x)$ resulta entonces:

$f^{-1}(x) = \frac{2x-5}{3}$

9. Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

a. $f: x \mapsto f(x) = x^3 - 1$ b. $g: x \mapsto g(x) = \frac{x+1}{2}$ c. $h: x \mapsto h(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Actividades

Verificación algebraica de la función inversa

Para verificar que una función sea inversa, utilizamos el concepto de composición de funciones.

Una función f es una a uno con su respectiva función g si y solo si:

- $f(g(x))=x$ para todo x en el dominio de g
- además $g(f(x))=x$ para todo x en el dominio de f

Ejemplo 12

Calculamos la función inversa de $y=f(x)=\frac{x+1}{x-2}$, $x \neq 2$

- Despejamos la variable x
 $xy-2y=x+1 \Rightarrow xy-x=2y+1 \Rightarrow x=\frac{2y+1}{y-1}$
- Sustituimos y por x y viceversa: $y=\frac{2x+1}{x-1}$

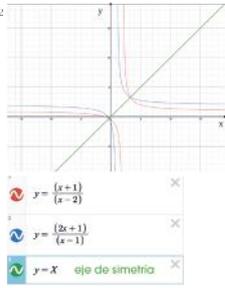
Así pues: $f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x-1}$, $x \neq 1$

Comprobamos que la función hallada es la inversa de la original:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{x+1}{x-2} + 1}{\frac{x+1}{x-2} - 1} = \frac{\frac{2x+1}{x-2} + 1}{\frac{x+1-x+2}{x-2}} = \frac{\frac{2x+1+x-2}{x-2}}{\frac{3}{x-2}} = \frac{3x-1}{3} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{2x+1+1}{\frac{2x+1}{x-1}-2} = \frac{2x+2}{\frac{2x+1-2x+2}{x-1}} = \frac{2(x+1)}{\frac{3}{x-1}} = \frac{2(x+1)(x-1)}{3} = x$$

En efecto: $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$



Ejemplo 13

Demostremos algebraicamente que las funciones

$f: x \mapsto f(x) = x^2 + 1$ y $g: x \mapsto g(x) = \sqrt{x-1}$ son inversas.

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$	$(g \circ f)(x) = g(f(x))$
$(f \circ g)(x) = (x-1)^2 + 1$	$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 + 1 - 1}$
$(f \circ g)(x) = x - 1 + 1$	$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2}$
$(f \circ g)(x) = x$	$(g \circ f)(x) = x$

■ Tabla 11

10. Determina la inversa de las funciones.

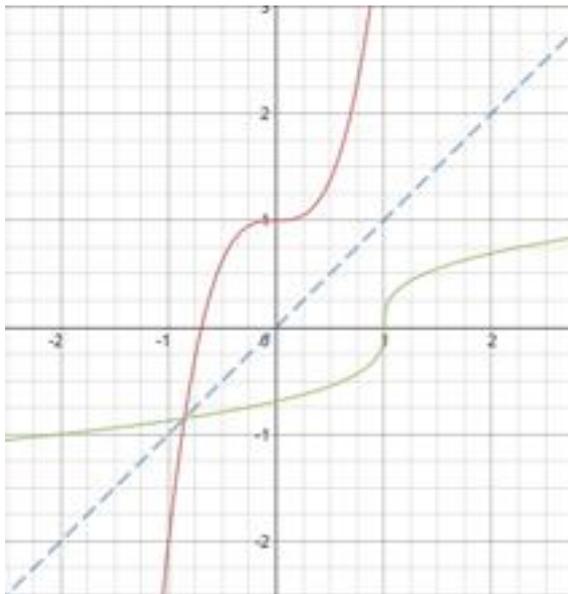
- a. $f: x \mapsto f(x) = 5x + 4$
- b. $f: x \mapsto f(x) = 2x - 1$
- c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{-x+1}{x-3}$

11. Determina $f^{-1}(x)$ para las funciones, verifica tus resultados con el método algebraico y gráfico.

- a. $f: x \mapsto f(x) = 3x^2 + 1$
- b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x-2}$

Solucionario

MÉTODO GRÁFICO (literal a)



10. a) $f(x) = 5x + 4$
 $y = 5x + 4$, despejamos x
 $5x = y - 4$; $x = \frac{y-4}{5}$

Intercambiamos letras
 $f^{-1}(x) = \frac{x-4}{5}$

b) $f(x) = 2x - 1$
 $y = 2x - 1$, despejamos x
 $2x = y + 1$; $x = \frac{y+1}{2}$

Intercambiamos letras
 $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$

c) $f(x) = \frac{-x+1}{x-3}$
despejamos x ; $xy - 3y = -x + 1$
 $xy + x = 3y + 1$; $x = \frac{3y+1}{y+1}$

Intercambiamos letras
 $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x+1}$

11. a) $f(x) = 3x^3 + 1$
 $y = 3x^3 + 1$, despejamos x

$$3x^3 = y - 1$$
; $x = \sqrt[3]{\frac{y-1}{3}}$

Intercambiamos letras

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{3}}$$

b) $f(x) = \sqrt{x-2}$, despejamos x
 $y = \sqrt{x-2}$; $x = y^2 + 2$,

Intercambiamos letras,
 $f^{-1}(x) = x^2 + 2$

Solucionario

$$a_9 = 7 + (9 - 1)3 = 7 + (8)3$$

b) $n = 25, d=3, a_1 = -6$

$$a_{25} = -6 + (25 - 1)3 = -6 + (24)3$$

c) $n = 11, d = -\frac{1}{5}, a_1 = 1$

$$a_{11} = 1 + (11 - 1)\left(-\frac{1}{5}\right) = 1 + (10)\left(-\frac{1}{5}\right)$$

d) $n=29, d = -3, a_1 = -1$

$$a_{29} = -1 + (28)(-3) = -1 - 84$$

$$a_{29} = -85$$

13. a) $n = 11, d = 3, a_1 = 3$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

$$S_{11} = \frac{11}{2}[2(3) + (11 - 1)3]$$

$$S_{11} = 198$$

b) $S_{15} = 57$

c) $S_{21} = 42$

d) $S_6 = 6x + 9y$

$$a_9 = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_9 = 31$$

$$a_{25} = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{25} = 66$$

$$a_{11} = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{11} = -1$$

$$a_{29} = a_1 + (n - 1)d$$

14. a) $n=7, d = 3, a_1 = 7$

$$a_7 = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_7 = 7 + (6)(3) = 7 + 18$$

$$a_7 = 25$$

b) $n = 15, d = 3, a_1 = -6$

$$a_{15} = a_1 + (n - 1)d$$

$$a_{15} = -6 + 14(3) = -6 + 42$$

c) $a_{21} = a_1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 162 \cdot \left(\frac{1}{729}\right) \cdot 36] = 220$

d) $n = 11 \quad a_7 = \frac{162}{729} ; a_7 = \frac{2}{9}$

15. a) $n = 6, d=y, a_1 = x$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

$$S_6 = \frac{6}{2}[2x + (6 - 1)y]$$

$$S_6 = 6x + 15y$$

b) $n = 10, d = 4, a_1 = 4$

$$S_{10} = \frac{10}{2}[2(4) + (10 - 1)4]$$

$$36] = 220$$

Suma de los términos de una progresión aritmética

En varias ejercicios numéricos de progresiones, es posible determinar la suma de los términos de manera directa, por ejemplo en la progresión:

..., 4, 6, 8, 10

La suma de los términos será: 28

Pero existirán algunas progresiones cuyo número de términos sea mucho mayor, por ello, para calcular la suma $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$ de los n primeros términos de una progresión aritmética, podemos calcular mediante las expresiones:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Esta expresión se utilizará cuando con los datos se disponga del número de términos (n), del primer término (a_1) y del último término (a_n).

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)d]$$

En cambio, en esta expresión se debe disponer del número de términos (n), del primer término (a_1) y de la diferencia de la progresión (d).

Tabla 13

Tabla 14

Y TAMBIÉN:

Según la tradición, el problema de hallar el valor de la suma de los cien primeros números naturales fue planteado en 1787 por un profesor a su clase de niños de diez años, para mantenerlos ocupados un buen rato. En esa clase se encontraba el que fue llamado «príncipe de las matemáticas», el alemán Carl-Friedrich Gauss. Gauss observó que si sumaba el primer término con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo, etc., sucesivamente, obtenía siempre el mismo resultado.



Fig. 15
 $1 + 100 = 101$
 $2 + 99 = 101$
 $3 + 98 = 101$
 ...

Así, dedujo que la suma de los cien primeros números naturales es $101 \cdot 50 = 5050$.

12. Determine el n -ésimo término, según corresponda

- a. 9no término de 7, 10, 13, ...
- b. 25vo término de -6, -3, 0, ...
- c. 11vo término de $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \dots$
- d. 29no término de -1, -4, -7, ...

13. En cada una de las progresiones siguientes, halla la suma del número de términos que se indica

- a. 3, 6, 9, ... (n = 11)
- b. 6, 4, 6, 3, 2, ... (n = 15)
- c. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$ (n = 21)
- d. $x - y, x + y, \dots$ (n = 6)

14. Determine el n -ésimo término, según corresponda

- a. 7.º término de 7, 10, 13, ...
- b. 15.º término de -6, -3, 0, ...
- c. 21.º término de $1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \dots$

15. En cada una de las progresiones siguientes, halla la suma del número de términos que se indica

- a. $x, x + y, x + 2y, \dots$ (n = 6)
- b. 4, 8, 12, ... (n = 10)
- c. 8, 4, 0, ... (n = 15)
- d. $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots$ (n = 15)

Actividades

PROFESOR DE MATEMÁTICAS

3.2 Suma de los n términos de una progresión geométrica

A continuación, deduciremos una expresión que nos permitirá obtener la suma de n términos de una progresión geométrica sin necesidad de calcularlos.

Sea $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$ una progresión geométrica y representémoslos por Sn la suma de los n primeros términos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

• Multiplicamos por r dicha expresión:

$$r \cdot S_n = r \cdot a_1 + r \cdot a_2 + r \cdot a_3 + r \cdot a_4 + \dots + r \cdot a_{n-1} + r \cdot a_n$$

$$= a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n \cdot r$$

• Calculamos $r \cdot S_n - S_n$:

$$\begin{array}{r} r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n + a_n \cdot r \\ - S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ \hline r \cdot S_n - S_n = a_n \cdot r - a_1 \end{array}$$

• Sacamos factor común S_n y despejamos:

$$S_n(r-1) = a_n \cdot r - a_1 \Rightarrow S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$$

Puesto que $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, Sn puede expresarse también como:

$$S_n = \frac{(a_1 \cdot r^n) - a_1}{r-1} = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1} \Rightarrow S_n = \frac{a_1 \cdot (r^n - 1)}{r-1}$$

Por tanto, para sumar cualquier número de términos de una progresión geométrica, nos es suficiente con conocer a_1 y r.

Hallemos la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es $r = 3$ y $a_1 = 1$.

Aplicamos la fórmula: $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$

$$S_6 = \frac{a_1(r^6 - 1)}{r - 1} = \frac{1(3^6 - 1)}{3 - 1} = S_6 = 364$$

Y TAMBIÉN:

Cuenta la leyenda que un poderoso rey fue un maestro de ajedrez al que estaba muy agradecido por haberle iniciado en este juego. El rey ofreció al maestro una recompensa. Y éste pidió todo el trigo que se pudiera reunir colocarlo un grano en la primera casilla, dos en la segunda, cuatro en la tercera, y así sucesivamente hasta la casilla sesenta y cuatro del tablero de ajedrez. El rey aceptó gustoso, pues pensaba que con un saco de trigo recompensaría al maestro. Pero su gran sorpresa fue que, al contar los granos de trigo necesarios, se dio cuenta de que no había suficiente trigo en el país para recompensar al maestro. ¿Cómo era posible?

• **Calcula** las toneladas de trigo necesarias para recompensar al maestro, si consideramos que un grano de trigo pesa aproximadamente 0.0496 g.

Ejemplo 18

18. **Calcula** la suma de los quince primeros términos de una progresión geométrica cuyo primer término es $a_1 = 3$ y cuya razón es $r = 2$.

20. De una progresión geométrica se sabe que la suma de sus diez primeros términos es $S_{10} = 29524$ y su razón, $r = 3$. **Halla** el primer término.

19. De una progresión geométrica se conoce $a_1 = 128$ y $r = 4$. **Calcula** la suma de los ocho primeros términos.

21. De una progresión geométrica se conoce $r = 2$ y $a_1 = 768$. **Halla** la suma de los diez primeros términos.

Solucionario

18. $a_1 = 3 ; r = 2$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_{15} = \frac{3(2^{15} - 1)}{2 - 1} = \frac{3(32768 - 1)}{1} = 98301$$

19. $a_4 = 128 ; r = 4$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

primero hallamos a_1

$$a_4 = a_1 \cdot r^{4-1} = a_1 \cdot r^3$$

$$128 = a_1 \cdot 4^3 ; a_1 = \frac{128}{64} = 2$$

$$S_8 = \frac{2(4^8 - 1)}{4 - 1} = \frac{2(65536 - 1)}{3}$$

$$S_8 = \frac{131070}{3} = 43690$$

20. $S_{10} = 29524 ; r = 3$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_{10} = \frac{a_1(3^{10} - 1)}{3 - 1} = \frac{a_1(59048)}{2}$$

$$29524 = a_1 \cdot 29524 ; a_1 = 1$$

21. $a_8 = 768 ; r = 2$, primero hallamos a_1

$$a_8 = a_1 \cdot r^{8-1} = a_1 \cdot r^7$$

$$768 = a_1 \cdot 2^7 ; a_1 = \frac{768}{128} = 6$$

Actividades complementarias

1) Hallar la suma de los 11 primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es $r = 5$ y $a_1 = 4$.

SOLUCIONARIO ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

$$a_1 = 4 ; r = 5 ; n = 11$$

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$S_{11} = \frac{4(5^{11} - 1)}{5 - 1} = \frac{4(48828124)}{4}$$

$$S_{11} = 48828124$$

Solucionario

22. $C = 15\,000$; $I = 560$; $n = 2$
 $I = C \cdot i \cdot n$

reemplazando valores y despejando
 $560 = 15\,000 \cdot i \cdot 2$

$$i = \frac{560}{30\,000} = \frac{30\,000 \cdot i}{30\,000} = \frac{28}{1500} = \frac{14}{750} = \frac{7}{375}$$

$i = 1,9\%$

23. $C = 35\,000$; $i = 6,5\%$; $n = 2,5$
 $I = C \cdot i \cdot n$

reemplazando valores y calculando
 $I = 35\,000 \cdot 0,065 \cdot 2,5$

$I = 5687,5$

24. $C = 2000$; $i_s = 6\%$; $n = 2$;
 $i_c = 5,75\%$

Interés simple

$I = C \cdot i_s \cdot n$

$I = 2000 \cdot 0,06 \cdot 2 = 240$

Interés compuesto

$I = C \cdot [(1 + i_c)^n - 1]$, reemplazo valores

$I = 2000 \cdot [(1 + 0,0575)^2 - 1]$

$I = 2000 \cdot [0,11830625] = 236,6$

Mejor opción: interés simple al 6%.

25. $C = 5000$; $i = 7,5\%$; $n = 5$

$C_n = C \cdot (1 + i)^n$ reemplazo valores

$C_n = 5000 \cdot (1 + 0,075)^5$

$C_n = 5000 \cdot (1,435629326)$

$C_n = 7178$

26. $C_n = 6556,36$; $i = 3\%$; $n = 3$

$C_n = C \cdot (1 + i)^n$; despejamos C

$$C = \frac{C_n}{(1 + i)^n} = \frac{6556,36}{(1 + 0,03)^3} = \frac{6556,36}{1,092727}$$

$C = 6000$, aproximadamente.

27. $C = 2500$; $i = 6,25\%$; $n = 3$

Semestral: $C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2n}$ reemplazo valores

$C_n = 2500 \cdot \left(1 + \frac{0,0625}{2}\right)^{2 \cdot 3} = 3007$.

Trimestral: $C_n = 3011$ Mensual: $C_n = 3014$

28. a) $C_n = 3157,5$ b) $C_n = 3153,5$

Es más beneficiosa la opción a.

Ejemplo 24.

Alberto ha obtenido un capital final de \$5 408 por un depósito que efectuó hace dos años. Sabiendo que su banco le ofrece el 4% de interés compuesto anual, ¿qué cantidad inicial ingresó?

• En primer lugar, expresamos los datos:

$C_n = \$5\,408$ $n = 2$ años $i = 4\% = 0,04$ (tanto por uno)

• Para calcular el capital inicialmente depositado, despejamos C en la fórmula del interés compuesto y sustituimos los datos:

$$C = \frac{C_n}{(1 + i)^n} \Rightarrow C = \frac{5408}{(1 + 0,04)^2} \Rightarrow C = \$5\,000$$

Ejemplo 25.

Calcula el capital final que obtendrá Ana al cabo de dos años por un depósito de \$20 000 en un banco que le ofrece el 5% anual, según la liquidación sea semestral, trimestral o mensual. Aplicamos la fórmula correspondiente según la liquidación sea semestral, trimestral o mensual.

• Liquidación semestral:

$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2n} \Rightarrow C_n = 20000 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^{2 \cdot 2} \Rightarrow 22076,26$

• Liquidación trimestral:

$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4n} \Rightarrow C_n = 20000 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{4}\right)^{4 \cdot 2} \Rightarrow 22089,72$

• Liquidación mensual:

$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12n} \Rightarrow C_n = 20000 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{12 \cdot 2} \Rightarrow 22098,83$

Observamos que cuanto más frecuentes sean los periodos de liquidación, más aumenta el capital.

Y TAMBIÉN!

Si los intereses se capitalizan semestralmente, trimestralmente o mensualmente, tendremos que expresar el tipo de interés y el tiempo en función del periodo de liquidación, siendo n el número de años.

Liquidación semestral:

$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2n}$

Liquidación trimestral:

$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4n}$

Liquidación mensual:

$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12n}$

ACTIVIDADES

22. Por un depósito de \$15 000 hemos obtenido al cabo de dos años un beneficio de \$560. ¿qué interés simple nos aplica la entidad financiera?

23. Calcula qué beneficio produjo un capital de \$35 000 durante 2,5 años al 6,5% de interés simple anual.

24. Queremos efectuar un depósito de \$2 000 a dos años. ¿qué opción es la más beneficiosa: un interés simple del 6% o un interés compuesto del 5,75%?

25. Calcula el capital final que obtendremos por un depósito de \$5 000 al 7,5% de interés compuesto anual durante cinco años.

26. Por un depósito que efectuamos hace tres años, hemos obtenido un capital final de \$6 556,36. Sabiendo que la entidad financiera nos aplica un 3% de interés compuesto anual, ¿qué cantidad inicial ingresamos?

27. Calcula el capital final que obtendremos transcurridos tres años por un depósito de \$2 500 al 6,25% de interés compuesto anual, según la liquidación de intereses sea semestral, trimestral o mensual.

28. Calcula qué opción es la más beneficiosa para un depósito a un plazo de un año.

- Un interés anual del 5,25% y una liquidación anual.
- Un interés anual del 5% y una liquidación mensual.

Tasa anual equivalente (TAE)

Hemos visto que los periodos de liquidación de intereses pueden ser inferiores a un año, y hemos comprobado también (ejemplo 23) que cuanto más frecuentes sean estos periodos de liquidación, más dinero recibimos.

Se plantea entonces la siguiente cuestión: ¿cuál es el tipo de interés anual real que se está aplicando si los periodos de liquidación son inferiores a un año?

Este interés se conoce como **tasa anual equivalente (TAE)**. A continuación, veremos, mediante un ejemplo, el modo de deducir la expresión que nos permite calcular la TAE.

Ejemplo 26

Un banco ofrece a sus clientes una cuenta corriente con un interés compuesto anual del 6% y con una liquidación de intereses mensual. ¿Qué TAE está ofreciendo? Al 6% anual le corresponde un 0,5% mensual. Veamos cómo se incrementa el capital de 1 dólar.

• Al final del primer mes, el capital ha aumentado un 0,5%:

$$1 + 0,005 = 1,005$$

• Al término del segundo mes, ha aumentado un 0,5% respecto al mes anterior:

$$1,005 + 1,005 \cdot 0,005 = 1,010$$

o sea, se ha multiplicado por $(1 + 0,005)^2 = 1,010$

• Al cabo del tercer mes ha aumentado un 0,5% respecto del mes anterior:

$$1,010 + 1,010 \cdot 0,005 = 1,015$$

es decir, se ha multiplicado por

$$(1 + 0,005)^3 = 1,015$$

• Y así sucesivamente, después de los doce meses, el capital inicial se ha multiplicado por:

$$(1 + 0,005)^{12} = 1,062$$

Por lo tanto, una vez transcurrido un año, el aumento total del capital inicial ha sido:

$$1,062 = 1 + 0,062 = 1 + \frac{6,2}{100}$$

Así, pues, el 6% de interés anual, cuando los periodos de liquidación son mensuales, se convierte en un interés anual real, esto es, en una TAE del 6,2%.

Y TAMBIÉN:

también en los préstamos bancarios se habla de la TAE correspondiente a un tipo de interés anual. Observa esta información:

5,95% NOMINAL TAE (*) 6,28%

(*) TAE calculada para un préstamo a 12 años de \$ 10.000, comisión de apertura 1% (mínimo \$ 400).

Si calculas la TAE correspondiente a la oferta bancaria del 5,95%, comprobarás que es inferior a la TAE publicada. Eso pasa porque, al calcular la TAE de un préstamo o crédito, se incluyen además las comisiones de estudio y los gastos de apertura que cobra la entidad financiera para conceder el préstamo.

Así, pues, observamos que, a partir del proceso seguido en el ejemplo anterior, podemos deducir esta fórmula para calcular la TAE:

$$TAE = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n - 1$$

donde:

i: interés anual en tanto por uno

n: número de periodos de liquidación de intereses

29. Carlos quiere efectuar un depósito de \$ 1.000 a un año en una caja de ahorros que le ofrece un interés anual del 7%, y con un periodo de liquidación trimestral.

a. ¿Qué TAE le aplicarán?
b. ¿Qué beneficio obtiene Carlos con la liquidación trimestral respecto de la liquidación anual?

30. Rosa efectuó un depósito de \$ 3.500 en una entidad bancaria que le ofrece un interés del 6,5% anual y lo retiró cuando habían transcurrido dos años. Sabiendo que el primer año la liquidación de los intereses fue mensual, y el segundo año, trimestral, calcula:

a. La TAE para cada uno de los años.
b. El capital final.

$$TAE = \left(1 + \frac{0,065}{12}\right)^{12} = 1,065$$

$$TAE = 15,45 \%$$

Segundo año: (trimestral)

$$TAE = \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4n} = \left(1 + \frac{0,065}{4}\right)^{4 \cdot 2}$$

$$TAE = \left(1 + \frac{0,065}{4}\right)^8 = 1,1376$$

$$b) C_n = C \cdot (1 + i)^n$$

$$C_n = 3500 \cdot (1 + 0,065)^2 = 3969,8$$

Actividades complementarias

1) Jorge quiere realizar un depósito de \$ 2000 a un año en un banco que le ofrece una tasa de interés anual del 8% y con un periodo de liquidación trimestral.

a) ¿Qué TAE le aplicarán?

b) ¿Cuál es la liquidación trimestral?

SOLUCIONARIO ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

a) $n = 1$; $i = 0,08$; $TAE = \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4n}$ reemplazo valores:

$$TAE = \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^{4 \cdot 1} = 1,0824; TAE = 8,24 \%$$

b) Trimestral: $C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4n} = 2000 \left(1 + \frac{0,08}{4}\right)^{4 \cdot 1}$
 $C_n = 1082,4$

Solucionario

29. a) $n = 1$; $i = 0,07$

$$TAE = \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4n} \text{ reemplazo valores}$$

$$TAE = \left(1 + \frac{0,07}{4}\right)^{4 \cdot 1} = 1,0715$$

$$TAE = 7,15 \%$$

b) Liquidación trimestral:

$$C_n = C \cdot \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{4n} = 1000 \left(1 + \frac{0,07}{4}\right)^{4 \cdot 1}$$

$$C_n = 1071,86$$

Liquidación anual:

$$C_n = C \cdot (1 + i)^n = 1000 \cdot (1 + 0,07)^1$$

Obtiene un beneficio de \$ 1,86

30. $C = 3500$; $i = 0,065$; $n = 2$

Primer año: (mensual)

$$TAE = \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{12n} = \left(1 + \frac{0,065}{12}\right)^{12 \cdot 2}$$

Solucionario

31. costo \$ 4870; $i = 12\%$
Pagarla en 24 meses.

$$a = \frac{C \cdot \frac{i}{12}}{1 - \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-12n}} \text{ reemplazo valores}$$

$$a = \frac{4870 \cdot \frac{0,12}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{-24}} = 229,25$$

32. $C = 20000$; $n = 4$; $i = 14\%$
Anual:

$$a = \frac{C \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{20\,000 \cdot 0,14}{1 - (1+0,14)^{-4}}$$

$$a = \frac{2800}{0,407919722} = 6864,09$$

Mensual:

$$a = \frac{C \cdot \frac{i}{12}}{1 - \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-12n}} \text{ reemplazo valores}$$

$$a = \frac{20000 \cdot \frac{0,14}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0,14}{12}\right)^{-12 \cdot 4}} = 546,52$$

El capital totalmente amortizado, C_n , a cabo de los 15 años, será la suma de los valores de la última columna:

$$C_n = a + a(1+0,085) + \dots + a(1+0,085)^{14} + a(1+0,085)^{14} =$$

$$= a(1+0,085 + \dots + 1,085^{14} + 1,085^{14})$$

Pero la expresión entre paréntesis es la suma de quince términos de una progresión geométrica en la que $a_1 = 1$ y la razón $r = 1,085$. Luego:

$$C_n = a \cdot \frac{1,085^{15} - 1}{0,085} \quad C_n = a \cdot 28,232\,269$$

Puesto que esta cantidad ha de ser igual a C_{15} , se tiene:

$$C_{15} = a \cdot 28,232\,269 \Rightarrow 339\,974,29 = a \cdot 28,232\,269$$

$$a = \frac{339974,29}{28,232\,269} = 12\,042,05 \text{ dólares}$$

Y TAMBIÉN:

Liquidación semestral:

$$a = \frac{C \cdot \frac{i}{2}}{1 - \left(1 + \frac{i}{2}\right)^{-2n}}$$

Liquidación trimestral:

$$a = \frac{C \cdot \frac{i}{4}}{1 - \left(1 + \frac{i}{4}\right)^{-4n}}$$

Liquidación mensual:

$$a = \frac{C \cdot \frac{i}{12}}{1 - \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-12n}}$$

Ejemplo 28

Si repetimos el razonamiento del ejemplo anterior para un préstamo C a un tipo de interés i y a un término de n años, la cuota de amortización será:

$$a = \frac{C \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

En caso de que interese amortizar un préstamo a plazos inferiores a un año, habrá que modificar la fórmula como se hizo en el ejemplo del interés compuesto.

Calculémos qué cuota anual debemos pagar si queremos amortizar un préstamo de \$ 30 000 en cinco años y con un interés anual del 13%.

• ¿Y si lo amortizamos mensualmente?

Los datos del préstamo son:

$$C = \$ 30\,000, i = 13\% = 0,13 \text{ (tanto por uno)}, n = 5 \text{ años}$$

Aplicamos la fórmula correspondiente para hallar la cuota anual:

$$a = \frac{C \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{30\,000 \cdot 0,13}{1 - (1+0,13)^{-5}} = 8\,529,44 \text{ dólares}$$

Aplicamos la fórmula correspondiente para hallar la cuota mensual:

$$a = \frac{C \cdot \frac{i}{12}}{1 - \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-12n}} = \frac{30\,000 \cdot \frac{0,13}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0,13}{12}\right)^{-60}} = 682,59 \text{ dólares}$$

31. Una laptop que cuesta \$ 4 870 la pagamos a través de una entidad financiera que cobra el 12% anual. Si queremos pagarla en 24 mensualidades, ¿a cuánto ascenderá el recibo mensual?

32. ¿Qué cuota anual debemos pagar por un préstamo de \$ 20 000 a cuatro años con un interés del 14%? ¿Y si lo queremos amortizar mensualmente?

Actividades complementarias

1) Una computadora laptop que cuesta \$ 1600; la pagamos a través de un banco que cobra el 12 % anual de interés. Si queremos pagarla en 36 mensualidades, ¿a cuánto ascenderá el recibo mensual?

2) ¿Qué cuota anual se debe pagar por un préstamo de \$ 50 000 a 10 años, con un interés del 9 %?

a) ¿Y si queremos amortizarlo mensualmente?

SOLUCIONARIO ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1) costo \$ 1600; $i = 12\%$; $n = 3$; $a = \frac{C \cdot \frac{i}{12}}{1 - \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-12n}} = \frac{1600 \cdot \frac{0,12}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0,12}{12}\right)^{-36}} = 53,14$

2) $C = 50\,000$; $n = 10$; $i = 9\%$; Anual: $a = \frac{C \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{50\,000 \cdot 0,09}{1 - (1+0,09)^{-10}} = \frac{4500}{0,407919722} = 7791$

a) $a = \frac{C \cdot \frac{i}{12}}{1 - \left(1 + \frac{i}{12}\right)^{-12n}} = \frac{50\,000 \cdot \frac{0,09}{12}}{1 - \left(1 + \frac{0,09}{12}\right)^{-12 \cdot 10}} = 633,37$. Aproximadamente.



Ejercicios y problemas

1. Análisis de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas.

1. ¿Cómo identifica una función inyectiva, utilizando los métodos algebraico, numérico y gráfico?

2. Verifica si las siguientes funciones son inyectivas, utilizando el análisis algebraico.

a. $g: x \mapsto g(x) = -4x - \frac{1}{2}$

b. $f: x \mapsto f(x) = x^2 + 7$

c. $h: x \mapsto h(x) = 2\sqrt{x} + 3$

d. $f: x \mapsto f(x) = -x^2 + 2x$

e. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x}{3} + 3$

3. Verifica si las funciones anteriores son inyectivas, utilizando el análisis gráfico y la tabla de valores.

4. Analiza la sobreyectividad de las funciones, definiendo el $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ que se detallan a continuación, utilizando los métodos algebraico, gráfico y de análisis de valores.

a. $f: x \mapsto f(x) = x^2 - 10$

b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x-1}$

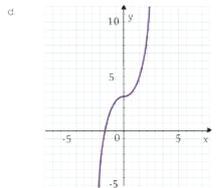
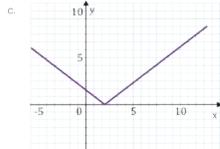
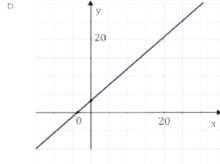
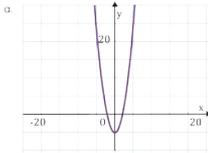
c. $f: x \mapsto f(x) = -x + \frac{3}{4}$

d. $f: x \mapsto f(x) = |x+4|$

e. $f: x \mapsto f(x) = 4 - \sqrt{x+2}$

f. $f: x \mapsto f(x) = \frac{3x}{x-2}$

5. Analiza las siguientes gráficas y determina si son funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Argumenta tu respuesta.



Solucionario

1. Función inyectiva

Método algebraico:

$$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Método numérico:

Se dan valores de x distintos y se obtienen imágenes diferentes.

Método gráfico:

Si se traza una recta horizontal esta debe cortar como máximo a un punto de la gráfica.

2. a) $g(x) = -4x - \frac{1}{2}$

Si $x_1 = 1$; $g(x_1) = -\frac{9}{2}$

Si $x_2 = -1$; $g(x_2) = \frac{7}{2}$

como $x_1 \neq x_2$ y $g(x_1) \neq g(x_2)$

entonces: $g(x)$ es inyectiva.

b) $f(x) = -x^2 + 7$

Si $x_1 = 1$; $f(x_1) = 6$

Si $x_2 = -1$; $f(x_2) = 6$

como $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) = f(x_2)$

entonces: $f(x)$ no es inyectiva.

c) $h(x) = 2\sqrt{x} + 3$

Si $x_1 = 1$; $h(x_1) = 5$

Si $x_2 = 0$; $h(x_2) = 3$

como $x_1 \neq x_2$ y $h(x_1) \neq h(x_2)$

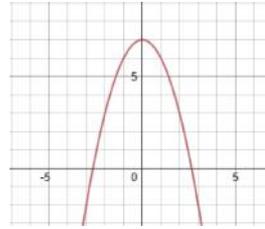
entonces: $h(x)$ es inyectiva.

d) $f(x)$ es inyectiva.

e) $f(x)$ es inyectiva.

3. a) $g(x)$ es inyectiva.

b) $f(x) = -x^2 + 7$



e) Inyectiva. Corta en un solo punto.

4. a) Sobreyectiva

b) No sobreyectiva

c) Sobreyectiva

d) No sobreyectiva

e) No sobreyectiva

f) No sobreyectiva

5. a y c no son biyectivas

b y d son biyectivas

Al trazar una recta horizontal la grafica se corta en dos puntos.

c) $h(x)$ si es inyectiva

d) $f(x)$ es inyectiva

e) $(f+g)(x) = -x^2 - x + x - 2 = -x^2 - 2$; $x \in \mathbb{R}$

f) $(f+g)(x) = \frac{x-3}{x+3} + \frac{2}{x+2} = \frac{x^2+x}{(x+2)(x+3)}$; $x \neq -2 \wedge x \neq -3$

9. a) $(\frac{f}{h})(x) = 4(x-1)(x-2)$; $x \in \mathbb{R}$

$(\frac{h}{f})(x) = \frac{1}{4x-4} = \frac{1}{4(x-1)(x-2)}$; $x \neq 2 \wedge x \neq 1$

b) $(f-g)(x) = 4x - 4 - \sqrt{x+2}$; $x \in \mathbb{R}$; $x \geq -2$

$(f \cdot g)(x) = (4x-4) \cdot (\sqrt{x+2})$; $x \in \mathbb{R}$; $x \geq -2$

c) No son iguales d) No son iguales e) No son iguales

10. a) $\frac{1}{x}$ b) $\frac{-2x-3}{x+2}$ 12. $(f \circ g) = 12x + 1$; $(g \circ f) = 12x + 3$

11. a) $12x^6 - 60x^3 + 73$ 13. a) $(f \circ g) = \frac{4x-3+3}{4} = \frac{4x}{4} = x$

b) $3\sqrt{3}$ c) 361 d) $x\sqrt{3}$ $(g \circ f) = 4\left(\frac{x+3}{4}\right) - 3 = x - 3 = x$

$$(f+g)(x) = \frac{1+x^2-2x-8}{x-4}$$

$$(f+g)(x) = \frac{x^2-2x-7}{x-4}$$

Dominio: $x \in \mathbb{R}$; $x \neq 4$

c) $(f+g)(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}$

Dominio: $x \in \mathbb{R}$; $x \geq 1$

d) $(f+g)(x) = -x + 3 + \frac{5}{x+5}$

$$(f+g)(x) = \frac{-x^2-2x+20}{x+5}$$

Dominio: $x \in \mathbb{R}$; $x \neq -5$

Solucionario

$$13. b) (f \circ g) = \frac{\frac{1}{x-1} + 1}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x}{x-1} = x$$

$$(g \circ f) = \frac{1}{\frac{x}{x+1} - 1} = \frac{1}{\frac{x+1-x}{x+1}} = x$$

$$c) (f \circ g) = \frac{3\left(\frac{x-3}{5}\right) + 5}{\frac{x-3}{5}} = \frac{3x+16}{x-3} = \frac{3x+16}{x-3}$$

$$(g \circ f) = \frac{\left(\frac{3x+5}{5}\right) - 3}{\frac{x}{5}} = \frac{1}{x}$$

$$d) (f \circ g) = \frac{\frac{2x+3}{x+1} + 1}{\frac{2x+3}{x+1} - 2} = 3x + 4$$

$$(g \circ f) = \frac{2\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 3}{\frac{x+1}{x-2} + 1} = \frac{5x-4}{2x-1}$$

$$14. a) P. A. = \{3, 6\}$$

$$b) P. A. = \{5, 3, 1, -1\}$$

$$c) P. A. = \left\{9, \frac{19}{2}, 10, \frac{21}{2}, 11\right\}$$

$$d) P. A. = \left\{4, \frac{13}{3}, \frac{14}{3}, 5, \frac{16}{3}, \frac{17}{3}\right\}$$

$$e) P. A. = \left\{6, \frac{29}{5}, \frac{28}{5}, \frac{27}{5}, \frac{26}{5}, 5, \frac{24}{5}, \frac{23}{5}\right\}$$

$$f) P. A. = \left\{12, \frac{93}{8}, \frac{45}{4}, \frac{87}{8}, \frac{21}{2}, \frac{81}{8}\right\}$$

$$15. a) S_n = \frac{8}{2}[2(9) + (8-1)2] = 128$$

$$128 = \frac{8}{2}(a_1 + a_n); 128 = 4(9 + a_n)$$

$$a_n = 23$$

$$b) 2a_1 + (6-1)(-7) = a_1 + 90$$

$$2a_1 - 35 = a_1 + 90$$

$$a_1 = 125$$

$$c) S_n = 56$$

$$d) a_n = -16$$

$$e) n = 0 \wedge n = 7$$

$$16. \$ 14 888,26$$

$$17. \text{No, } \$ 1926,02$$

$$18. \$ 49 951,75$$

$$19. \$ 38 765,83$$

$$20. \$ 817,36$$

$$21. \text{Durante 13 años.}$$

$$22. a) d = 2,5; n = 6$$

$$b) a_n = -5; n = 8$$

$$c) a = 12; n = 8$$

$$23. a) \text{Quinto término}$$

$$a_5 = (8x - 12) + (5 - 1)(x)$$

$$a_5 = (8x - 12) + 5x + 25 -$$

$$a_5 = 12x + 8$$

$$\text{Sexto término}$$

$$a_6 = (8x - 12) + (6 - 1)(x)$$

$$a_6 = (8x - 12) + 6x + 30 -$$

$$a_6 = 13x + 13$$

$$b) a = 5 \wedge b = -3$$

$$24. a) 20 \text{ artículos}$$

$$b) f: x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x}; g: x \mapsto g(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$c) f: x \mapsto f(x) = \frac{3x+5}{x}; g: x \mapsto g(x) = \frac{x-3}{5}$$

$$d) f: x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x-2}; g: x \mapsto g(x) = \frac{2x+3}{x+1}$$

3 Progresiones

14. **Escribe** los elementos de la progresión aritmética que se describe a continuación.

$$a) S: a_1 = 3, d = 3, n = 2$$

$$b) d = -2; a_1 = 5, n = 4$$

$$c) a_1 = 10, a_n = \frac{21}{2}, n = 5$$

$$d) a_1 = 4, a_n = 5, d = \frac{1}{3}, n = 6$$

$$e) a_1 = 6, a_n = 5, d = -\frac{1}{2}, n = 8$$

$$f) a_1 = 12, a_n = \frac{21}{2}, d = \frac{3}{4}, n = 6$$

15. **Determina** la variable que se indica en la derecha, considerando los elementos de las expresiones término n -ésimo y suma de una progresión aritmética.

$$a) a = 9, n = 8, d = 2; a_n$$

$$b) n = 6, d = -7; a_n = 90; a$$

$$c) a = 2, a_n = 14, n = 7; S_n$$

$$d) S_n = 0, n = 9, a = 16; a_n$$

$$e) a = 9, d = -3, S_n = 0; n$$

16. Hemos suscrito un plan de ahorro a seis años por el cual cada año depositamos \$ 1800 en régimen de capitalización compuesta al 9,25% anual. ¿Qué capital tendremos al cabo de los seis años?

17. Una computadora cuesta \$ 2100. Si un joven ha estado ahorrando \$ 220 cada trimestre durante dos años en una libreta que da el 8% anual, ¿podrá comprarse la computadora al cabo de los dos años?

18. Una persona contrata con una entidad de seguros una prima anual de \$ 800 para un plan de pensiones. Si se jubila dentro de 18 años, ¿qué capital tendrá si la aseguradora lo capitaliza al 12%?

19. ¿Qué importe total deberemos devolver por un préstamo de \$ 30 000 al cabo de tres años y con un interés compuesto del 14% anual si lo amortizamos anualmente?

20. Una compañía de seguros prevé a un asegurado 30 años más de vida. Este ha contratado un seguro de vida de \$ 100 000. ¿Qué cuota anual debe pagar si se capitaliza el 8%?

21. Pedimos un crédito hipotecario de \$ 100 000 al 5,5% de interés compuesto anual. Sabiendo que sólo podemos pagar una mensualidad de \$ 400, ¿durante cuánto tiempo deberemos pagar el crédito?

22. **Hallar** los dos cantidades a_1, a_n, d , o S_n que faltan en cada uno de los problemas.

$$a) a_1 = 13,5, a_n = 26, S_n = 118,5$$

$$b) n = 6, d = -7; a_1 = 90; a$$

$$c) a = 2, a_n = 14, n = 7; S_n$$

$$d) S_n = 0, n = 9, a = 16; a_n$$

23. **Resuelve**.

a) **Determina** el quinto y sexto término de la progresión aritmética: $8x - 12, 9x - 7, 10x - 2$ y $11x + 3$.

b) **Determina** los valores de a y b , siendo: los términos $a = 2b, 3a + 5b, \dots, a + 2b$ elementos consecutivos de una progresión aritmética.

24. **Resuelve** los problemas:

a) Un comisionista cobra por artículo vendido un valor acordado a razón de \$ 0,25 el primer artículo, \$ 0,40 el segundo, \$ 0,55 el tercero, y así sucesivamente. ¿Cuántos artículos logra vender si el total de ventas es de \$ 33,50?

b) María ingresó a un plan de ahorro mensual, cada mes ahorra \$ 20 más que el mes anterior. Si el plan dura un año, y al final sus ahorros suman \$ 1 680. **Determina**
• ¿Cuánto ahorró el primer mes?
• ¿Y el último?

Para finalizar

- Responde V si es Verdadero o F si es falso, según corresponda.
 - Las funciones inversas se verifican mediante el concepto de composición de funciones.
 - Todas las funciones tiene inversa.
 - El quinto término de la progresión: 2, 1, $\frac{1}{2}$, es $\frac{1}{4}$.
 - La función inyectiva se verifica gráficamente por un punto de intersección con la línea vertical.
- ¿Cuál de las siguientes funciones es la inversa de la función $f: x \mapsto f(x) = 3x - 27$?
 - $g: x \mapsto g(x) = \frac{x}{3} + 2$
 - $g: x \mapsto g(x) = \frac{x+2}{3}$
 - $g: x \mapsto g(x) = \frac{x-2}{3}$
 - $g: x \mapsto g(x) = \frac{2-x}{3}$
- Determina si las siguientes funciones son biyectivas; en caso afirmativo, determina la inversa.
 - $h: x \mapsto h(x) = \frac{5x}{3} - 4$
 - $f: x \mapsto f(x) = 3x^2 - 2$
- Subraya la respuesta correcta según corresponda.

* ¿Cuál de las siguientes funciones es la inversa de la función $f: x \mapsto f(x) = x^2 + 4$?

 - $g: x \mapsto g(x) = \sqrt{x-4}$
 - $g: x \mapsto g(x) = \sqrt{x-1}$
 - $g: x \mapsto g(x) = \sqrt{x+1}$
 - $g: x \mapsto g(x) = 1-x^2$
- Con la siguiente función: $f: x \mapsto f(x) = 4x - 5$
 - Determina si es inyectiva algebraicamente.
 - Realiza la representación gráfica.
 - Determina la inversa.
 - Determina $f^{-1}(x)$.
 - Determina $f^{-1} \circ f^{-1}(3)$.
 - Si $g(x) = -x^2 - 1$, Halla $f + g$.
 - Determina el dominio de $f \cdot g$.
- En la progresión: $2x - 5; 3x - 2; 4x + 1; 5x + 4$. Calcula.
 - La diferencia en la progresión.
 - El quinto y sexto término.
 - La suma de los 6 términos.

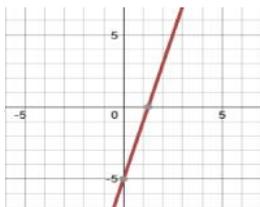
AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y autoevalúate en tu cuaderno:

- Trabajo personal
 - ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
 - ¿He cumplido mis tareas?
 - ¿Qué aprendí en esta unidad?
- Trabajo en equipo
 - ¿He colaborado con mis compañeros y compañeras?
 - ¿He respetado las opiniones de los demás?
- Escribe la opinión de tu familia.
 - Pide a tu profesor sugerencias para mejorar y escribelas.

Solucionario

b) $f(x) = 4x - 5$



c) y d) $f^{-1} = \frac{x+5}{4}$

e) $(f^{-1} \circ f^{-1})(3) = \frac{7}{4}$

f) $(f + g)(x) = -x^2 + 4x - 6$

g) $(f \cdot g)(x) = -4x^3 - 5x^2 - 4x + 5; x \in \mathbb{R}$

6. a) $d = x + 3$ b) 5.º y 6.º términos: $6x + 7; 7x + 10$. c) $27x + 15$

1. a) Verdadero b) Falso
c) Falso d) Verdadero

2. $(f \circ g)(x) = 3\left(\frac{x+2}{3}\right) - 2 = x$

$(g \circ f)(x) = \left(\frac{3x - 2 + 2}{3}\right) = x$

Por lo tanto, es la b.

3. a) Si es biyectiva

$h(x) = \frac{5x}{3} - 4$

$y = \frac{5x}{3} - 4$, despejamos x

$3y = 5x - 12; x = \frac{3y + 12}{5}$

$h^{-1}(x) = \frac{3x + 12}{5}$

- b) No es biyectiva.

- c) No es biyectiva.

- d) Si es biyectiva.

$f(x) = \frac{x + 3}{3}$

$y = \frac{x+3}{3}$, despejamos x

$3y = x + 3; x = 3y - 3$

$f^{-1}(x) = 3x - 3$

- e) Si es biyectiva.

$f(x) = 3x^3 - 5$

$y = 3x^3 - 5$, despejamos x

$3x^3 = y + 5; x = \sqrt[3]{\frac{y + 5}{3}}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{x + 5}{3}}$

4. $f(x) = x^3 + 4$

$y = x^3 + 4$, despejamos x

$x^3 = y - 4; x = \sqrt[3]{y - 4}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 4}$

Por lo tanto, es la opción a.

5. $f(x) = 4x - 5$

a) para $x_1 = 1$ se tiene que $f(1) = -1$

para $x_2 = -1$ se tiene que $f(-1) = -9$

$x_1 \neq x_2; f(x_1) \neq f(x_2)$

entonces, $f(x)$ es inyectiva

AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS

TIPOS DE DEPÓSITOS	
<p><i>Cuenta corriente</i></p> <p>Depósito en efectivo hecho en una entidad financiera y que tiene una disponibilidad inmediata para el titular.</p> <ul style="list-style-type: none"> — La entidad informa al cliente de su estado de cuentas mediante el envío de extractos bancarios. — El cliente puede disponer de sus fondos en cualquier momento, retirar dinero en metálico, firmar cheques, ordenar transferencias a otras cuentas corrientes... — Como consecuencia de esta disponibilidad, las entidades financieras suelen pactar tipos de interés muy bajos, que en la mayoría de los casos no llegan ni al 1% anual. 	<p><i>Cuenta de ahorros a la vista</i></p> <p>Depósito en efectivo hecho en una entidad financiera y que tiene una disponibilidad inmediata para el titular a través de su libreta de ahorros.</p> <ul style="list-style-type: none"> — La entidad financiera entrega al cliente una libreta de ahorros en la que se consignan las operaciones. No se envían extractos bancarios. — Para ingresar o retirar dinero es necesario presentar la libreta en la ventanilla de la entidad financiera y no se pueden utilizar cheques para mover fondos. <p>Las libretas de ahorros suelen tener unos intereses superiores a las cuentas corrientes, ya que la liquidez está más restringida. El tipo de interés varía según la modalidad del ahorro.</p>
<p><i>Cuenta de ahorros a plazo fijo</i></p> <p>Depósito que el cliente se compromete a mantener durante un periodo determinado.</p> <ul style="list-style-type: none"> — Las entidades financieras suelen ofrecer para este tipo de depósitos de menor liquidez un tipo de interés superior al de las cuentas corrientes o las cuentas de ahorros. — El interés es más alto cuanto más largo es el tiempo pactado y los intereses suelen abonarse al finalizar el plazo. — En caso de que se quiera retirar el depósito antes del periodo convenido, la entidad financiera aplica una penalización. 	<p><i>Plan de ahorro</i></p> <p>Depósito constituido por un conjunto de pagos sucesivos y planificados en el tiempo, con el fin de disponer de un capital en un momento determinado.</p> <ul style="list-style-type: none"> — Las entidades financieras ofrecen para estos depósitos elevados tipos de interés además de ventajas fiscales como, por ejemplo, desgravaciones en el pago de los impuestos. — La característica común entre los diversos tipos de planes de ahorro es la flexibilidad de las aportaciones (anual, trimestral, mensual). — La recuperación del capital final puede efectuarse de diversas maneras: en un único pago, como una renta temporal o bien como una renta vitalicia.

Cuentas ahorro vivienda

Existen muchos productos financieros en los cuales las personas que ahorran una parte de sus ingresos pueden obtener una buena rentabilidad y ventajas fiscales. Entre ellos están las **cuentas ahorro vivienda**.

Una de las inversiones más importante que realizamos a lo largo de la vida es la adquisición de nuestra vivienda habitual. La compra de esta vivienda ofrece una serie de descuentos en el pago del Impuesto sobre la Renta de las Personas Físicas (IRPF). Aquellos que tengan previsto comprarse su primera casa o piso en los próximos años pueden empezar a beneficiarse de estas ventajas fiscales antes de realizar la compra. Solamente tienen que acudir a cualquier entidad financiera y comprometerse a destinar el dinero depositado en la cuenta de ahorro a la compra de una vivienda en los próximos cuatro, seis u ocho años, dependiendo de las normas fiscales que rijan en ese territorio. Si en este plazo no se realizara la adquisición, se perderían los derechos y se debería

devolver a Hacienda las desgravaciones realizadas con el pago de los correspondientes intereses.

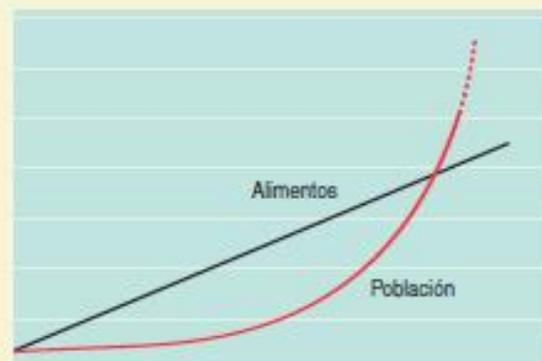


Progresiones y malthusianismo

Thomas R. Malthus (Dorkin 1766-Bath 1834) fue un economista y demógrafo inglés, conocido fundamentalmente por su teoría sobre la evolución de la población, que recibe el nombre de **malthusianismo**.

Según esta teoría, una población aumenta según los términos de una progresión geométrica de crecimiento rápido, mientras que los alimentos lo hacen según los términos de una progresión de crecimiento más lento.

La figura muestra de forma cualitativa las consecuencias de lo anterior. Como ves, a partir de un cierto instante, la población supera a los recursos disponibles. En consecuencia, la propia naturaleza se encargaría de frenar el crecimiento demográfico a causa del hambre y las enfermedades.



Afortunadamente, el progreso de las técnicas de producción de alimentos y el desarrollo de la medicina han podido evitar el desolador panorama que preveía Malthus.

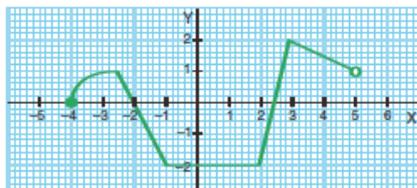
Dada la función $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$, calcula:

- a) Las imágenes de $-4, -1, 2$ y 3 .
 b) La antiimagen o antiimágenes de $\frac{1}{2}, 1, 2$ y 3 .

2. Halla el dominio de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \frac{2}{x+2} + \frac{5}{x-3}$ d) $i(x) = \sqrt{2-x^2}$
 b) $g(x) = \frac{x^2-1}{x^2-6x+5}$ e) $j(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$
 c) $h(x) = \sqrt{x+1}$ f) $k(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$

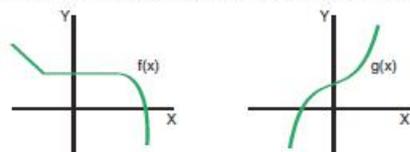
3. En la figura se representa la función f .



- a) Indica su dominio y su recorrido.
 b) Halla la imagen de -1 y 3 .
 c) Halla la antiimagen o antiimágenes de -2 y 0 .

4. (Cambiar la palabra exhaustividad por la palabra sobreyectividad)

Estudia a partir de su gráfica la inyectividad, la exhaustividad y la biyectividad de las funciones f y g .



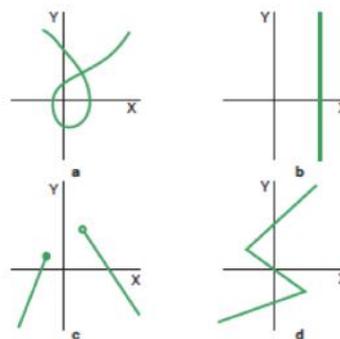
5. Expresa la función $f(x) = (x-1)^2$ como composición de dos funciones.

Página 47 Pág. 62. Adaptación curricular
 ES3 114890 MAT MC GL CAS

RECURSOS PARA LA EVALUACIÓN
 Continuar con la numeración. Cambiar moneda a \$.

6.

Indica cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función. Justifica la respuesta.



7.

Dada la función $f(x) = 2x - 1$, calcula su función inversa f^{-1} y represéntalas sobre un mismo sistema de coordenadas.

8. Página 137. Texto. Matemática I. MHCS.

¿Cuál de las siguientes funciones tiene como imagen -1 ?

- a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = \sqrt{x}$ c) $f(x) = x$

9.

Considera las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 5x$.
 ¿Cuál es la función compuesta $g \circ f$?

- a) $5x^2 + 1$ b) $5x^2 + 5$ c) $25x^2 + 1$

10. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + 2x + 1$ y $g(x) = x^2 - 1$. Determina:

- a) $(f + g)(1)$
 b) $(g - f)(0)$
 c) $(f \cdot g)(x)$
 d) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$
 e) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

SOLUCIONARIO

1. Calcula el término general de las siguientes sucesiones considerando por separado numerador y denominador.

a) $\frac{13}{2}, \frac{20}{4}, \frac{27}{6}, \frac{34}{8}, \frac{41}{10}, \dots$ c) $\frac{1}{2}$
 b) $15, \frac{25}{2}, \frac{35}{3}, \frac{45}{4}, \frac{55}{5}, \dots$ d) $\frac{4}{3}$

2. Escribe el término general de las sucesiones formadas por:
 a) Los múltiplos de 5. d) Los cuadrados.
 b) Los números pares. e) Los números naturales.
 c) Los números naturales. f) Los cubos.

3. Las sucesiones pueden representarse en un sistema de coordenadas cartesianas. Para ello asignamos a cada término t_n del plano cuya abscisa es igual al lugar que ocupa el término en la sucesión y cuya ordenada es el valor de este.

Observa la imagen de la derecha, que corresponde a la representación gráfica de una sucesión.

- a) Escribe los cuatro primeros términos.
 b) ¿Se trata de una progresión aritmética? En caso afirmativo calcula su diferencia.
 c) ¿Se trata de una progresión geométrica? En caso afirmativo calcula su razón.
 d) Escribe la expresión del término general de la sucesión.
 e) ¿Podrías decir qué le ocurre al valor de un término cuando el lugar es muy avanzado?

4. Observa las siguientes construcciones con monedas. Calcula el número de monedas utilizadas en cada construcción y el número de monedas que faltan para completar cada triángulo.



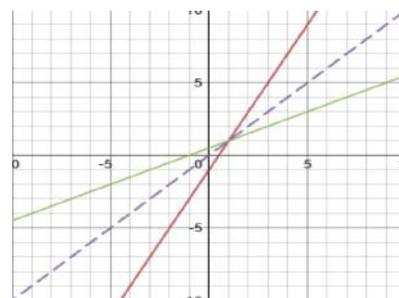
5. a) ¿Qué condiciones debe cumplir la razón de una progresión geométrica?
 b) ¿Qué condiciones debe cumplir la diferencia de una progresión aritmética?
 6. Un joven ahorra cada mes 2 € más que el mes anterior. Determina:
 a) La cantidad que ahorró el primer mes.
 b) La cantidad que ahorró el último mes.
 7. El número de bacterias de un cultivo aumenta un 25 % cada hora. ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de cuatro horas?

5. $g(x) = x^2$; $h(x) = x - 1$; $(g \circ h)(x)$

6. Gráfica a, b y d no son funciones porque al trazar una recta vertical, esta corta al menos en dos puntos a la gráfica.

Gráfica c sí es función porque al trazar una recta vertical, esta solo corta como máximo en un punto a la gráfica.

7. $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$



8. La opción c. 9. La opción b.

$$f(3) = \frac{1}{5}$$

$$b) f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}, f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$$

$$f^{-1}(2) = \{0\}, f^{-1}(3) = \emptyset$$

2. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$
 b) $D(g) = \mathbb{R} - \{1, 5\}$
 c) $D(h) = [-1, +\infty)$
 d) $D(i) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$
 e) $D(j) = (0, +\infty)$
 f) $D(k) = (0, +\infty)$

3. a) $D(f) = [-4, 5]; R(f) = [-2, 2]$
 b) $f(-1) = -2; f(3) = 2$
 c) $f^{-1}(-2) = [-1, 2], f^{-1}(0) = \left\{-1, -2, \frac{5}{2}\right\}$

4. a) f no es inyectiva. Para diferentes valores de x , existe al menos dos valores iguales de y .
 f es sobreyectiva. El dominio y rango de f son iguales, es decir, los \mathbb{R} .
 f no es biyectiva.

b) g es inyectiva. Para diferentes valores de x , existen distintos valores de y .
 g es sobreyectiva. El dominio y rango de f son iguales, es decir los \mathbb{R} .
 g es biyectiva.

11.

a) $a_n = \frac{7n+6}{2n}$ c) $a_n = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}}$

12.

b) $a_n = \frac{10n+5}{n}$ d) $a_n = \frac{n+3}{n+2}$

13.a)

a) $a_n = 5n$ d) $a_n = 2n - 1$

b)

b) $a_n = 2n$ e) $a_n = n^2$

c)

c) $a_n = n$ f) $a_n = n^3$

$a_1 = 1; a_2 = 0,5; a_3 = 0,25; a_4 = 0,125$

No se trata de una progresión aritmética porque:

$a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$

GL

Se trata de una progresión geométrica porque:

$r = \frac{0,5}{1} = \frac{0,25}{0,5} = \frac{0,125}{0,25} = 0,5$

d) $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$

e) Tiende a 0 porque, si n , es un valor muy grande, 2^n tiende a infinito y el cociente $\frac{1}{2^{n-1}}$ tiende a 0.

$a_n = \frac{n^2 + n}{2}$, donde n es el número de monedas

14. que hay en la base de cada triángulo.

15. a) Debe ser un número real mayor que 1 ($r >$

b) Debe ser un número real mayor que 0 ($d > 0$).

16.

$S = 80; a_1 =$

5. Primer mes ahorro \$5, último mes \$75

17. Durante 4.ª hora: 390 625 ; al cabo de 4.ª hora: 1

SOLUCIONARIO

1. Escribe los dos siguientes términos de estas sucesiones:

a) 3, 5, 9, 11, 15, 17, 21, ... c) 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7...

b) 10, 7, 4, 1, -2, -5... d) $\frac{3}{4}, \frac{4}{6}, \frac{5}{8}, \frac{6}{10}, \dots$
2. Dada la sucesión 1, 5, 9, 13, 17..., di qué valores corresponden a a_8 y a a_{10} .
3. Indica en cada caso si la sucesión es creciente (C), decreciente (D) o ninguna de las dos (N):

a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$ c) 1, 2, 4, 8, 16, 32...

b) -4, 5, -3, 6, -2, 7, 0, 8... d) 20, 13, 6, -1, -8...
4. Escribe los cuatro primeros valores de cada sucesión:

a) $a_n = n^2 + 2$ c) $a_n = -2n^3$

b) $a_n = \frac{n-3}{n}$ d) $a_n = n^2 + n - 1$
5. Averigua el criterio por el que se forman las siguientes sucesiones:

a) 2, 8, 14, 20, 26, 32... c) 16, 8, 4, 2, 1...

b) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{32}, \dots$ d) 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7...

PROGRESIONES ARITMÉTICAS

1. Identifica qué sucesiones son progresiones aritméticas; en cada caso, señala su diferencia y añade dos términos más:

a) 9, 13, 17, 21, 25... c) 3, 6, 12, 24, 48, 96... e) 4, $\frac{7}{2}$, 3, $\frac{5}{2}$, 2, $\frac{3}{2}, \dots$

b) 2, 4, 7, 10, 14, 20... d) -20, -18, -16, -14, -12... f) 200, 100, 50, 25...
2. Halla el término general de una progresión aritmética cuyo primer término es 4 y su diferencia -3. Calcula también a_7 y a_{10} .
3. Halla la suma de los 50 primeros números naturales.
4. En la progresión -1, 4, 9, 14, 19..., halla el término a_{11} y la suma de los 15 primeros términos.
5. Durante varios años se han introducido, en un parque natural, varios ejemplares de leopardo. Observa en la siguiente tabla el registro anual de leopardos introducidos.

Año	1	2	3	4	5
Leopardos	2	5	8	11	14

Comprueba que la sucesión 2, 5, 8, 11, 14... es una progresión aritmética e indica su diferencia. Calcula el total de ejemplares reintroducidos al cabo de 10 años.

6. Las edades de tres hermanas están en progresión aritmética y suman 27. Sabiendo que la edad de la mayor es el doble de la edad de la menor, calcula las tres edades.

PROGRESIONES GEOMÉTRICAS

1. Identifica qué sucesiones son progresiones geométricas; en cada caso, señala su razón y añade dos términos más:
- a) 1, 3, 9, 27, 81... c) 400, 100, 25, $\frac{25}{4}$, $\frac{25}{16}$... e) 3, 6, 12, 18, 24...
- b) 6, -6, 7, -7, 8, -8... d) $\sqrt{16}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{4}$... f) $-\frac{1}{5}$, -1, -5, -25, -125...

2. Halla el término general de una progresión geométrica cuyo primer término es 6 y el segundo es 9. Calcula también a_5 y a_{10} .
3. El segundo término de una progresión geométrica es 32 y el cuarto es 8. Halla el término general.
4. En la progresión -3, 6, -12, 24, -48, 96..., halla el término a_{10} y la suma de los 12 primeros términos.
5. La administración de un parque natural tiene asignado un presupuesto anual para la repoblación forestal que evoluciona como muestra la siguiente tabla:

Año	1	2	3	4	5
Presupuesto (€)	375	750	1500	3000	6000

Calcula el término general de la progresión y el presupuesto total destinado al cabo de 8 años.

6. Un herrero vendió un caballo, con sus 4 herraduras de 6 clavos cada una a un capitán del ejército. El herrero le pidió al capitán que pagara por el caballo según el número de clavos, tal y como se indica a continuación: por el primer clavo, 1 moneda; por el segundo, 2 monedas; por el tercero, 4 monedas, y así sucesivamente hasta el último clavo. El capitán, creyendo que hacía un buen negocio, aceptó.
- ¿Cuánto tuvo que pagar el capitán por el caballo?
- ¿Cuánto le costó al capitán cada uno de los clavos? ¿Y cada herradura?

Sucesiones

- 1.** a) 23, 25... c) -8, 9...
 b) -8, -11... d) $\frac{7}{12}, \frac{8}{14}, \dots$
- 2.** $a_n = 29; a_{10} = 37$
- 3.** a) Creciente c) Creciente
 b) Ninguna d) Decreciente
- 4.** a) 3, 6, 11, 18 c) -2, -16, -54, -128
 b) -2, $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}$ d) 1, 5, 11, 19
- 5.** a) Sumar 6.
 b) Multiplicar por $\frac{3}{2}$.
 c) Dividir entre 2.
 d) Alternar sucesiva y ordenadamente, números impares positivos y números pares negativos.

Progresiones aritméticas

- 1.** a) Progresión aritmética de $d = 4$.
 Sigüentes términos: 29, 33...
 b) No es una progresión aritmética.
 c) No es una progresión aritmética.
 d) Progresión aritmética de $d = 2$.
 Sigüentes términos: -10, -8...
 e) Progresión aritmética de $d = \frac{-1}{2}$.
 Sigüentes términos: $1, \frac{1}{2}, \dots$
 f) No es una progresión aritmética.
- 2.** $a_n = 4 + (-3) \cdot (n - 1) = 7 - 3n$
 $a_7 = 7 - 3 \cdot 7 = -14$
 $a_{10} = 7 - 3 \cdot 10 = -23$
- 3.** $S = \frac{1+50}{2} \cdot 50 = 1275$
- 4.** Progresión aritmética donde: $d = 5$.
 $a_{11} = -1 + 10 \cdot 5 = 49$
 $a_{15} = -1 + 14 \cdot 5 = 69$
 $S = \frac{-1+69}{2} \cdot 15 = 510$
- 5.** Es una progresión aritmética porque:
 $5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = \dots = 3$
 La diferencia d es 3.

$$a_{10} = 2 + 9 \cdot 3 = 29$$

$$S = \frac{2 + 29}{2} \cdot 10 = 155$$

Al cabo de 10 años se han reintroducido 155 leopardos.

6. $27 = \frac{x + 2x}{2} \cdot 3 \rightarrow 9x = 54 \rightarrow x = 6$

La primera hermana tiene 6 años; la tercera, el doble (12 años), y la segunda tiene 9 años. (27 - 6 - 12 = 9).

Los números 6, 9 y 12 forman una progresión aritmética.

Progresiones geométricas

1. a) Progresión geométrica de $r = 3$.

Siguientes términos: 243, 729...

b) No es una progresión geométrica.

c) Progresión geométrica de $r = \frac{1}{4}$.

Siguientes términos: $\frac{25}{64}, \frac{25}{256}, \dots$

d) No es una progresión geométrica.

e) No es una progresión geométrica.

f) Progresión geométrica de $r = 5$.

Siguientes términos: -625, -3125...

2. $r = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$$a_5 = 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{243}{8}$$

$$a_8 = 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7 = \frac{6561}{64}$$

3. $a_2 = a_1 \cdot r = 32, \dots, a_4 = a_1 \cdot r^3 = 8$

$$\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_1 \cdot r^3}{a_1 \cdot r} \rightarrow r^2 = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = 64$$

$$a_n = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{128}{2^n}$$

4. $r = \frac{6}{-3} = -2$

$$a_{10} = -3 \cdot (-2)^9 = 1536$$

$$a_{12} = -3 \cdot (-2)^{11} = 6144$$

$$S = \frac{6144 \cdot (-2) - 3}{-2 - 1} = 4097$$

5. $r = 750 : 375 = 2$

La razón r de la progresión es 2.

$$a_n = 375 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_8 = 375 \cdot 2^7 = 48000$$

$$S = \frac{48000 \cdot 2 - 375}{2 - 1} = 95625$$

Al cabo de 8 años se habrán destinado 95625 € de presupuesto.

6. $a_{24} = a_1 \cdot r^{23} = 2^{23} = 4194304$

$$S = \frac{a_{24} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{4194304 \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 8388607$$

Tuvo que pagar 8388607 monedas.

Cada clavo le costó 349525,29 monedas y cada herradura, 2097151,75 monedas.

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

- Aseguramiento del nivel de partida mediante una lluvia de ideas sobre funciones, tipos y gráficas.

Manipulación de material con fotos y representación de distintos tipos de funciones y sus gráficas.

Resolución de problemas de aplicación de funciones en el ámbito financiero y comercial.

Reflexión

¿Qué podemos decir sobre las funciones y sus aportes en la economía?

Identificación de funciones y su aplicación en las finanzas y economía.

Reflexión y análisis sobre dichas aplicaciones.

Conceptualización

- Uso de diagramas que resuman los principales conceptos, propiedades, procedimientos, gráficas y análisis de diferentes funciones.
- Uso de *softwares* que facilitan la representación gráfica y posterior interpretación de información.

Aplicación

¿Por qué es importante conocer, graficar, analizar e interpretar gráficas de funciones?

- Planteamiento y resolución de problemas que apliquen funciones en el ámbito financiero y comercial.

BANCO DE PREGUNTAS

46. Escribe los diez primeros términos de las siguientes sucesiones cuyos términos generales son:

$$a_n = \frac{2n+3}{n+1} \quad c) \quad c_n = \frac{1}{n^2}$$

$$b_n = n^2 - 2n \quad d) \quad d_n = \frac{n^2-1}{n}$$

47. De las siguientes sucesiones di cuáles son progresiones geométricas.

a) 2, -6, 18, -54, ... c) 2, -2, 2, -2, 2, ...

b) 1, 3, 2, 4, 3, 5, ... d) $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{48}, \dots$

— Halla la expresión del término general y el valor del término a_{10} de las que sean progresión geométrica.

Sol.: a) $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}, a_{10} = 39366;$
 c) $a_n = 2 \cdot (-1)^{n-1}, a_{10} = -2;$
 d) $a_n = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, a_{10} = \frac{1}{3072}$

48. Halla el producto de los diez primeros términos de una progresión geométrica en cada uno de los siguientes casos:

a) $a_1 = 243$ y $r = \frac{1}{3}$

b) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

c) $a_1 = \frac{1}{4}$ y $r = 4$

Sol.: a) $P_{10} = 243;$ b) $P_{10} = 2 \cdot 4^5;$ c) $P_{10} = 4^{35}$

49. Halla la suma de los ocho primeros términos de una progresión geométrica cuya razón es $r = 2$ y cuyo primer término es $a_1 = 3$.

Sol.: $S_8 = 765$

50. Halla la suma ilimitada de una progresión geométrica sabiendo que $a_1 = 5$ y $r = \frac{1}{4}$.

Sol.: $\frac{20}{3}$

51. Un número decimal periódico puede expresarse como la suma de los términos de una progresión geométrica ilimitada decreciente. Esto permite utilizar la fórmula de la suma ilimitada para hallar su fracción generatriz.

Utiliza $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$ para hallar la fracción generatriz de $0,\overline{12}$, teniendo en cuenta que:
 $0,\overline{12} = 0,12 + 0,0012 + 0,000012 + \dots$

Sol.: $\frac{4}{33}$

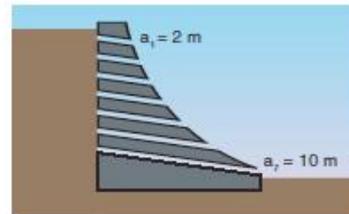
52. Halla el primer término de una progresión geométrica sabiendo que su razón es $r = \frac{1}{4}$ y su suma ilimitada es 8.

Sol.: $a_1 = 6$

53. Dados los números 24 y 648, interpola dos términos geométricos.

Sol.: $r = 3$

54. La figura representa la sección de un muro de contención atravesado por canales de desagüe.



Sabiendo que el primer canal mide 2 m y el último 10 m y que sus longitudes están en progresión geométrica, ¿cuánto miden los restantes?

Sol.: 2,62; 3,42; 4,47; 5,85; 7,65

55. Las edades de tres hermanos están en progresión geométrica y suman 21. Sabiendo que la edad del menor es 3, calcula la edad de los otros dos.

Sol.: 3, 6, 12

56. Un comerciante comienza la temporada de rebajas descontando un 3% en el precio de los artículos y cada semana que pasa descuenta un 3% del precio de la semana anterior. Si la temporada de rebajas dura ocho semanas, ¿cuál será el precio, al final de las rebajas, de un artículo que sin rebajar costaba 42,07 €?

— ¿Cuál sería el precio si se descontara directamente el 24%?

Sol.: 32,97 €, 31,97 €

57. De una cantera se han extraído este año 800 m³ de roca. Si cada año se extrae un 15% más que el anterior, ¿cuántos m³ de roca se habrán extraído al cabo de seis años?

Sol.: 7002,99 m³

58. El primer día de perforación de un túnel se avanzan 3 m. Sabiendo que el túnel medirá 6 km y que cada día se avanzará un 5% más que el anterior, ¿cuánto tiempo tardaremos en finalizar la perforación del túnel?

Sol.: 95 días

RECURSOS PROPIOS DEL ÁREA

La regla de Hondt

Después de unas elecciones al parlamento (autonómico, estatal o europeo) hay que asignar a cada partido político los escaños que le corresponden. Esta asignación no se realiza de manera estrictamente proporcional al número de votos obtenido, sino aplicando la llamada ley o **regla de Hondt**.

Para la aplicación de este método se procede de la siguiente manera. En primer lugar, se ordenan las distintas candidaturas según el resultado de mayor a menor número de votos obtenidos. En cada una de ellas se divide este número de votos por 1, 2, 3... y así sucesivamente hasta el número de escaños que le corresponde a esa circunscripción, y se van atribuyendo los escaños a aquellas candidaturas que vayan obteniendo los cocientes mayores, siguiendo un orden decreciente. Si en algún momento los cocientes correspondientes a distintas candidaturas coinciden, el escaño se asigna a aquella que tenga un número de votos totales mayor. Si éste también coincidiera, el primer empate se resolvería por sorteo, y los sucesivos de forma alternativa.

En algunos parlamentos a esta regla se le añade una modificación, que consiste en que un partido, para poder tener representación parlamentaria, ha de conseguir un determinado porcentaje de los votos totales. En España este porcentaje está en el 3 % en el caso de las elecciones generales. En las elecciones municipales y algunas autonómicas, este porcentaje se sitúa en el 5 %, por debajo del cual, en ningún caso el partido puede tener representación.



Naturaleza y números



Desde Arquímedes hasta la actualidad, numerosos científicos han investigado modelos numéricos que permitieran comprender la naturaleza.

Leonardo de Pisa (1180-1250), conocido como Fibonacci, estudió cierto tipo de problemas que daban lugar a una sucesión de números en que cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21...

Sorprendentemente, esta sucesión, que recibe su nombre, es un modelo numérico que permite describir fenómenos naturales que nada tienen que ver con los problemas que preocupaban al matemático italiano.

A modo de ejemplo, la disposición en una doble espiral (a derecha y a izquierda) de las semillas de un girasol o la pauta de crecimiento del *Nautilus Pompilius* pueden describirse mediante términos sucesivos de una sucesión de Fibonacci.



UNIDAD 2



Ejes temáticos

Contenidos

Funciones trigonométricas

Funciones trigonométricas

- Gráfica de la curva trigonométrica seno.....páginas 60-61
- Gráfica de la curva trigonométrica coseno.....páginas 62-63
- Gráfica de la curva trigonométrica tangente.....páginas 64
- Gráfica de la curva trigonométrica cosecantepáginas 65
- Gráfica de la curva trigonométrica secante.....página 66
- Gráfica de la curva trigonométrica cotangente.....página 67
- Relación gráfica de las funciones seno y cosecante.....página 68
- Comparación de las características de las funciones seno y cosecantepágina 68
- Relación gráfica de las funciones seno y secante.....página 69
- Comparación de las características de las funciones seno y secante.....página 69
- Relación gráfica de las funciones tangente y cotangente.....página 70
- Comparación de las características de las funciones tangente y cotangente...página 70

Uso de las TIC para graficar funciones

- Transformaciones e interpretación de funciones.....páginas 74-79
- Resumen funciones trigonométricas..... página 80
- Problemas resueltos.....página 81
- Ejercicios y problemas.....páginas 82-85
- Para finalizar.....página 86
- Zona WiFi.....página 87

LOGO INSTITUCIONAL		NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN			AÑO LECTIVO	
PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA						
1. DATOS INFORMATIVOS:						
Docente:	Nombre del docente que ingresa la información	Área/asignatura:	MATEMÁTICA	Grado/Curso:	2° BACHILLERATO	Paralelo:
N.º de unidad de planificación:	2	Título de unidad de planificación:	FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	Objetivos específicos de la unidad de planificación:	<p>Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.</p> <p>Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.</p>	
PERÍODOS	24			SEMANA DE INICIO:		
2. PLANIFICACIÓN						
DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:			CRITERIOS DE EVALUACIÓN			
<ul style="list-style-type: none"> Definir las funciones seno, coseno y tangente a partir de las relaciones trigonométricas en el círculo trigonométrico (unidad) e identificar sus respectivas gráficas a partir del análisis de sus características particulares. Reconocer y graficar funciones periódicas determinando el período y amplitud de las mismas, su dominio recorrido, monotonía, paridad. Reconocer las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente), sus propiedades y las relaciones existentes entre estas funciones y representadas de manera gráfica con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets). Reconocer y resolver (con apoyo de las TIC) aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones trigonométricas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos. 			<p>CE.M.5.3. Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.</p>			

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
<p>Debatir la necesidad que existe en las ciencias de las telecomunicaciones de modelar matemáticamente las ondas electromagnéticas (Las ondas de radio, de televisión, el Wi-Fi, son ondas electromagnéticas).</p> <p>Comparar las similitudes entre la gráfica de una función seno, con un gráfico de una onda electromagnética.</p> <p>Usar un sistema de referencia adecuado e interpretar las características de la función seno y coseno.</p> <p>Reflexionar acerca de la importancia de estos conocimientos en la tecnología actual.</p> <p>Identificar las características y transformaciones de los gráficos de las funciones trigonométricas básicas.</p> <p>Usar los modelos matemáticos comprendidos en las características físicas de las ondas.</p> <p>Reconocer e interpretar las características de las funciones trigonométricas.</p> <p>Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.</p>	<p>- Texto</p> <p>- Cuaderno</p> <p>- Videos (sitios web)</p> <p>- Pizarra</p> <p>- Calculadora</p>	<p>M.5.3.1. Grafica funciones reales y analiza su dominio, recorrido, monotonia, ceros, extremos, paridad; identifica las funciones afines, potencia, raíz cuadrada, valor absoluto; reconoce si una función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva; realiza operaciones con funciones aplicando las propiedades de los números reales en problemas reales e hipotéticos. (I.4).</p> <p>M.5.3.2. Representa gráficamente funciones cuadráticas; halla las intersecciones con los ejes, el dominio, rango, vértice y monotonia; emplea sistemas de ecuaciones para calcular la intersección entre una recta y una parábola o dos parábolas; emplea modelos cuadráticos para resolver problemas, de manera intuitiva halla un límite y la derivada; optimiza procesos empleando las TIC. (I.3, 14)</p> <p>M.5.3.3. Reconoce funciones polinómicas de grado n, opera con funciones polinómicas de grado -4 y racionales de grado -3; plantea modelos matemáticos para resolver problemas aplicados a la informática; emplea el teorema de Horner y el teorema del residuo para factorizar polinomios; con la ayuda de las TIC, escribe las ecuaciones de las asíntotas, y discute la validez de sus resultados. (I.3, I.4)</p> <p>M.5.3.4. Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonia, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos naturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados. (I.3, I.2)</p> <p>M.5.3.5. Obtiene la gráfica de una función exponencial a partir de a^x, mediante traslaciones, homotecias y reflexiones; concibe la función logarítmica como inversa de la función exponencial; aplica propiedades de los logaritmos y halla su dominio, recorrido, asíntotas, intersecciones con los ejes; las aplica en situaciones reales e hipotéticas, con y sin apoyo de la tecnología. (I.3)</p>	<p>Comprobar el desarrollo de las habilidades necesarias para reconocer, interpretar, graficar, analizar las características y operar con funciones de variable real (lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica, polinómicas y racionales). Que el estudiante analice el dominio, el recorrido, la monotonia, los ceros, máximos y mínimos, paridad y composición de las diferentes funciones. También se incluyen las propiedades de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. Apoyándose con las TIC, debe poder graficar, interpretar y encontrar las intersecciones con los ejes; y la intersección de las gráficas de funciones; además de hallar la solución de ecuaciones de manera gráfica; interpretar geométricamente la derivada de una función cuadrática y sus aplicaciones; y comprender la noción de límite y su aplicación, así como la modelización de situaciones reales a través de las funciones.</p>

ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA

J.3. Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.

I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.

I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos.

I.4. Actuamos de manera organizada, con autonomía e independencia; aplicamos el razonamiento lógico, crítico y complejo; y practicamos la humildad intelectual en un aprendizaje a lo largo de la vida.

ELABORADO	REVISADO	APROBADO
Docente:	Vicerrector:	
Firma:	Firma:	
Fecha:	Fecha:	

Objetivos generales del área que se evalúan

- Emplear progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas en el planteamiento y resolución de problemas de diferentes ámbitos
- Reconocer las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente), sus propiedades y las relaciones existentes entre estas funciones y representarlas de manera gráfica con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets).

Objetivos del área por subnivel

- Reconocer y graficar funciones periódicas determinando el período y amplitud de las mismas, su dominio y recorrido, monotonía, paridad.
- Reconocer y resolver (con apoyo de las TIC) aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones trigonométricas, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas, y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.
- O.M.5.2. Producir, comunicar y generalizar información, de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica, mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos, para así comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país, y tomar decisiones con responsabilidad social.

Objetivo integrador del área por subnivel

- OI.5.2. Aplicar conocimientos de diferentes disciplinas para la toma de decisiones asertivas.
- OI.5.11. Reflexionar y tomar decisiones respecto a una sexualidad responsable y a su participación sistemática en prácticas corporales y estéticas, considerando su repercusión en una vida saludable y la influencia de las modas en la construcción de los hábitos y de las etiquetas sociales en la concepción de la imagen corporal.

Criterios de evaluación

- Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.
- Reconoce patrones presentes en sucesiones numéricas reales, monótonas y definidas por recurrencia; identifica las progresiones aritméticas y geométricas; y, mediante sus propiedades y fórmulas, resuelve problemas reales de matemática financiera e hipotética, y el tráfico de personas esclavizadas liderado por las grandes potencias.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.
- Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles

Indicadores para la evaluación del criterio

- Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonía, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos naturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados

AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS

Comunicación Matemática

La comunicación es una parte esencial de las matemáticas y de la educación matemática. Escuchar las explicaciones de los demás les da oportunidades de desarrollar su comprensión. Los alumnos que se involucran en discusiones para justificar soluciones, especialmente cuando hay desacuerdo, llegan a una mejor comprensión matemática.

Rutinas de comunicación Matemática

El maestro debe capacitar al estudiante en organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación.

El estudiante comunica su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros y profesores.

El docente analiza y evalúa el pensamiento matemático de los alumnos.

El profesor y los alumnos usan un lenguaje matemático con precisión para expresar ideas matemáticas.

Rutinas de comunicación

Organizar y consolidar su pensamiento matemático a través de la comunicación

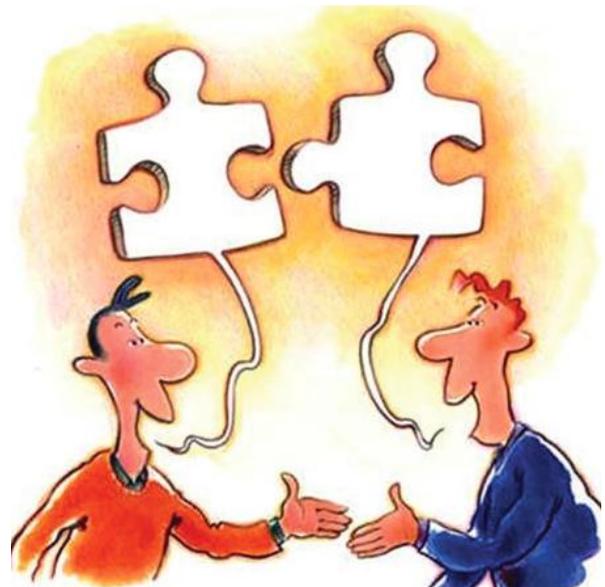
Los estudiantes ganan perspicacia en su pensamiento cuando presentan sus métodos para resolver problemas, justifican su razonamiento a un compañero o al profesor o cuando hacen preguntas sobre algo que es extraño para ellos.

La comunicación puede apoyar el aprendizaje de conceptos matemáticos nuevos, cuando escenifican una situación, dibujan utilizan objetos, dan justificaciones o explicaciones verbalmente, utilizan diagramas, escriben y usan símbolos.

La reflexión y la comunicación son procesos entrelazados en el aprendizaje de las matemáticas.



<http://goo.gl/GLYJvA>



<http://goo.gl/aoVfno>



<http://goo.gl/xUJfBu>

Orientación didáctica

- En esta unidad hablaremos de las medidas de ángulos y la transformación del sistema sexagesimal a radianes y viceversa, mediante su equivalencia.
- Pasaremos de la forma compleja a la incompleja manualmente mediante el uso de la calculadora.
- Graficará las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico y en el plano cartesiano con la ayuda de una tabla de valores, mediante este último gráfico visualizará claramente las características de cada función, a la vez le permitirá comparar las funciones entre ellas.
- A partir de las funciones básicas analizará las transformaciones e interpretaciones de cada función.
- Utilizará correctamente las TIC'S, para graficar e interpretar funciones trigonométricas en la transformación de su forma básica. Calculadora gráfica DESMOS o el programa GeoGebra

2 Funciones Trigonómicas

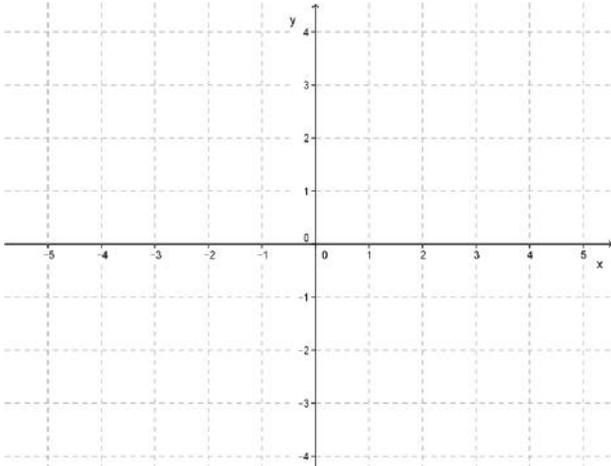
CONTENIDOS:

<ol style="list-style-type: none"> 1. Medida de ángulo forma compleja e incompleja <ol style="list-style-type: none"> 1.1. Medidas en el Sistema Internacional 1.2. Equivalencia entre grados y radianes 2. Las funciones trigonométricas <ol style="list-style-type: none"> 2.1. Gráfica de la curva trigonométrica seno 2.2. Gráfica de la curva trigonométrica coseno 2.3. Gráfica de la curva trigonométrica tangente 2.4. Gráfica de la curva trigonométrica cosecante 2.5. Gráfica de la curva trigonométrica secante 2.6. Gráfica de la curva trigonométrica 	<ol style="list-style-type: none"> cotangente 2.7. Relación gráfica de las funciones seno y cosecante 2.8. Comparación de las características de las funciones seno y cosecante 2.9. Comparación gráfica de las funciones coseno y secante 2.10. Comparación de las características de las funciones coseno y secante 2.11. Comparación gráfica de las funciones tangente y cotangente 2.12. Comparación de las características de las funciones tangente y cotangente 3. Uso de las TIC para graficar funciones (Calculadora Gráfica Desmos) <ol style="list-style-type: none"> 3.1. Transformaciones e interpretación de funciones
---	--

56

1. Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos.

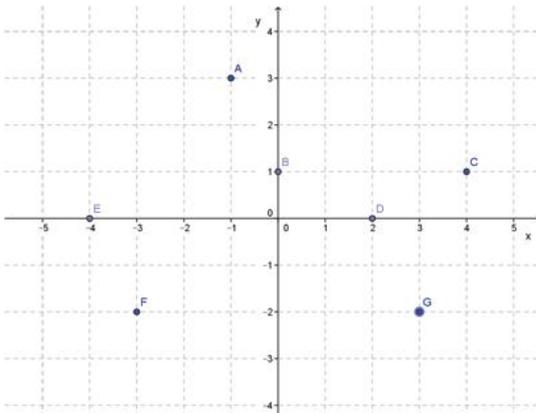
A (2, 3) ; B (-2, 4) ; C (-3, -3) ; D (4, -2)



2. En el siguiente cuadro escribe el nombre del cuadrante en el que se ubicó cada punto del ejercicio anterior.

PUNTO	(2, 3)	(-2, 4)	(-3, -3)	(4, -2)
CUADRANTE				

3. Escribe los puntos representados en el plano cartesiano.



PUNTO	Par Ordenado
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	

4. Completa el siguiente cuadro los valores de las funciones trigonométricas sin el uso de la calculadora.

	SEN	COS	TAN
30°			
60°			
45°			

5. Completa correctamente con las funciones trigonométricas inversas.

Sen θ _____

Cos θ _____

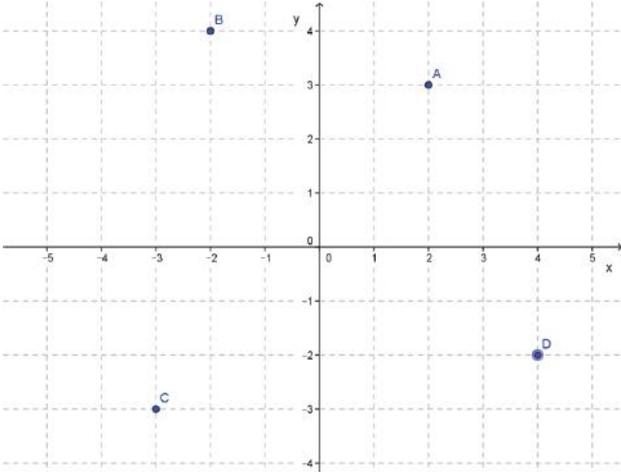
_____ Ctg θ

6. En una circunferencia tenemos 360° su equivalencia en radianes es

SOLUCIONARIO

1. Ubica en el plano cartesiano los siguientes puntos.

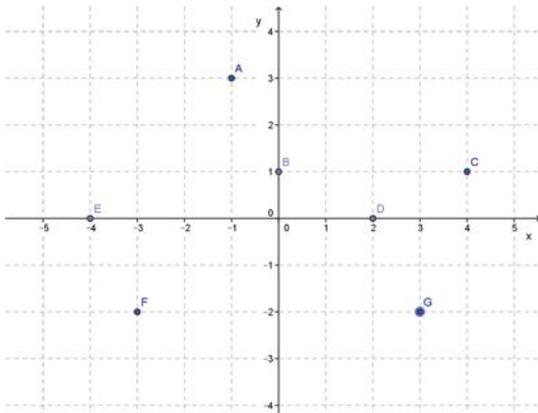
A (2, 3) ; B (-2, 4) ; C (-3, -3) ; D (4, -2)



2. En el siguiente cuadro escribe el nombre del cuadrante en el que se ubicó cada punto del ejercicio anterior.

PUNTO	(2, 3)	(-2, 4)	(-3, -3)	(4, -2)
CUADRANTE	primero	Segundo	Tercero	Cuarto

3. Escribe los puntos representados en el plano cartesiano.



PUNTO	Par Ordenado
A	(-1, 3)
B	(0, 1)
C	(4, 1)
D	(2, 0)
E	(-4, 0)
F	(-3, -2)
G	(3, -2)

4. Completa el siguiente cuadro los valores de las funciones trigonométricas sin el uso de la calculadora.

	SEN	COS	TAN
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

5. Completa correctamente con las funciones trigonométricas inversas.

Sen θ → Csc θ

Cos θ → Sec θ

Tan θ → Ctg θ

6. En una circunferencia tenemos 360° su equivalencia en radianes es

$2\pi \text{ rad}$

Solucionario

Actividad 1

- a. $\alpha = 138\ 312''$
- b. $\beta = 18\ 743''$

Actividad 3

- a. $\alpha = 0,318\ 1\ \pi\ \text{rad}$
- b. $\alpha = 0,254\ 7\ \pi\ \text{rad}$
- c. $\alpha = 0,364\ 3\ \pi\ \text{rad}$
- d. $\alpha = 0,087\ \pi\ \text{rad}$

1.1. Medidas en el Sistema Internacional

Como hemos dicho, la unidad de medida de ángulos en el SI es el radián (rad). Para definirlo, procedemos del siguiente modo:

- Trazamos una circunferencia de radio arbitrario y marcamos un radio OA.
- A partir del punto A tomamos un arco AB de longitud igual a la del radio.
- El ángulo central AOB que abarca el arco AB mide un radián.

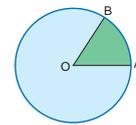


Fig. 2.

Un **radián** es la medida del ángulo central de una circunferencia que abarca un arco de longitud igual a la del radio.

1.2. Equivalencia entre grados y radianes

Como la longitud de la circunferencia es $2\pi r$, esta contiene 2π veces la longitud del radio. Por tanto:

$$360^\circ = 2\pi\ \text{rad}$$

Esta equivalencia permite pasar de grados a radianes, y viceversa, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 3

Expresemos en radianes el ángulo $\alpha = 25,3^\circ$. Escribimos la equivalencia entre grados y radianes en forma de factor de conversión, de manera que aparezcan los grados en el denominador:

$$25,3^\circ \cdot \frac{2\pi\ \text{rad}}{360^\circ} = \frac{25,3\pi}{180} = 0,44\ \text{rad}$$

Ejemplo 4

Expresemos en el sistema sexagesimal el ángulo $\beta = \frac{5\pi}{12}\ \text{rad}$. Escribimos la equivalencia entre grados y radianes en forma de factor de conversión, pero ahora de manera que aparezcan los radianes en el denominador:

$$\frac{5\pi}{12}\ \text{rad} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi\ \text{rad}} = 75^\circ$$

1. **Expresa** en forma incompleja de segundos:
 - a. $\alpha = 38^\circ 25' 12''$
 - b. $\alpha = 5^\circ 12' 23''$
2. **Expresa** en forma compleja:
 - a. $\alpha = 324752''$
 - b. $\alpha = 124568''$
 - c. $\alpha = 45563''$
 - d. $\alpha = 5652'$
3. **Expresa** en radianes los siguientes ángulos:
 - a. $57^\circ 15' 32''$
 - b. $45,84^\circ$
 - c. $65^\circ 34' 2''$
 - d. $15,65^\circ$
4. **Expresa** los siguientes ángulos en el sistema sexagesimal. **Escribe** el resultado en forma compleja.
 - a. $\frac{5\pi}{3}\ \text{rad}$
 - b. $1,43\ \text{rad}$
 - c. $\frac{\pi}{8}\ \text{rad}$
 - d. $\frac{5\pi}{6}\ \text{rad}$

Y TAMBIÉN

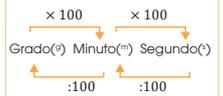
Sistema centesimal

Además de las unidades del sistema sexagesimal y los radianes, existen otras unidades de medida de ángulos: el grado, el minuto y el segundo centesimal. Un grado centesimal (1g) es la centésima parte de un ángulo recto. Sus submúltiplos, el minuto y el segundo, se definen como sigue:

$$1\ \text{minuto}\ (1^m) = \frac{1}{100}\ \text{de grado}$$

$$1\ \text{segundo}\ (1^s) = \frac{1}{100}\ \text{de minuto}$$

Así, el paso de unas unidades a otras se efectúa según el esquema.



La ventaja de este sistema es que la transformación de una expresión compleja a incompleja, y viceversa, es automática. **Observa:**
 $48,5216^\circ \Leftrightarrow 48^\circ 52^m 16^s$

Actividades

Características de la función trigonométrica seno

A continuación, describimos las características de la función, seno definido por $f(x) = \text{sen}(x)$

sen : $x \mapsto f(x) = \text{sen}(x)$
Dominio: Los números reales
Recorrido: $[-1; 1]$
Intersecciones con el eje horizontal x: $(0,0), (\pi,0), (2\pi,0)\dots$
Intersecciones con el eje vertical y: $(0,0)$
Es una función continua.
La función es simétrica con respecto al origen.
No presenta asíntotas.
No es una función inyectiva.
No es una función sobreyectiva.
Máximo relativo: $(\frac{\pi}{2}, 1)$
Mínimo relativo: $(\frac{3\pi}{2}, -1)$

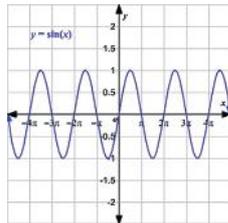
■ Tabla 2.

Además de las características descritas, analizaremos los intervalos de monotonía (crecimiento y decrecimiento) y concavidad en la siguiente tabla.

Cuadrante	Variación eje horizontal (x)	Variación eje vertical (y)	Concavidad
I	Entre 0 a $\frac{\pi}{2}$	Crece de 0 a 1	Cóncava hacia abajo
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ a π	Decrece de 1 a 0	Cóncava hacia abajo
III	Entre π a $\frac{3\pi}{2}$	Decrece de 0 a -1	Cóncava hacia arriba
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ a 2π	Crece de -1 a 0	Cóncava hacia arriba

■ Tabla 3.

La gráfica de la función $y = \text{sen}(x)$, descrita en más de un período, que constituye una cima y un valle.

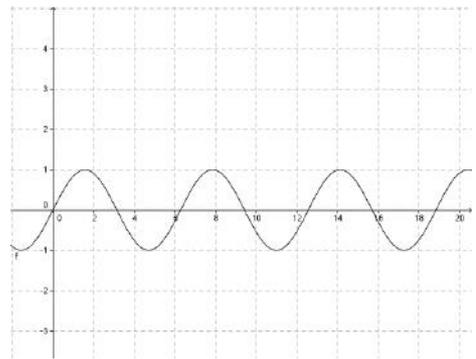


■ Fig. 5.

Actividades

5. Representa gráficamente, sobre papel millimetrado, tres períodos de la función $\text{sen}: x \mapsto f(x) = \text{sen } x$ en el intervalo $[0, 6\pi]$.

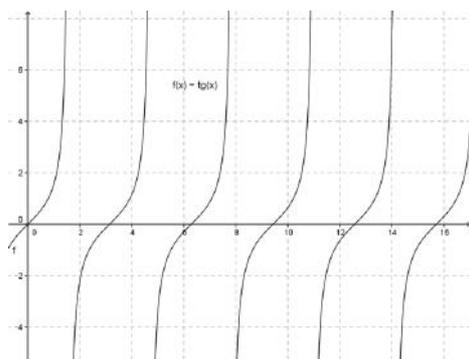
Solucionario



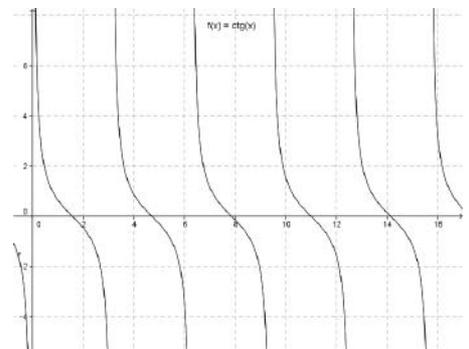
<http://goo.gl/5Bc3e7>

Prohibida su reproducción.

Actividad 7



Actividad 9



2.6. Gráfica de la curva trigonométrica cotangente

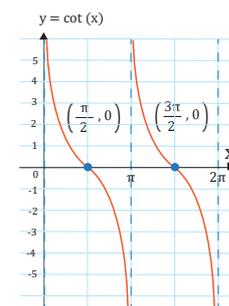
Es la función trigonométrica inversa a la tangente se denota con cot y se define: $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$; $\sin(x) \neq 0$. Observemos las características que presenta en relación a su representación gráfica y a su tabla de valores durante el periodo designado.

Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$f(x) = \cot(x)$	N.D.	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	N.D.	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	N.D.
$(x, \cot(x))$	$\{(0, \text{N.D.}); (\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}); (\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}); (\frac{\pi}{2}, 0); (\frac{2\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}); (\frac{5\pi}{6}, -\sqrt{3}); (\pi, \text{N.D.});$ $(\frac{7\pi}{6}, \sqrt{3}); (\frac{4\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}); (\frac{3\pi}{2}, 0); (\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}); (\frac{11\pi}{6}, -\sqrt{3}); (2\pi, \text{N.D.})\}$												

Análisis de la función cotangente en el intervalo $[0, 2\pi]$

■ Tabla 16.

$\cot : x \mapsto f(x) = \cot(x)$
Domínio: $\mathbb{R} - \{k\pi\}$, con $k \in \mathbb{Z}$
Recorrido: \mathbb{R}
No corta al eje Y
Corta al eje X en el punto $(\frac{\pi}{2}, 0)$ y $(\frac{3\pi}{2}, 0)$
Es una función continua en los reales salvo en los puntos en los que no está definida.
La función es simétrica con respecto al eje origen.
Presenta asíntotas en los puntos $(0, 0)$; $(\pi, 0)$ y $(2\pi, 0)$
No es una función inyectiva
No es una función sobreyectiva
No tienen máximos ni mínimos relativos
Es estrictamente decreciente en todo su dominio.



■ Fig. 15.

■ Tabla 17.

- Representa gráficamente, sobre papel milimetrado, cuatro periodos de la función $\csc : x \mapsto f(x) = \csc(x)$ en el intervalo $[0, 6\pi]$.
- Representa gráficamente, sobre papel milimetrado, tres periodos de la función $f(x) = \sec x$ en el intervalo $[0, 6\pi]$.
- Representa gráficamente, sobre papel milimetrado, dos periodos de la función $\tan : x \mapsto f(x) = \tan x$ en el intervalo $[0, 4\pi]$.
- Representa gráficamente, sobre papel milimetrado, dos periodos de la función $\cot : x \mapsto f(x) = \cot(x)$ en el intervalo $[0, 4\pi]$.

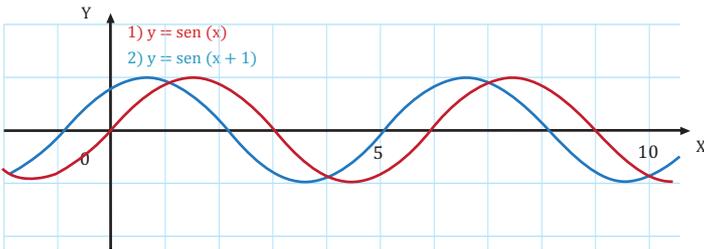
En cambio, las traslaciones horizontales se relacionan, con el signo de la variable r , con una traslación en el eje de las abscisas (eje x), si se tiene:

$y = p \operatorname{sen}(qx + r) \rightarrow$ la gráfica se traslada hacia la izquierda de su posición original.

$y = p \operatorname{sen}(qx - r) \rightarrow$ la gráfica se traslada hacia la derecha de su posición original.

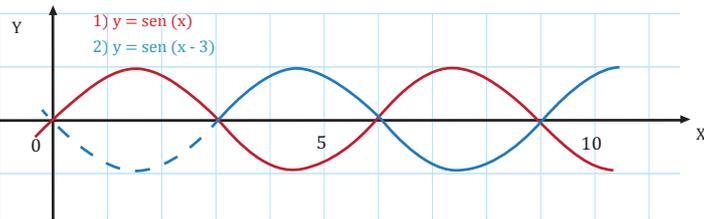
Y TAMBIÉN: 

Los signos $+$ y $-$, que llamaremos signos internos, por el hecho de encontrarse dentro del paréntesis, se deben cambiar para recorrer la distancia según la constante (número) que se indica.



■ Fig. 20.

En la función $y : x \mapsto y = \operatorname{sen}(x + 1)$, se mueve una unidad a la izquierda con respecto a la función $y = \operatorname{sen}(x)$.



■ Fig. 21.

En la función $y : x \mapsto y = \operatorname{sen}(x - 3)$, se mueve tres unidades a la derecha con respecto a la función $y = \operatorname{sen}(x)$.

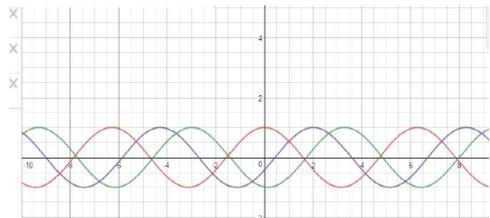
11. **Grafica**, en papel milimetrado, las funciones básica de $y : x \mapsto y = \cos(x)$, además de las funciones $y : x \mapsto y = \cos x + 3$ y $y : x \mapsto y = \cos x - 2$, explicando las traslaciones.

12. **Grafica**, en papel milimetrado, las funciones básica de $y : x \mapsto y = \operatorname{sen}(x)$, además de las funciones $y : x \mapsto y = \operatorname{sen}(x + 4)$ y $y : x \mapsto y = \operatorname{sen}(x - 5)$, explicando las traslaciones.

Actividades

Solucionario

Actividad 11



 $y = \cos(x)$

 $y = \cos(x + 3)$

 $y = \cos(x - 2)$

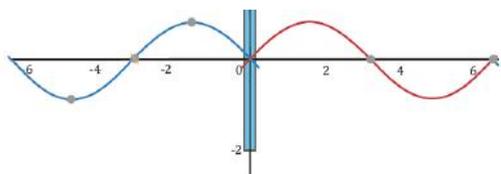
Función básica $f(x) = \cos(x)$

Función básica $f(x) = \cos(x + 3)$, la gráfica se mueve tres unidades a la izquierda.

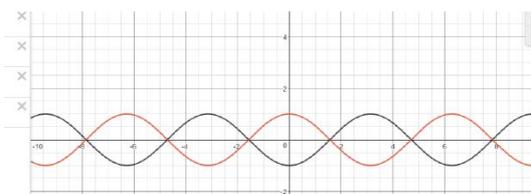
$f(x) = \cos(x - 2)$ la gráfica se mueve dos unidades a la derecha respecto de la función básica.

Solucionario

Actividad 13



Como podemos observar, la función: $y = \text{sen}(-x)$, se refleja sobre el eje vertical (y).



- 1 $f(x) = \cos(x)$
- 2 $f(x) = -\cos(x)$
- 3 $f(x) = \cos(-x)$

Función básica $f(x) = \cos(x)$

La función $f(x) = -\cos(x)$ se refleja sobre el eje horizontal x

La función $f(x) = \cos(-x)$ se refleja sobre el eje vertical y, confundándose con la función original.

Reflexiones

La transformación en reflexión se la puede intuir mediante la «colocación imaginaria» de un espejo sobre los ejes.

Así:

Caso 1: Cuando se incluye un signo negativo antes de la función.

$y: x \mapsto y = -\text{sen}(x) \rightarrow$ la gráfica se refleja sobre el eje x.

Observemos la gráfica:

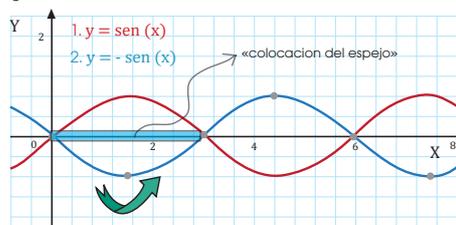


Fig. 22.

Como podemos observar, la función: $y: x \mapsto y = -\text{sen } x$, se refleja sobre el eje horizontal (x).

Caso 2: Cuando se incluye un signo negativo antes del ángulo x.

$y: x \mapsto y = \text{sen}(-x) \rightarrow$ la gráfica se refleja sobre el eje y.

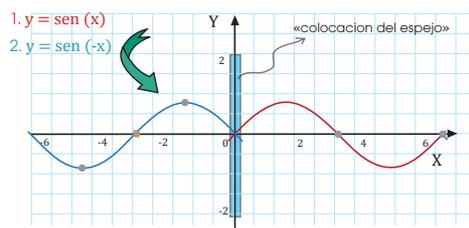


Fig. 23.

Como podemos observar, la función: $y: x \mapsto y = \text{sen}(-x)$, se refleja sobre el eje vertical (y).

13. **Analiza** gráficamente las reflexiones en los ejes de coordenadas de la función $y: x \mapsto y = \cos(x)$.

Estiramientos y compresiones verticales

Los estiramientos se caracterizan con el producto de un número con la variable p .

Caso 1: Cuando se multiplica por un número mayor que 1.

$y = p \text{ sen}(x) \rightarrow$ la gráfica se estira con respecto a los puntos de referencia hacia arriba y abajo con respecto a los nodos de la función básica, el número de veces que indica la constante.

Observemos la gráfica.

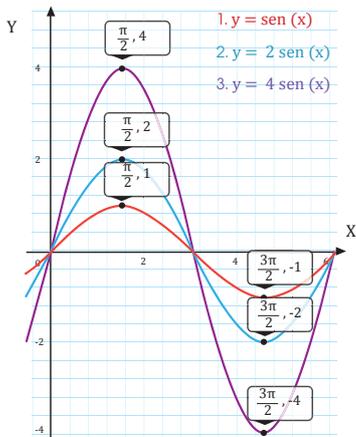


Fig. 24.

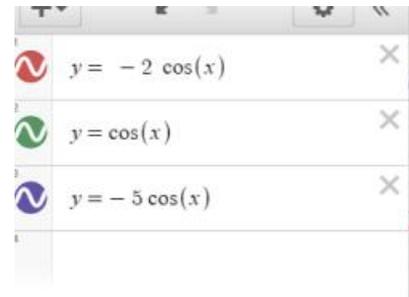
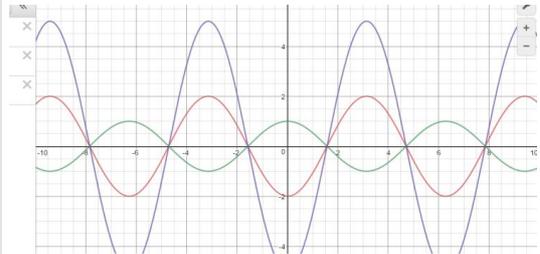
Como podemos observar, la función: $y: x \mapsto y = 2 \text{ sen}(x)$ se estira dos unidades hacia arriba y hacia abajo con respecto a la función básica de $y = \text{sen}(x)$.

Además, de igual manera, la función: $y: x \mapsto y = 4 \text{ sen}(x)$ se estira cuatro unidades hacia arriba y hacia abajo con respecto a la función básica $y: x \mapsto y = \text{sen}(x)$.

- Actividades**
- Analiza gráficamente los estiramientos y alargamientos en los ejes de coordenadas de la función $y: x \mapsto y = \cos(x)$.
 - Analiza lo que debería suceder con los estiramientos y alargamientos en los ejes de coordenadas de las funciones: $y: x \mapsto y = -2\cos(x)$ y con $y: x \mapsto y = -5 \cos(x)$.

Solucionario

Actividad 15

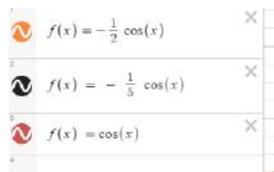
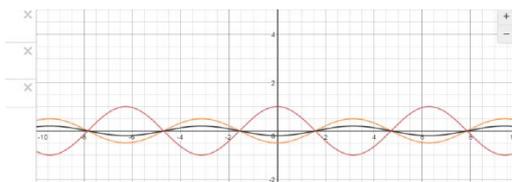


Función básica $f(x) = \cos(x)$

La función $f(x) = -2 \cos(x)$, se refleja al eje x y se alarga 2 unidades.

La función $f(x) = -5 \cos(x)$, se refleja al eje x y se alarga 5 unidades.

Solucionario



Función básica $f(x) = \cos(x)$

La función $f(x) = -\frac{1}{2} \cos(x)$, se refleja en el eje x y se comprime 2 unidades hacia abajo y hacia arriba referente a la función básica.

La función $f(x) = -\frac{1}{5} \cos(x)$, se refleja en el eje x y se comprime 5 unidades hacia arriba y hacia abajo referente a la función básica.

Las compresiones verticales se caracterizan con el producto entre un número fraccionario y la variable p .

Caso 2: Cuando se multiplica por un número mayor que cero y menor que la unidad.

$y = \frac{1}{2} p \sin(x) \rightarrow$ la gráfica se comprime con respecto a los puntos de referencia hacia arriba y abajo con respecto a los nodos de la función básica, el número de unidades que indica el denominador.

Observemos la gráfica.

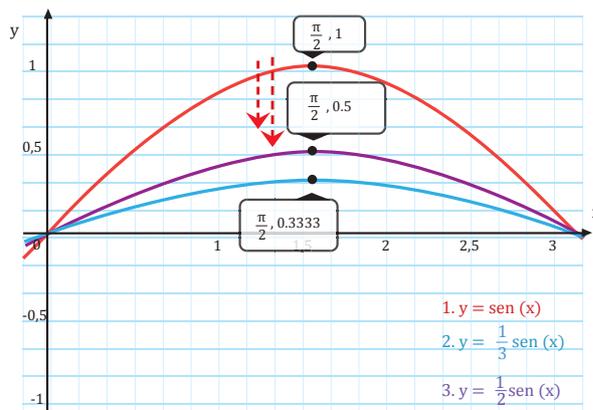


Fig. 25.

Como podemos observar, la funciones: $y: x \mapsto y = \frac{1}{2} \sin(x)$, $y: x \mapsto y = \frac{1}{3} \sin(x)$ se comprimen dos y tres unidades respectivamente, hacia arriba y hacia abajo con respecto a la función básica de $y: x \mapsto y = \sin(x)$.

16. **Dibuja**, en papel milimetrado, las compresiones verticales de la función $y: x \mapsto y = \cos(x)$.

17. **Analiza** lo que debería suceder con las compresiones en los ejes de coordenadas de las funciones:

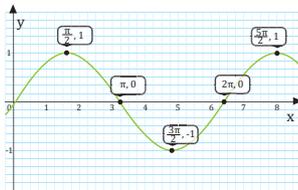
$y: x \mapsto y = -\frac{1}{5} \cos(x)$ y con $y: x \mapsto y = -\frac{1}{2} \cos(x)$.



Ejercicios y problemas

1 Funciones Trigonómicas

1. Observa la siguiente gráfica.



• Responde las preguntas.

- Escribe la función que representa la gráfica.
- Escribe el dominio de la función así como el recorrido.
- Escribe las intersecciones con los ejes horizontal y vertical, respectivamente.
- Escribe los máximos y mínimos que se observan.
- Escribe los intervalos donde la función es creciente.
- Escribe los intervalos donde la función es decreciente.

2. Elabora una tabla de valores de x con intervalos de $\frac{\pi}{9}$ desde 0 a 2π .

• Para representar $f(x) = \tan(x)$

3. Elabora una tabla de valores de x con intervalos de $\frac{\pi}{6}$ desde 0 a 4π .

• Para representar $f(x) = \sin(x)$

4. Considerando la siguiente tabla.

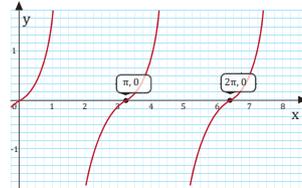
Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de X (grados)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$f(x) = \sec x$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	N.D.	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2	N.D.	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

• Realiza la representación gráfica y responde las siguientes preguntas.

- Escribe la función que representa la gráfica.
- Escribe el dominio y recorrido de la función.
- Escribe las intersecciones con los ejes horizontal y vertical, respectivamente.
- Escribe los máximos y mínimos que se observan.
- Escribe los intervalos donde la función es creciente.
- Escribe los intervalos donde la función es decreciente.
- Escribe si la gráfica tiene asíntotas. Explica.

5. Grafica las funciones $f(x) = \sin(x)$ y $f(x) = \cos(x)$, utilizando el graficador Desmos.

6. Observa la siguiente gráfica.



• Responde las preguntas

- Escribe la función que representa la gráfica.
- Escribe el dominio de la función así como el recorrido.
- Escribe las intersecciones con los ejes horizontal y vertical, respectivamente.
- Escribe los máximos y mínimos que se observan.
- Escribe los intervalos donde la función es creciente.

Solucionario

Actividad 15

Solucionario de los ejercicios y problemas

1. a. $f(x) = \sin x$

b. $\text{Dom}(\sin) = \mathbb{R}$; $\text{Rec}(\sin) = [-1, 1]$

c. Intersección eje x : $(0, 0)$; $(\pi, 0)$; $(2\pi, 0)$

Intersección con el eje y : $(0, 0)$

d. Máximos : $(\frac{\pi}{2}, 1)$; $(\frac{5\pi}{2}, 1)$

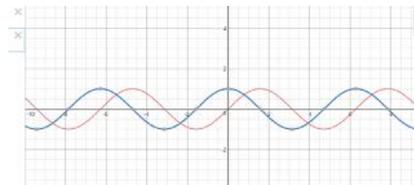
Mínimos : $(\frac{3\pi}{2}, -1)$

e. Creciente: $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

f. Decreciente: $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

Valores de x en Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
Valores de x en grados	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
$f(x) = \sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0

Valores de x en Radianes	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{6}$	3π	$\frac{19\pi}{6}$	$\frac{10\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{3}$	$\frac{23\pi}{6}$	4π
Valores de x en grados	390°	420°	450°	480°	510°	540°	570°	600°	630°	660°	690°	720°
$f(x) = \sin(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0



Solucionario

7. a. $53,6116^\circ$
 b. $12,1139^\circ$
 c. $3,2061^\circ$
 d. $89,67^\circ$
 e. $125,7^\circ$
 f. $12,5345^\circ$

9.

Intervalo	Función	Crece o decrece
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	Sen x	Crece
$[0, \pi]$	Cos x	Decrece
$\left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	Tan x	Creciente
$]0, \pi[$	Ctg x	Decreciente
$\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$	Csc x	Decreciente
$\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$	Sec x	Creciente

11.

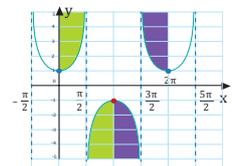
Función	Máximos	Mínimos
Sen x	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$
Cos x	$(0, 1); (2\pi, 1)$	$(\pi, -1)$
Tan x	No	No
Ctg x	No	No
Csc x	$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$
Sec x	$(0, 1); (2\pi, 1)$	$(\pi, -1)$

Función	Intersección eje x	Intersección eje y
Sen x	$(0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0)$	$(0, 0)$
Cos x	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	$(0, 0)$
Tan x	$(0, 0); (\pi, 0); (2\pi, 0)$	$(0, 0)$
Ctg x	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right); \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$	No
Csc x	No	No
Sec x	No	$(0, 1)$

- f. **Escribe** los intervalos donde la función es decreciente
7. **Reduce** los siguientes ángulos a grados.
11. **Gráfica** el siguiente par de funciones y **establece** dos observaciones con respecto a la comparación de las mismas.

- a. $f: x \mapsto f(x) = \sin x; f: x \mapsto f(x) = \sin(x + 4)$
 b. $f: x \mapsto f(x) = \cos x; f: x \mapsto f(x) = \cos(x - 3)$
 c. $f: x \mapsto f(x) = \csc x; f: x \mapsto f(x) = \csc(x - 5)$
 d. $f: x \mapsto f(x) = \tan x; f: x \mapsto f(x) = 2 \tan(x + 1)$
 e. $f: x \mapsto f(x) = \sec x; f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{4} \sec(x + 2)$
 f. $f: x \mapsto f(x) = \cos x; f: x \mapsto f(x) = -\cos(x + 2)$
 g. $f: x \mapsto f(x) = \operatorname{ctg} x; f: x \mapsto f(x) = -\cos(x + 2)$

8. **Expresa** los siguientes medidas de grados en radianes.
11. **Identifica** los puntos máximos y mínimos relativos en el siguiente gráfico de la función $y = \sec(x)$.



9. **Completa** el siguiente cuadro de las características de variación de la función trigonométrica coseno.

Cuadrante	Variación eje horizontal (x)	Variación eje vertical (y)	Concavidad
I		Decrece de 1 a 0	Cóncava hacia abajo
II	Entre $\frac{\pi}{2}$ a π		Cóncava hacia arriba
III		Crece de -1 a 0	Cóncava hacia arriba
IV	Entre $\frac{3\pi}{2}$ a 2π	Crece de 0 a 1	

10. **Completa** el cuadro de la tabla de valores de la función trigonométrica seno.

Valores de X Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π		$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π	
Valores de X (grados)	0°	30°	60°	120°	180°	210°	240°		300°	330°	360°
$f(x) = \sin x$	0		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1		$\frac{1}{2}$

2 Transformaciones

14. Responde a las siguientes preguntas.

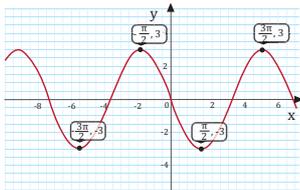
- ¿Cuántos tipos de transformaciones conoce?
- ¿Qué efecto genera el tipo de traslación horizontal?
- ¿Cómo identifica el tipo de transformación horizontal?
- ¿Cuántas formas de traslación horizontal pueden manifestarse?
- Explica la transformación en reflejo.
- ¿En qué consiste la teoría del espejo?
- ¿Qué debe cambiar en una función para que represente una reflexión sobre el eje x?

15. Identifica y describe las transformaciones que se presentan en las siguientes funciones trigonométricas.

- $f: x \mapsto f(x) = 3 \operatorname{sen} x$
- $f: x \mapsto f(x) = -8 \cos x$
- $f: x \mapsto f(x) = 0,25 \operatorname{sen} x$
- $f: x \mapsto f(x) = \operatorname{sen}(x + 1)$
- $f: x \mapsto f(x) = -0,5 \operatorname{sen}(x + 4)$
- $f: x \mapsto f(x) = -0,25 \operatorname{sen}(x - 5) + 3$

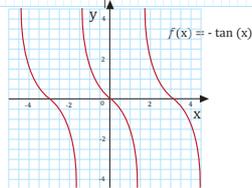
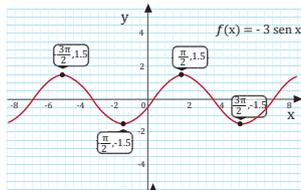
16. Grafica las funciones, utilizando el graficador Desmos; identifica el dominio y el recorrido de forma gráfica.

- $f(x) = -7 \operatorname{sen} x$
- $f(x) = \cos(x - 3)$
- $f(x) = \operatorname{csc}(x - 2) + 4$
- $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sec}(x + 3)$
- $f(x) = -\cos(x - 2) - 2$



17. En los ejercicios anteriores, grafica dos periodos de las funciones, sin utilizar calculadora.

18. En los siguientes gráficos, especifica la amplitud de cada una de las funciones y explica las traslaciones que se manifiestan.



19. Escribe el proceso para expresar $53^\circ 36' 42''$ en grados.

20. Utiliza el resultado obtenido en la pregunta anterior para expresarlo en radianes.

21. Escribe las características de la función seno.

22. Dibuja las funciones seno, coseno y tangente en intervalos de 15° $\left(\frac{\pi}{12}\right)$

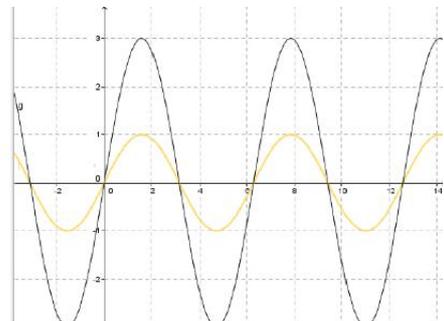
23. Dibuja las funciones secante, cosecante y cotangente en intervalos de 15° $\left(\frac{\pi}{12}\right)$

24. Elabora una tabla de doble entrada en la que compares las representaciones gráficas seno - secante, coseno - cosecante y tangente - cotangente.

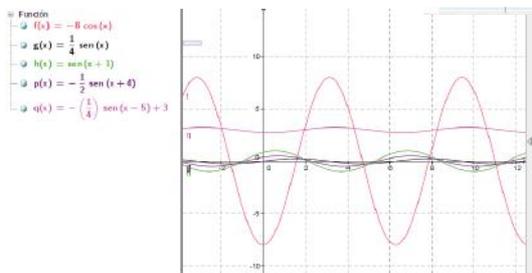
Solucionario

$f(x) = 3 \operatorname{sen} x$	La gráfica se estira tres veces hacia arriba y hacia abajo con respecto a los nodos de la función básica.
$f(x) = -8 \cos x$	La gráfica se estira ocho veces hacia arriba y hacia abajo con respecto a los nodos de la función básica. A la vez que se refleja en el eje x.
$f(x) = 0,25 \operatorname{sen}(x)$	La gráfica se comprime cuatro veces de la función original.
$f(x) = \operatorname{sen}(x + 1)$	La gráfica se mueve una unidad a la izquierda.
$f(x) = -0,5 \operatorname{sen}(x + 4)$	La gráfica se comprime dos veces de la función original, a la vez que se refleja en el eje x y se mueve 4 unidades a la izquierda.
$f(x) = -0,25 \operatorname{sen}(x - 5) + 3$	La gráfica se refleja en el eje x, se comprime cuatro veces, se mueve cinco veces a la derecha y se traslada tres unidades hacia arriba.

15.



Función
 $g(x) = 3 \operatorname{sen}(x)$



19. Para transformar $53^{\circ}36'42''$, primero transformamos los minutos a grados y los segundos a grados y, finalmente, sumamos las fracciones resultantes, para luego dividir la fracción resultante y encontramos el valor en grados. $53,6117^{\circ}$

23. Para realizar las gráficas se requiere la siguiente tabla de valores (presentamos como apoyo)

Valores en radianes	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
Valores en grados	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°
$f(x) = \text{Sen}x$	0	0,26	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,97	1	0,97	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,26
$f(x) = \text{Cos}x$	1	0,97	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0,26	0	-	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,97
$f(x) = \text{Tan}x$	0	0,27	0,58	1	1,73	3,73	∞	-	3,73	1,73	0,58	-0,27

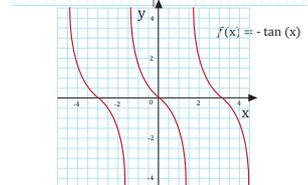
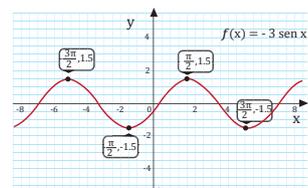
Valor en radianes	π	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π
Valores en grados	180°	195°	210°	225°	240°	255°	270°	285°	300°	315°	330°	345°	360°
$f(x) = \text{Sen}x$	0	-	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-0,97	-1	-	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,5	-0,26	0
$f(x) = \text{Cos}x$	-1	-0,97	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-0,26	0	0,26	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0,97	1
$f(x) = \text{Tan}x$	0	0,27	0,58	1	1,73	3,73	∞	-	3,73	1,73	0,58	0,27	0

2 Transformaciones

14. Responde a las siguientes preguntas.
 - a. ¿Cuántos tipos de transformaciones conoce?
 - b. ¿Qué efecto genera el tipo de traslación horizontal?
 - c. ¿Cómo identifica el tipo de transformación horizontal?
 - d. ¿Cuántas formas de traslación horizontal pueden manifestarse?
 - e. Explica la transformación en reflejo
 - f. ¿En qué consiste la teoría del espejo?
 - g. ¿Qué debe cambiar en una función para que represente una reflexión sobre el eje x?

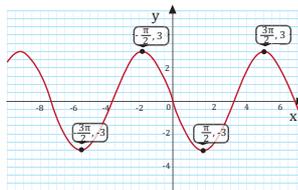
17. En los ejercicios anteriores, grafica dos periodos de las funciones, sin utilizar calculadora.

18. En los siguientes gráficos, especifica la amplitud de cada una de las funciones y explica las traslaciones que se manifiestan.



15. Identifica y describe las transformaciones que se presentan en las siguientes funciones trigonométricas.
 - a. $f: x \mapsto f(x) = 3 \text{ sen } x$
 - b. $f: x \mapsto f(x) = -8 \text{ cos } x$
 - c. $f: x \mapsto f(x) = 0,25 \text{ sen } x$
 - d. $f: x \mapsto f(x) = \text{sen}(x + 1)$
 - e. $f: x \mapsto f(x) = -0,5 \text{ sen}(x + 4)$
 - f. $f: x \mapsto f(x) = -0,25 \text{ sen}(x - 5) + 3$

16. Grafica las funciones, utilizando el graficador Desmos; identifica el dominio y el recorrido de forma gráfica.
 - a. $f(x) = -7 \text{ sen } x$
 - b. $f(x) = \text{cos}(x - 3)$
 - c. $f(x) = \text{csc}(x - 2) + 4$
 - d. $f(x) = \frac{1}{2} \text{ sec}(x + 3)$
 - e. $f(x) = -\text{cos}(x - 2) - 2$



19. Escribe el proceso para expresar $53^{\circ}36'42''$ en grados.

20. Utiliza el resultado obtenido en la pregunta anterior para expresarlo en radianes

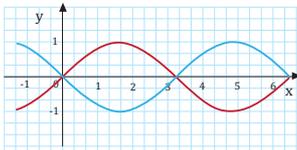
21. Escribe las características de la función seno.

22. Dibuja las funciones seno, coseno y tangente en intervalos de 15° ($\frac{\pi}{12}$)

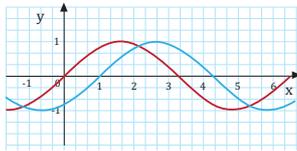
23. Dibuja las funciones secante, cosecante y cotangente en intervalos de 15° ($\frac{\pi}{12}$)

24. Elabora una tabla de doble entrada en la que compares las representaciones gráficas seno - secante, coseno - secante y tangente - cotangente.

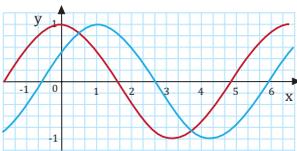
25. Escribe las funciones para las gráficas de color azul.



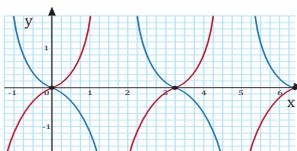
a. $f(x) = \dots\dots\dots$



b. $f(x) = \dots\dots\dots$



c. $f(x) = \dots\dots\dots$



d. $f(x) = \dots\dots\dots$

26. Grafica en papel milimetrado:

- a. La función $f(x) = \sin(x)$, en el intervalo $[0; 4\pi]$.
- b. La función: $f(x) = \sin(x)$, en el intervalo $[0; 6\pi]$.
- c. **Identifica** en cada uno de los gráficos, el dominio, el recorrido, los puntos máximos y mínimos, los intervalos de monotonía (creciente y decreciente).

27. Utiliza la herramienta Desmos para representar las siguientes funciones en la misma gráfica.

- a. **Representa** la función: $f(x) = \tan(x)$.
- b. **Representa** la función: $f(x) = -\tan(x)$.
- c. **Interpreta y compara** lo que puede observar.

28. Utilizando la herramienta Desmos, para representar las siguientes funciones en la misma gráfica.

- a. **Representa** la función: $f(x) = \sec(x)$
- b. **Representa** la función: $f(x) = \sec(x + 2)$
- c. **Representa** la función: $f(x) = \sec(x - 4)$
- d. **Interpreta y compara** lo que pudiste observar.

29. Algunas veces para obtener los términos de una sucesión se recurre a procedimientos que incluyen sucesivas operaciones más o menos complejas. Con la ayuda de los enlaces propuestos sobre el triángulo de Pascal:

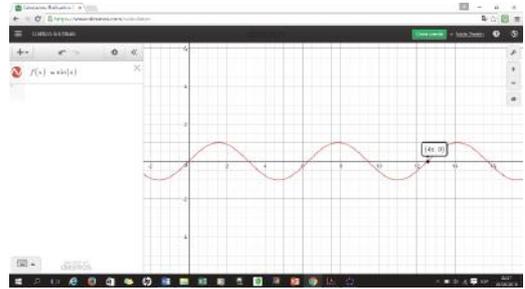
- http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar2008/educ-continua/mate/lugares/ma2_01.htm
- www.disfrutalasmatematicas.com/triangulo-pascal.html
- www.disfrutalasmatematicas.com/serpinski-triangulo.html

- Resuelve las cuestiones siguientes:
- a. ¿Cómo se construye el triángulo de Pascal?
- b. ¿Qué relación tiene con la sucesión de Fibonacci?
- c. ¿Qué sucesiones encuentras en las sucesivas diagonales?
- d. ¿Qué sucesiones encuentras en las sucesivas diagonales?
- e. Si tomas cada fila como un número, ¿qué obtienes?

Prohibida su reproducción.

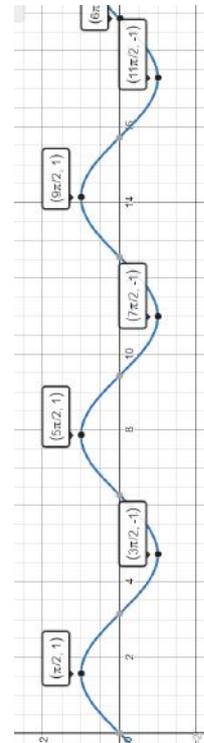
Solucionario

27. a.



27. Grafica en papel milimetrado:

- a. Dos períodos de la función: $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0; 4\pi]$.
- b. Tres períodos de la función: $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0; 6\pi]$.
- c. **Identifica** en cada uno de los gráficos, el dominio, el recorrido, los puntos máximos y mínimos, los intervalos de monotonía (creciente y decreciente).



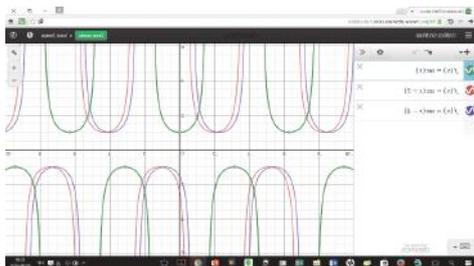
Prohibida su reproducción.

Solucionario

c.

	$\text{sen}(4\pi)$	$\text{sen}(6\pi)$
Dom (sen(x))	R	R
Rec (sen(x))	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
Máximos	$[\frac{\pi}{2}, 1]; [\frac{5\pi}{2}, 1]$	$[\frac{\pi}{2}, 1]; [\frac{5\pi}{2}, 1]; [\frac{9\pi}{2}, 1]$
Mínimos	$[\frac{3\pi}{2}, -1]; [\frac{7\pi}{2}, -1]$	$[\frac{3\pi}{2}, -1]; [\frac{7\pi}{2}, -1]; [\frac{11\pi}{2}, -1]$
Crece	$[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \cup [\frac{7\pi}{2}, 4\pi]$	$[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}] \cup [\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}] \cup [\frac{11\pi}{2}, 6\pi]$
Decrece	$[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \cup [\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}]$	$[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \cup [\frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}] \cup [\frac{9\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}]$

29.

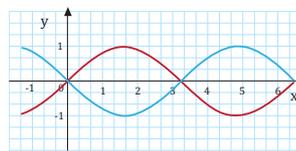


29. Utilizando la herramienta Desmos, representa las siguientes funciones en la misma gráfica.

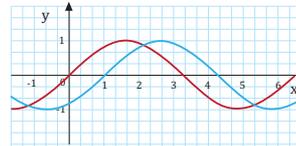
- Representa la función: $f(x) = \sec(x)$
- Representa la función: $f(x) = \sec(x + 2)$
- Representa la función: $f(x) = \sec(x - 4)$
- Interpreta lo que pudiste observar.

c. Interpretación: La gráfica $f(x) = \text{Sec}(x + 2)$ se mueve dos unidades a la izquierda y la gráfica $f(x) = \text{Sec}(x - 4)$ se mueve cuatro unidades a la derecha de la función original.

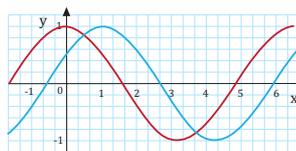
25. Escribe las funciones para las gráficas de color azul.



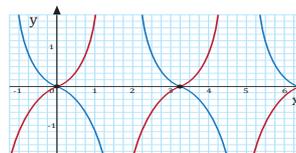
a. $f(x) = \dots\dots\dots$



b. $f(x) = \dots\dots\dots$



c. $f(x) = \dots\dots\dots$



d. $f(x) = \dots\dots\dots$

26. Grafica en papel milimetrado:

- La función $f(x) = \text{sen}(x)$, en el intervalo $[0; 4\pi]$.
- La función $f(x) = \text{sen}(x)$, en el intervalo $[0; 6\pi]$.
- Identifica en cada uno de los gráficos, el dominio, el recorrido, los puntos máximos y mínimos, los intervalos de monotonía (creciente y decreciente).

27. Utiliza la herramienta Desmos para representar las siguientes funciones en la misma gráfica.

- Representa la función: $f(x) = \tan(x)$.
- Representa la función: $f(x) = -\tan(x)$.
- Interpreta y compara lo que puede observar.

28. Utilizando la herramienta Desmos, para representar las siguientes funciones en la misma gráfica.

- Representa la función: $f(x) = \sec(x)$.
- Representa la función: $f(x) = \sec(x + 2)$.
- Representa la función: $f(x) = \sec(x - 4)$.
- Interpreta y compara lo que pudiste observar.

29. Algunas veces para obtener los términos de una sucesión se recurre a procedimientos que incluyen sucesivas operaciones más o menos complejas.

Con la ayuda de los enlaces propuestos sobre el triángulo de Pascal:

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar2008/educorntina/mate/lugares/ma2_01.htm

www.distribucionmatematicas.com/triangulo-pascal.html

www.distribucionmatematicas.com/sierpinski-triangulo.html

Resuelve las cuestiones siguientes:

- ¿Cómo se construye el triángulo de Pascal?
- ¿Qué relación tiene con la sucesión de Fibonacci?
- ¿Qué sucesiones encuentras en las sucesivas diagonales?
- ¿Qué sucesiones encuentras en las sucesivas diagonales?
- Si tomas cada fila como un número, ¿qué obtienes?

Para finalizar

1 Analiza las siguientes preguntas, luego subraya la respuesta correcta.

a. ¿Cuál es la medida en radianes de un ángulo que mide 30 grados?

- $\frac{\pi}{4}$
- $\frac{\pi}{5}$
- $\frac{\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{3}$

b. El valor en grados de $\frac{\pi}{2}$ es

- 45°
- 90°
- 22,5°
- 180°

c. Al expresar 53° 36' 42" en grados resulta:

- 53,36°
- 53,36°
- 53,61°
- 53,78°

d. Al interpretar la función

$$f: x \mapsto f(x) = -\cos(x + 2)$$

- Se mueve 2 unidades a la derecha y se refleja sobre el eje x.
- Se mueve 2 unidades hacia arriba y se refleja sobre el eje y.
- Se mueve 2 unidades a la izquierda y se refleja sobre el eje x.
- Se mueve 2 unidades a la izquierda y se refleja sobre el eje y.

2 Responde verdadero (V) o falso (F).

a. El recorrido de la función seno es $[-1, 1]$

b. La función tangente es inyectiva.

c. La función secante corta el eje horizontal.

d. La función seno interseca al eje vertical en $(0, 0)$

e. La función $f: x \mapsto f(x) = \sin(x + 6)$ es una traslación.

f. La función tangente tiene asíntotas.

g. La función $f: x \mapsto f(x) = -\cos(x)$ es una reflexión.

h. La función inversa de secante es el coseno.

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y autoevalúate en tu cuaderno:

• Trabajo personal

¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?

¿He cumplido mis tareas?

¿Qué aprendí en esta unidad?

• Trabajo en equipo

¿He compartido con mis compañeros y compañeras?

¿He respetado las opiniones de los demás?

• Escribe la opinión de tu familia.

• Pide a tu profesor sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

Solucionario

Solucionario de la autoevaluación

1. a. $\pi/6$

b. 90°

c. 53,61°

d. Se mueve dos unidades a la derecha y se refleja sobre el eje x.

2.

a. V

b. F

c. F

d. V

e. V

f. V

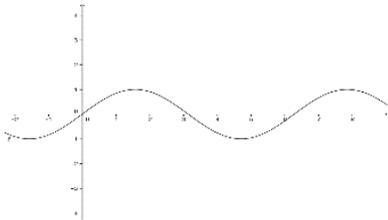
g. V

h. V

1. Responde verdadero (V) o falso (F) en los siguientes enunciados.

a. La medida de $\frac{3\pi}{2}$ en grados es 210° . ()

b. La medida del ángulo $28^\circ 15' 12''$ en forma incompleja en grados es $28,253^\circ$ ().



c. La gráfica representa la función $f(x) = \sin x$. ()

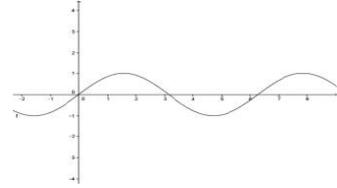
d. La función $f(x) = \cos(-x)$ tiene una reflexión con el eje x. ()

e. La función $f(x) = \csc(x)$ corta al eje de las x en el punto $(0,0)$. ()

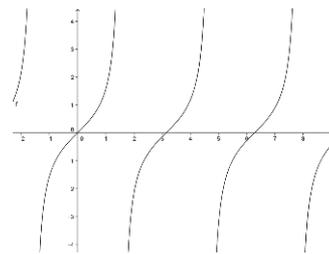
2. **Analiza** las siguientes preguntas luego encierra en un círculo la respuesta correcta

A) La gráfica de la función $f(x) = \cos(x)$ es:

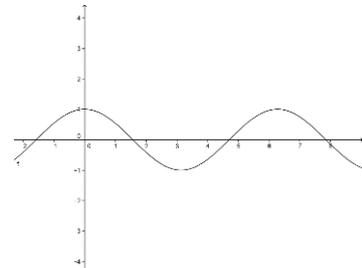
a.



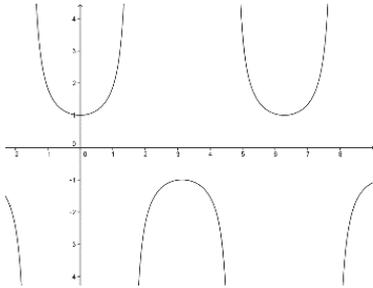
b.



c.



d.



B) El recorrido de la función $f(x) = \cot(x)$ es:

a. $[-1, 1]$

b. \mathbb{R}

c. $[1, -1]$

d. Ninguno

C) La medida del ángulo $138312''$ en forma compleja es:

a. $38^\circ 25' 12''$

b. $86^\circ 25' 12''$

c. $230^\circ 31' 12''$

d. Ninguno

D) En la función $f(x) = 12 \operatorname{sen} x$ la gráfica se:

a. Estira hacia arriba y abajo.

b. Se refleja con el eje x.

c. Se comprime hacia la derecha.

d. Se comprime hacia arriba y abajo.

E) En un período $[0, 2\pi]$, la intersección con el eje horizontal de la función

$f(x) = \operatorname{Sen}(x)$ es:

a. $(0,0)$; $(\pi, 1)$; $(2\pi, 0)$

b. $(0, 0)$; $(\pi, 0)$; $(2\pi, 0)$

c. $(0, 0)$; $(\pi, 0)$; $(2\pi, 1)$

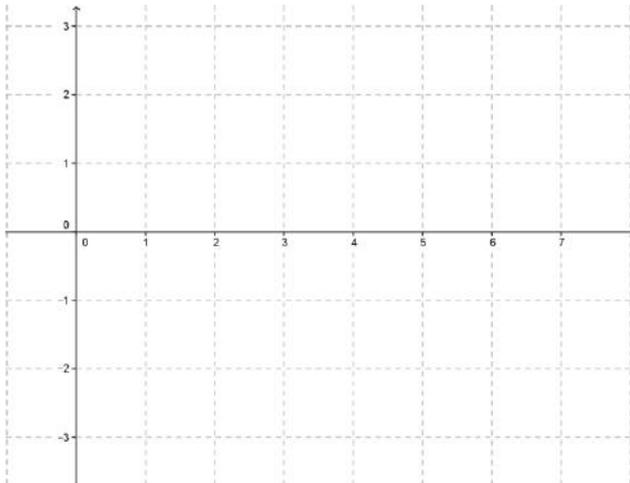
d. $(0,0)$; $(0, \pi)$; $(2\pi, 0)$

3. **Completa** correctamente de acuerdo a la pregunta.

a. **Llena** los espacios en blanco la siguiente tabla para la función $f(x) = \tan(x)$ con un intervalo de $\frac{\pi}{4}$ en un período de $[0, \pi]$.

Valor en radianes	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$		π
Valor en grados		45°			
$f(x) = \tan(x)$	0			-1	

b. Con base a la tabla anterior grafica la función $f(x) = \tan(x)$.



c. La función $y = \text{Sen}(12\frac{1}{2}x)$ se estira el recíproco de

d. En la función $f(x) = \text{Cos}(x + 2)$ la gráfica se mueveunidades hacia la, respecto de la función original $f(x) = \text{Cos}(x)$.

e. En la función $f(x) = -\text{Sen}(x - 2)$, la gráfica se refleja en el ejey se mueve dos unidades a la

SOLUCIONARIO

Solucionario de la evaluación de la unidad

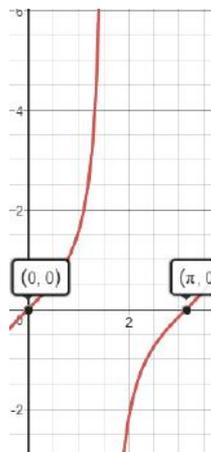
1. a. F; b. V; c. V; d. F; e. F

2. A) c; B) b; C) b; D) d; E) b

3. a.

Valor en radianes	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
Valor en grados	0°	45°	90°	135°	180°
$f(x) = \tan(x)$	0	1	∞	-1	0

b)



c. Horizontalmente; $\frac{1}{2}$

d. Dos; Izquierda

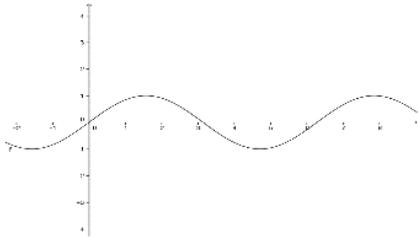
e. Eje X; Derecha

1. Escribe (V) o (F)

a. La medida de $\frac{\pi}{2}$ en grados es 180° ()

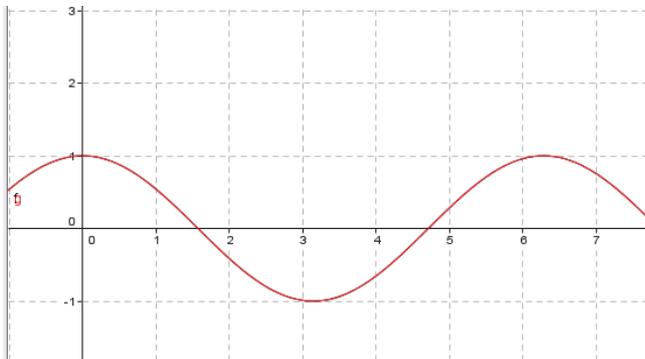
b. La medida de $25^\circ 15'$ en forma incompleja es $25,25'$ ()

c. La gráfica representa la función $f(x) = \text{sen } x$ ()



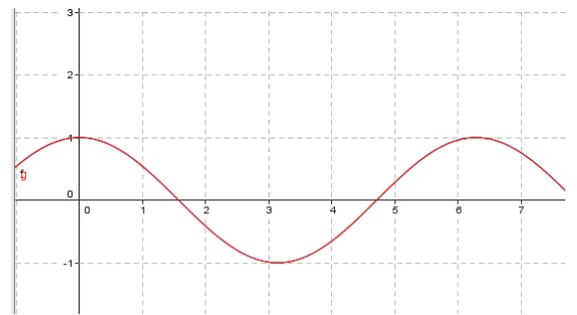
d. La función $f(x) = \cos(-x)$ tiene una reflexión con el eje x ()

Guíate con la gráfica comparando con la función original, observa aparentemente las dos gráficas coinciden.



$f(x) = \cos(x)$
 $g(x) = \cos(-x)$

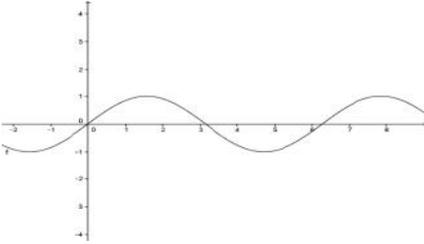
e. La función $f(x) = \csc(x)$ corta al eje de las x en el punto $(0,0)$. ()



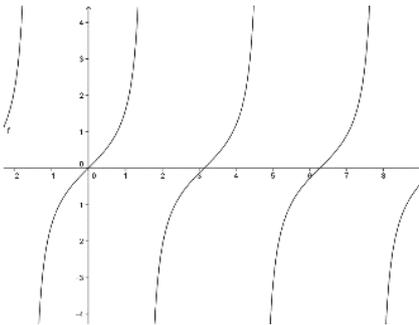
2. Analiza las siguientes preguntas luego encierra en un círculo la respuesta correcta.

A) La gráfica de la función $f(x) = \cos(x)$ es:

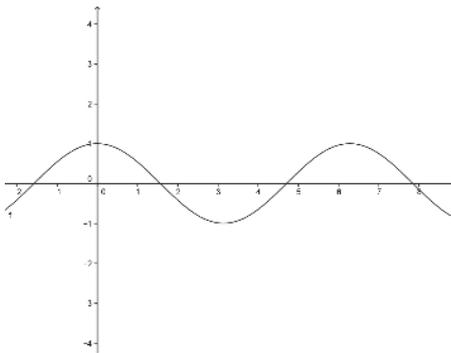
a.



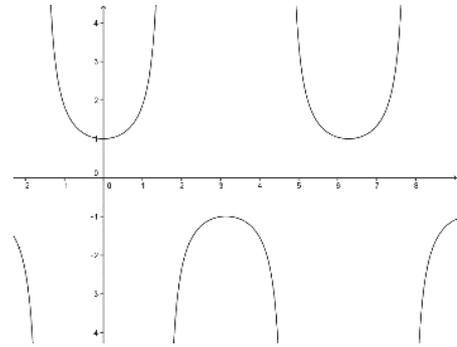
b.



c.



d.



B) El recorrido de la función $f(x) = \sin(x)$ es:

a. $[-1, 1]$

b. \mathbb{R}

c. $[1, -1]$

d. Ninguno

C) La medida de $360'$ en grados es:

- a. 36°
- b. 6°
- c. 9°
- d. Ninguna

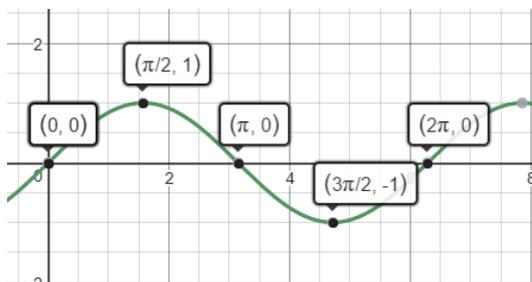
D) La función $f(x) = 2 \text{ Sen}(x)$ se:

- a. Estira hacia arriba y abajo.
- b. Se refleja con el eje x.
- c. Se comprime hacia la derecha.
- d. Se comprime hacia arriba y abajo.

E) En un período $[0, 2\pi]$, la intersección con el eje horizontal de la función

$f(x) = \text{Sen}(x)$ es:

- a. $(0,0)$; $(\pi, 1)$; $(2\pi,0)$
- b. $(0,0)$; $(\pi, 0)$; $(2\pi,0)$
- c. $(0,0)$; $(\pi, 0)$; $(2\pi,1)$
- d. $(0,0)$; $(0, \pi)$; $(2\pi,0)$



3. Completa correctamente.

a. En la función $f(x) = \text{Cos}(x + 2)$ la gráfica se mueve unidades hacia la, respecto de la función original $f(x) = \text{Cos}(x)$.

b. En la función $f(x) = -\text{Sen}(x)$, la gráfica se refleja en el eje

Solucionario de evaluación con adaptaciones curriculares

1. a. F

b. V

c. V

d. F

e. F

2. A) c

B) a

C) b ;

D) a ;

E) b

3. a. Dos, Izquierda

b. Eje X

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

Debatir la necesidad que existe en las ciencias de las telecomunicaciones de modelar matemáticamente las ondas electromagnéticas (Las ondas de radio, de televisión, el WI-FI, son ondas electromagnéticas).

Reflexión

Reflexionar acerca de la importancia de estos conocimientos en la tecnología actual.

Identificar las características y transformaciones de los gráficos de las funciones trigonométricas básicas.

Conceptualización

Comparar las similitudes entre la gráfica de una función seno, con un gráfico de una onda electromagnética.

Usar un sistema de referencia adecuado e interpretar las características de la función seno y coseno.

Aplicación

Usar los modelos matemáticos comprendidos en las características físicas de las ondas.

Reconocer e interpretar las características de las funciones trigonométricas.

Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.

RECURSOS PARA FOMENTAR EL INGENIO EN EL AULA

Derivadas



3 Resumen

Cociente incremental: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Interpretación Física

Primeras derivadas: Velocidad instantánea $v(t) = \frac{dx}{dt}$
 Velocidad instantánea: $v(t) = \frac{dx}{dt}$
 Segundo derivada: Aceleración instantánea $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
 Aceleración instantánea: $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$

Interpretación Geométrica

Recta tangente: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
 Recta Normal: $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$
 Ecuación de la recta tangente: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Aplicaciones de la derivada

Estudio de la función: Calcular la primera derivada de la función de desplazamiento $x(t)$ para obtener la velocidad instantánea $v(t)$ y la segunda derivada de la aceleración $a(t)$.

Problemas resueltos

A. Límites

1. Determina el $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ utilizando la regla de L'Hôpital o la simplificación algebraica.

x	...	0.98	0.99	1.01	1.02	1.05	...
f(x)	...	-0.02	-0.01	0.01	0.04	0.25	...
f'(x)	...	1.96	1.98	2.02	2.04	2.10	...

2. Determina $f'(x)$ para $f(x) = \sin(x)$ utilizando la definición de la derivada por límites.

B. Derivadas

3. Determina $f'(x)$ para $f(x) = \cos(x)$ utilizando la definición de la derivada por límites.

4. Determina $f'(x)$ para $f(x) = e^x$ utilizando la definición de la derivada por límites.

Problemas resueltos

C. Interpretación geométrica de la derivada

1. Determina la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ en el punto $(2, -5)$.

2. Calcula la derivada de la función $f(x) = \ln(x)$ en el punto $(e, 1)$.

D. Máximos y Mínimos

3. Halla $f'(x)$ para $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ e indica en cuáles de las coordenadas se da $f'(x) = 0$.

Ejercicios y problemas

D. Límites

1. Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ utilizando la regla de L'Hôpital.

E. Derivadas (límites)

1. Halla en qué punto $f(x)$ es continua.

2. Calcula la derivada de la función $f(x) = \ln(x)$ en el punto $(1, 0)$.

3. Calcula la derivada de la función $f(x) = e^x$ en el punto $(0, 1)$.

Problemas resueltos

1. Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ utilizando la regla de L'Hôpital.

2. Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$ utilizando la regla de L'Hôpital.

3. Calcula el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$ utilizando la regla de L'Hôpital.

Para finalizar

1. Si $f(x) = 4x^2 + 3x - 2$, halla el valor de la derivada en $x = 1$.

2. Si $f(x) = \ln(x)$, halla el valor de la derivada en $x = e$.

3. Si $f(x) = e^x$, halla el valor de la derivada en $x = 0$.

4. Si $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, halla el valor de la derivada en $x = 2$.

ZONA

Preparación marginal al ahorro

El costo marginal es el costo adicional de producir una unidad más de un bien. En este caso, el costo marginal de preparar un ahorro es el costo de la inversión.

Ingeniero en Finanzas

El ingeniero en finanzas es un profesional que se dedica a analizar y gestionar el dinero de las empresas y los particulares.

Prohibida su reproducción

UNIDAD 3



Ejes temáticos

Derivadas

Contenidos

- La idea intuitiva de límite.....página 90
- Estimación numérica de un límite.....página 91-92
- Cociente incremental.....página 93
- Derivada de una función.....página 93
- Calculo de la derivada de una función mediante la definición de límites.....página 94
- La derivada y algunas de sus reglas básicas en funciones polinomiales.....página 95
- Interpretación física del cociente incremental (velocidad media)páginas 96-97
- Interpretación física del cociente incremental (velocidad instantánea)páginas 98-99
- Interpretación geométrica de la primera derivada.....páginas 100-101
- La derivada de funciones polinomiales utilizando las TIC.....páginas 102-103
- Derivada de una función racional mediante la definición de límites.....página 104
- La derivada de funciones racionales utilizando las TIC.....páginas 105-106
- Segunda derivada de funciones polinómicaspágina 107
- Interpretación física de la segunda derivada (aceleración media)página 108
- Interpretación física de la segunda derivada aceleración instantánea.....página 109
- Monotonía de funciones polinomiales de grado ≤ 4página 110
- Unidad 3
- En contexto...
- pág. 89
- Propuesta para incentivar el debate a partir de la lectura e investigación de documentos on-line.
- Resumen
- pág. 114
- Es un resumen de los conceptos, definiciones y procedimientos más importantes de la unidad.
- Problemas resueltos
- págs. 115 -116
- Es un registro de problemas resueltos que sirven como guía al estudiante.
- Ejercicios y problemas propuestos
- págs. 117 -121
- Se proponen nuevos ejercicios relacionados con el tema abordado en la unidad.
- Para finalizar
- pág. 122
- Propone nuevos ejercicios del tema de la unidad y una autoevaluación.
- Zona WiFi
- pág. 123
- Se aborda algunas aplicaciones de los contenidos de la unidad en la vida real.
- Análisis de intervalos (crecientes, decrecientes y constantes)página 111
- Máximos y mínimos de una función.....páginas 112-113
- Resumen.....página 114
- Problemas resueltos.....páginas 115-116
- Ejercicios y problemas.....páginas 117-121
- Para finalizar.....página 122
- Zona WiFi.....página 123

LOGO INSTITUCIONAL		NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN				AÑO LECTIVO	
PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA							
1. DATOS INFORMATIVOS:							
Docente:	Nombre del docente que ingresa la información	Área/ asignatura:	MATEMÁTICA	Grado/Curso:	2° BACHILLERATO	Paralelo:	
N.º de unidad de planificación:	3	Título de unidad de planificación:	DERIVADAS DE FUNCIONES REALES	Objetivos específicos de la unidad de planificación:	<p>Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.</p> <p>Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos</p> <p>Matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras</p> <p>disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.</p> <p>Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.</p>		
PERÍODOS	24			SEMANA DE INICIO:			
2. PLANIFICACIÓN							
DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:				CRITERIOS DE EVALUACIÓN			

<ul style="list-style-type: none"> Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con uniones cuadráticas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos. Calcular de manera intuitiva el límite cuando $h \rightarrow 0$ de una función cuadrática con el uso de calculadora como una distancia entre dos número reales. Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones cuadráticas a partir del cociente incremental. Interpretar de manera geométrica (pendiente de la secante) y física el cociente incremental (velocidad media) de funciones cuadráticas con apoyo de las TIC. Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) de funciones cuadráticas con apoyo de las TIC. Interpretar de manera física la segunda derivada (aceleración media, aceleración instantánea) de una función cuadrática con apoyo de las TIC. (Calculadora gráfica, software, applets). Resolver y plantear problemas reales o hipotéticos que pueden ser modelizados con derivadas de funciones cuadráticas entificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgando la pertinencia y validez de los resultados obtenidos. Interpretar de manera geométrica y física la primera derivada (pendiente de la tangente, velocidad instantánea) de funciones polinómicas de grado = 4 con apoyo de las TIC. Interpretar de manera física la segunda derivada (aceleración media, aceleración instantánea) de una función polinómica de grado = 4 para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets). Calcular de manera intuitiva la derivada de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado = 2 para analizar la monotonía, determinar los máximos y mínimos de estas funciones y graficarlas con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets). Resolver aplicaciones reales o hipotéticas con ayuda de las derivadas de funciones polinómicas de grado = 4 y de funciones racionales cuyos numeradores y denominadores sean polinomios de grado = 2 y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos. 	<p>CE.M.5.3. Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.</p>
---	--

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
<p>Aplicar el principio de incrementos, como introducción al tema de derivada de una función.</p> <p>Debatir en clase los fenómenos de velocidad y aceleración, estudiados en física para poner en contexto el tema de derivadas de una función.</p> <p>Analizar una imagen de la noción geométrica de secante y tangente a una curva, evidenciando las características principales de estos conceptos.</p> <p>Diferenciar los conceptos entre incrementos grandes e infinitesimales en una función, por medio del concepto de límite de una función, numéricamente.</p> <p>Comparar las relaciones entre derivada de una función.</p> <p>Interpretar el significado de cociente incremental.</p> <p>Reflexionar acerca de la importancia de estos modelos matemáticos en ciencias como física, química, economía, etc.</p> <p>Identificar los métodos básicos de derivación de funciones elementales.</p> <p>Através de un gráfico evidenciar con un ejemplo la utilidad de los temas tratados en esta unidad, en problemas físicos, químicos, etc.</p> <p>Reconocer los elementos (variables) involucradas en los gráfico y sus respectivas ecuaciones.</p> <p>Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Texto - Cuaderno - Videos (sitios web) - Pizarra - Calculadora 	<p>M.5.3.1. Grafica funciones reales y analiza su dominio, recorrido, monotonía, ceros, extremos, paridad; identifica las funciones afines, potencia, raíz cuadrada, valor absoluto; reconoce si una función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva; realiza operaciones con funciones aplicando las propiedades de los números reales en problemas reales e hipotéticos. (1,4)</p> <p>M.5.3.2. Representa gráficamente funciones cuadráticas; halla las intersecciones con los ejes, el dominio, rango, vértice y monotonía; emplea sistemas de ecuaciones para calcular la intersección entre una recta y una parábola o dos parábolas; emplea modelos cuadráticos para resolver problemas; de manera intuitiva halla un límite y la derivada; optimiza procesos empleando las TIC. (1,3, 14)</p> <p>M.5.3.3. Reconoce funciones polinómicas de grado n, opera con funciones polinómicas de grado =4 y racionales de grado =3; plantea modelos matemáticos para resolver problemas aplicados a la informática; emplea el teorema de Horner y el teorema del residuo para factorizar polinomios; con la ayuda de las TIC, escribe las ecuaciones de las asíntotas, y discute la validez de sus resultados. (1,3, 1,4)</p> <p>M.5.3.4. Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonía, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos naturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados. (1,3, 1,2)</p>	<p>Comprobar el desarrollo de las habilidades necesarias para reconocer, interpretar, graficar, analizar las características y operar con funciones de variable real (lineal, cuadrática, exponencial, logarítmica, trigonométrica, polinómicas y racionales). Que el estudiante analice el dominio, el recorrido, la monotonía, los ceros, máximos y mínimos, paridad y composición de las diferentes funciones. También se incluyen las propiedades de inyectividad, sobreyectividad y biyectividad. Apoyándose con las TIC, debe poder graficar, interpretar y encontrar las intersecciones con los ejes, y la intersección de las gráficas de funciones; además de hallar la solución de ecuaciones de manera gráfica; interpretar geoméricamente la derivada de una función cuadrática y sus aplicaciones; y comprender la noción de límite y su aplicación, así como la modelización de situaciones reales a través de las funciones.</p>

ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA

J.3. Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.

I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.

I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con

ELABORADO	REVISADO	APROBADO
Docente:	Director del área :	Vicerrector:
Firma:	Firma:	Firma:
Fecha:	Fecha:	Fecha:

Objetivos generales del área que se evalúan

- Emplear progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas en el planteamiento y resolución de problemas de diferentes ámbitos
- Reconocer las funciones trigonométricas (seno, coseno, tangente, secante, cosecante y cotangente), sus propiedades y las relaciones existentes entre estas funciones y representarlas de manera gráfica con apoyo de las TIC (calculadora gráfica, software, applets).

Objetivos del área por subnivel

- Reconocer y graficar funciones periódicas determinando el período y amplitud de las mismas, su dominio y recorrido, monotonía, paridad.
- Reconocer y resolver (con apoyo de las TIC) aplicaciones, problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones trigonométricas, identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas, y juzgar la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.
- O.M.5.2. Producir, comunicar y generalizar información, de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica, mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos, para así comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país, y tomar decisiones con responsabilidad social.

Objetivo integrador del área por subnivel

- OI.5.2. Aplicar conocimientos de diferentes disciplinas para la toma de decisiones asertivas.
- OI.5.11. Reflexionar y tomar decisiones respecto a una sexualidad responsable y a su participación sistemática en prácticas corporales y estéticas, considerando su repercusión en una vida saludable y la influencia de las modas en la construcción de los hábitos y de las etiquetas sociales en la concepción de la imagen corporal.

Criterios de evaluación

- Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.
- Reconoce patrones presentes en sucesiones numéricas reales, monótonas y definidas por recurrencia; identifica las progresiones aritméticas y geométricas; y, mediante sus propiedades y fórmulas, resuelve problemas reales de matemática financiera e hipotética, y el tráfico de personas esclavizadas liderado por las grandes potencias.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.
- Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles

Indicadores para la evaluación del criterio

- Halla gráfica y analíticamente el dominio, recorrido, monotonía, periodicidad, desplazamientos, máximos y mínimos de funciones trigonométricas para modelar movimientos circulares y comportamientos de fenómenos naturales, y discute su pertinencia; emplea la tecnología para corroborar sus resultados

1. Completa correctamente.

- a. $(x - 2)(x + 4) = \dots\dots\dots$
- b. $5x - x(x + 2) = \dots\dots\dots$
- c. $16x^2 - 40x + 25 = \dots\dots\dots$
- d. $\frac{x^2 - 4x}{x - 4} = \dots\dots\dots$

2. Responde verdadero (V) o falso (F).

a. $x^2 - 25 = (x - 5)^2$ ()

b. El valor numérico de la expresión $5x^2 - 3x + 1$ para $x = 3$ es 37. ()

c. La pendiente de la recta $3x - 2y = 5$ ()

d. La fórmula para calcular la altura en caída libre de un cuerpo es:

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

3. Escoge la respuesta correcta.

A) La pendiente de la recta perpendicular a la recta $-x + 2y = 4$ es:

- a. 2
- b. 12
- c. -2

B) La ecuación de pendiente 3 y que pasa por el punto (2, -3) es:

- a. $y = -3x - 9$
- b. $y = 3x - 9$
- c. $y = -3x + 9$
- d. $y = x - 9$

C) El valor numérico de $\frac{x-2}{x+4}$ para $x = 0,1$.

- a. - 0,46
- b. 0, 46
- c. 0,51
- d. - 0,51

D) Al simplificar la expresión $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$ se obtiene:

- a. $x - 2$
- b. $x - 1$
- c. $-x + 1$
- d. $x + 1$

SOLUCIONARIO

1. a. $x^2 + 2x - 8$

b. $-x^2 + 3x$

c. $(4x - 5)^2$

d. x

2. a. F

b. V

c. F

d. V

3. A. c

B. b

C. a

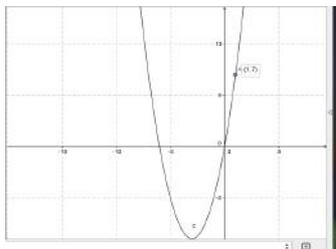
D. d

Solucionario

Actividad 1

a.

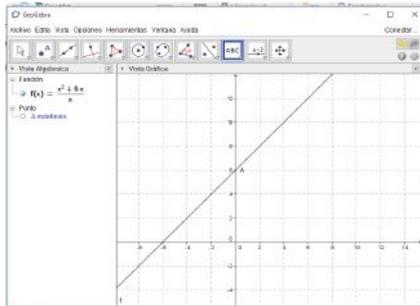
x	-	0,98	0,99	1,01	1,02	1,03	-
f(x)	-	6,84	6,92	7,08	7,16	7,24	-



Comparación:
Para valores de $x > 1$, $f(x)$ crece y para valores $x < 1$, $f(x)$ decrece.

b.

x	-	-0,1	-0	0,001	0,11	-
f(x)	-	5,9	5,999	6,001	6,11	-



Comparación: Para valores de $x > 0$, $f(x)$ crece y para valores $x < 0$, $f(x)$ decrece.

Estimación numérica de un límite

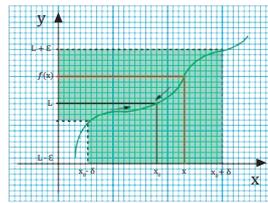


Fig. 1.

Un número real L es el límite de una función f cuando x tiende o se aproxima a x_0 si y solo si para cualquier número real positivo ϵ , por pequeño que sea, existe un número real positivo δ , tal que para todo $x \neq x_0$, si la distancia entre x y x_0 es menor que δ , entonces la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ϵ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Ejemplo 2

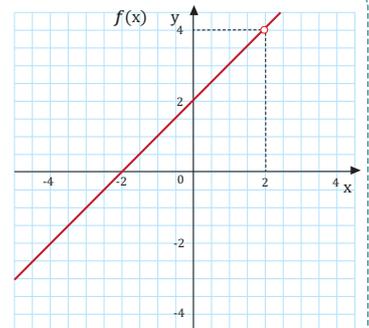
Considerando la función:
 $f: x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$

Supongamos que es posible representar gráficamente la función f , pero es notable observar que cuando $x = 2$, la función no podría representarse, debido a que se anula el denominador.

Para observar el comportamiento de la función, generamos una tabla de valores que se aproximan a dos por la izquierda y por la derecha, es decir utilizamos valores un poco menores y un poco mayores que 2, como se ilustra en la siguiente tabla.

x	...	1,98	1,99	2,01	2,02	2,03	...
f(x)	...	3,98	3,99	4,01	4,02	4,03	...

Como es notable, el límite de la función es 4, debido a que se acerca por la izquierda y por la derecha.



1. Considerando los siguientes límites, **completa** las tablas respectivas y **estima** el límite. **Compara** el resultado con la representación gráfica respectiva.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 6x)$

x	...	0,98	0,99	1,01	1,02	1,03	...
f(x)
(x, f(x))							

c. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} \right)$

x	...	3,98	3,99	4,01	4,02	4,03	...
f(x)
(x, f(x))							

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 6x}{x} \right)$

x	...	-0,1	-0,001	0,001	0,1	...
f(x)
(x, f(x))						

d. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 4} \right)$

x	...	-0,99	-0,98	1,01	1,02	...
f(x)
(x, f(x))						

Estimación numérica de un límite

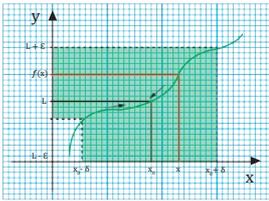


Fig. 1.

Un número real L es el límite de una función f cuando x tiende o se aproxima a x_0 si y solo si para cualquier número real positivo ϵ , por pequeño que sea, existe un número real positivo δ , tal que para todo $x \neq x_0$ si la distancia entre x y x_0 es menor que δ , entonces la distancia entre $f(x)$ y L es menor que ϵ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

Ejemplo 2

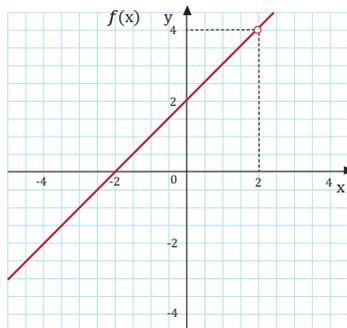
Considerando la función:
 $f: x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$

Supongamos que es posible representar gráficamente la función f , pero es notable observar que cuando $x = 2$, la función no podría representarse, debido a que se anula el denominador.

Para observar el comportamiento de la función, generamos una tabla de valores que se aproximen a dos por la izquierda y por la derecha, es decir utilizamos valores un poco menores y un poco mayores que 2, como se ilustra en la siguiente tabla.

x	...	1,98	1,99	2,01	2,02	2,03	...
f(x)	...	3,98	3,99	4,01	4,02	4,03	...

Como es notable, el límite de la función es 4, debido a que se acerca por la izquierda y por la derecha.



1. Considerando los siguientes límites, **completa** las tablas respectivas y **estima** el límite. **Compara** el resultado con la representación gráfica respectiva.

a. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 6x)$

x	...	0,98	0,99	1,01	1,02	1,03	...
f(x)	...						
(x, f(x))							

c. $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4} \right)$

x	...	3,98	3,99	4,01	4,02	4,03	...
f(x)	...						
(x, f(x))							

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 6x}{x} \right)$

x	...	-0,1	-0,001	0,001	0,1	...
f(x)	...					
(x, f(x))						

d. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 4} \right)$

x	...	-0,99	-0,98	1,01	1,02	...
f(x)	...					
(x, f(x))						

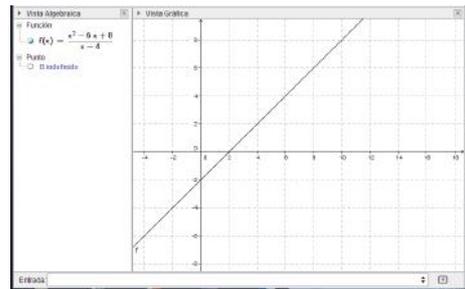
Actividades

Prohibida su reproducción.

Solucionario

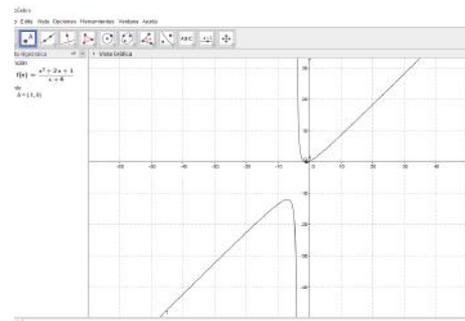
c.

x	-	3,98	3,99	4,01	4,02	4,03	-
f(x)	-	1,98	1,99	2,01	2,02	2,03	-



Comparación: Para valores de $x > 4$, $f(x)$ crece y para valores $x < 4$, $f(x)$ decrece.

x	...	-0,99	-0,98
f(x)	...	3,3E-05	0,00013



Comparación: Para valores de $x > -1$, $f(x)$ crece en el primer ramal y en el intervalo $]-4, -1]$ $f(x)$ decrece en el primer ramal; mientras que en el segundo ramal en la primera parte crece y la segunda parte decrece.

Prohibida su reproducción.

3,18 m/s

Cálculo de la derivada de una función mediante la definición de límites

En los procesos esenciales para obtener la derivada intervienen: productos notables, simplificación de expresiones semejantes y sustituciones numéricas; así tenemos:

Ejemplo No 1	Ejemplo No 2
Determinemos $f'(x)$ para $f: x \mapsto f(x) = 8x + 5$	Determinemos $f'(x)$ para $f: x \mapsto f(x) = -5x^2 - 3$
En cada variable x insertamos la adición de h ; luego restamos la función original.	
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8(x+h) + 5 - (8x+5)}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5(x+h)^2 - 5 - (-5x^2 - 3)}{h}$
Propiedad distributiva en los paréntesis.	Productos notables y propiedad distributiva en los paréntesis.
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8x + 8h + 5 - 8x - 5}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5x^2 - 10xh - 5h^2 - 3 + 5x^2 + 3}{h}$
Reducimos términos semejantes	
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-10xh - 5h^2}{h}$
Simplificamos h	Sacamos el factor común y simplificamos
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8\cancel{h}}{\cancel{h}}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$
Finalmente, calculamos el límite reemplazando h por 0	
$f'(x) = 8$	$f'(x) = -10x$

Tabla 2.

- Suponiendo que el movimiento de un cuerpo se interpreta según la ecuación: $y = 10t^2$, **determina** la velocidad media considerando los dos primeros segundos de caída.
- Suponiendo que el movimiento de un cuerpo se interpreta según la ecuación: $y = 3t^2 - 2$, **determina** la velocidad media considerando los cinco primeros segundos de caída.
- Determina** la derivada de las funciones utilizando la definición de la derivada.
 - $f: x \mapsto f(x) = -16x + 9$
 - $f: x \mapsto f(x) = 5x$
 - $f: x \mapsto f(x) = x^2 - x$
 - $f: x \mapsto f(x) = 4x^3 + 3x + 2$
 - $f: x \mapsto f(x) = x \cdot 6x^2$

Prohibida su reproducción

Actividades

A continuación se presentan algunas reglas básicas de la derivación, las cuales permitirán calcular las derivadas sin el uso de la definición de la derivada por límites.

Regla 1: Sea la función constante definida por: $f: x \mapsto f(x) = k$, donde k es constante. La derivada de una función constante es cero. $f'(x) = 0$.

Explica que al derivar una función constante, en general un número real, entonces la derivada es cero.

Hallamos las derivadas de:

- | | |
|---|-----------------------------|
| a. $f: x \mapsto f(x) = -5$ | entonces $f'(x) = 0$ |
| b. $f: x \mapsto f(x) = 9\pi c$ | entonces $f'(x) = 0$ |
| c. $\frac{d}{dx} \sqrt{5}$ | entonces $\frac{d}{dx} = 0$ |
| d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \frac{3}{5}$ | entonces $f'(x) = 0$ |

Regla 2: Sea la función definida por: $f: x \mapsto f(x) = x^n$. La derivada de esta función es $f'(x) = nx^{n-1}$. Cuando n es cualquier número real.

Explica que el exponente multiplica a la función y que la base x tiene una nueva potencia reducida en una unidad, con respecto a la función inicial.

Hallamos las derivadas de:

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------|
| a. $f: x \mapsto f(x) = -5x^3$ | entonces $f'(x) = -15x^2$ |
| b. $f: x \mapsto f(x) = 9x^5$ | entonces $f'(x) = 45x^4$ |
| c. $f: x \mapsto f(x) = -4x^{-2}$ | entonces $f'(x) = 8x^{-3}$ |

Regla 3: La derivada en la adición o sustracción. Siendo las funciones g y h diferenciables:

Expone que la derivada de la suma o la resta de funciones es la suma o diferencia de las derivadas independientes de cada función de manera independiente.

$$\text{sea } f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

$$\text{sea } u(x) = g(x) - h(x) \Rightarrow u'(x) = g'(x) - h'(x)$$

Hallamos las derivadas de:

- | | |
|---|----------------------------------|
| a. $f: x \mapsto f(x) = x^3 + 8x^2$ | entonces $f'(x) = 3x^2 + 16x$ |
| b. $f: x \mapsto f(x) = 9x^5 + 12x^3$ | entonces $f'(x) = 45x^4 + 36x^2$ |
| c. $f: x \mapsto f(x) = -4x^{-2} - 15x$ | entonces $f'(x) = 8x^{-3} - 15$ |

Estudiaremos el resto de reglas en el curso superior, debido a que el propósito de explicar únicamente las reglas mencionadas es que el estudiante pueda verificar los resultados obtenidos en la diferenciación por límites.

5. Deriva las funciones utilizando las reglas de diferenciación básicas (reglas 1 a 3).

- | | |
|---|---|
| a. $f: x \mapsto f(x) = -5x^2 + 8$ | d. $f: x \mapsto f(x) = -12x^2 + 8x + 15$ |
| b. $f: x \mapsto f(x) = -5\pi^3$ | e. $f: x \mapsto f(x) = -20x^2 + \sqrt{12}$ |
| c. $f: x \mapsto f(x) = -e^2 + \frac{3}{7}$ | f. $f: x \mapsto f(x) = \pi x + \sqrt{5}$ |

Actividades

Solucionario

5.

a. $f'(x) = -10x$

b. $f'(x) = 0$

c. $f'(x) = 0$

d. $f'(x) = -24x + 8$

e. $f'(x) = -40x$

f. $f'(x) = \pi$

Solucionario

7.- 55 ; - 125

Segundo método: Utilizando las reglas básicas de derivación (página 91).

Determinamos la primera derivada de la función:

$$s(t) = 8t^2 - 5t + 2. \text{ Aplicando las reglas 1, 2 y 3.}$$

$$s'(t) = 16t - 5$$

Reemplazamos el valor de $t = 4,7$ segundos

$$s'(4,7) = 16(4,7) - 5$$

Resolvemos las operaciones

$$v = 70,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Respuesta: La velocidad instantánea es $70,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Es notable que los resultados obtenidos, utilizando los dos métodos, son iguales.

Ejemplo 7

Se deja caer una piedra desde un edificio de 300 metros de altura. ¿Cuál es el tiempo en el que la piedra llega al suelo y con qué velocidad lo hace?

Razonamiento: Es notable que en el enunciado del ejercicio no disponemos del valor del tiempo, por ende, lo primero que se debe hacer es calcularlo.

Sea la ecuación de caída libre: $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ y sabiendo que $v_0 = 0$ (se deja caer), $s = 300\text{m}$ y que el valor de $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, resulta la expresión:

$$300 = 4,9t^2$$

Despejamos la variable tiempo.

$$4,9 t^2 = 300; t^2 = \frac{300}{4,9}; t = \sqrt{\frac{300}{4,9}}; t = 7,8 \text{ s}$$

Derivamos la expresión: $s(t) = 4,9 t^2$

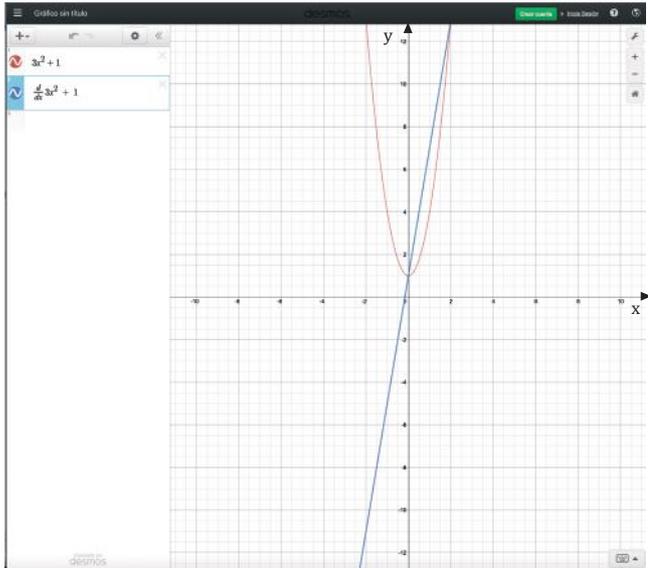
$$s'(t) = 9,8 t; s'(7,8) = 9,8(7,8); s'(7,8) = 76,44 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La piedra llega al suelo en 7,8 segundos con una velocidad de $76,44 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

7. Se lanza hacia arriba una bola de béisbol con una velocidad inicial de $115 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, su distancia s en función de t está dada por $s: t \mapsto s(t) = 115t - 10t^2$. **Halla** la velocidad que alcanza en $t = 3$ y $t = 12$.

8. El desplazamiento en metros de una partícula que se mueve en línea recta se expresa con $s: t \mapsto s(t) = 2t^3 + 5t^2 - 3t$, donde t está expresada en segundos. **Halla** la velocidad instantánea cuando $t = 5$.

5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



Es notable en el gráfico que, al derivar una función polinomial, la derivada resulta una función de grado menor.

Como muestra la gráfica, una función cuadrática (azul) de segundo grado, luego de derivar, resulta una función lineal (verde) de grado 1.

9. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

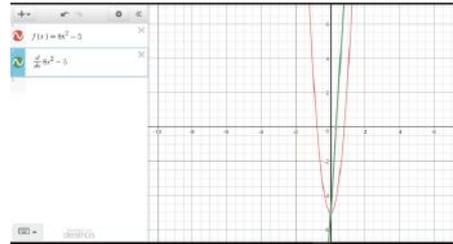
- a. $f: x \mapsto f(x) = 8x^2 - 5$
- b. $f: x \mapsto f(x) = x^3 - 5$
- c. $f: x \mapsto f(x) = x^4 - 4x^3 + 8x$
- d. $f: x \mapsto f(x) = -x^5 - \frac{2}{3}x^4 + \frac{5}{7}x - 12$

Actividades

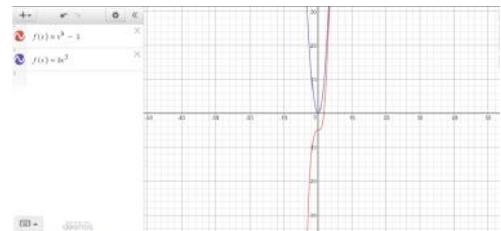
Prohibida su reproducción.

Solucionario

9. a



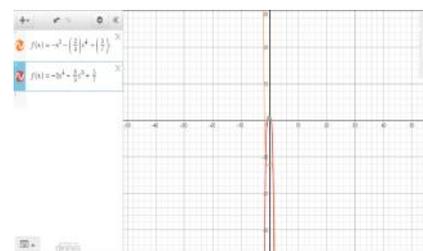
b. La gráfica de color violeta es la derivada.



c. La gráfica de color verde es la derivada.



d. La gráfica de color rojo es la derivada.



Prohibida su reproducción.

Solucionario

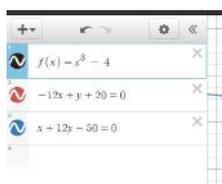
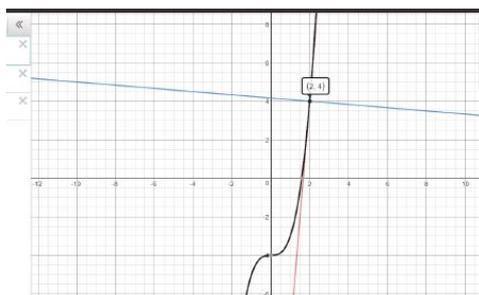
11.

Ecuación de la recta tangente.

$$-12x + y + 20 = 0$$

Ecuación de la recta normal.

$$x + 12y - 50 = 0$$



Derivada de una función racional mediante la definición de límites

De forma análoga, es posible obtener la derivada de una función racional cuyos esenciales son: adición y/o sustracción de fracciones algebraicas, fracciones complejas, simplificación de expresiones semejantes y sustituciones numéricas; así tenemos:

Ejemplo No 1	Ejemplo No 2
Determine $f'(x)$ para $f(x) = \frac{3}{x}$	Determine $f'(x)$ para $f(x) = \frac{x}{(x-4)}$
En cada variable x insertamos la adición de h ; luego, restamos la función original.	
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{(x+h)} - \frac{3}{x}}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h}{x+h-4} - \frac{x}{(x-4)}}{h}$
Resolvemos la diferencia de fracciones algebraicas	
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3x - 3x - 3h}{(x+h)(x)}}{h}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2 + xh - 4x - 4h - x^2 - xh + 4x}{(x+h-4)(x-4)}}{h}$
Dividimos las fracciones algebraicas	
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x - 3x - 3h}{(x+h)(x)(h)}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + xh - 4x - 4h - x^2 - xh + 4x}{h(x+h-4)(x-4)}$
Reducimos los términos semejantes y simplificamos las fracciones	
$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{(x+h)(x)(h)}$	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + xh - 4x - 4h - x^2 - xh + 4x}{h(x+h-4)(x-4)}$
Finalmente, calculamos el límite reemplazando h por 0	
$f'(x) = -\frac{3}{x^2}$	$f'(x) = \frac{-4}{(x-4)^2}$

■ Tabla 8.

10. **Determina** la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la gráfica de la función $f: x \mapsto f(x) = x^2 + 2$ en el punto (1, 3). **Realiza** la representación gráfica de la función y de las rectas: tangente y normal.

11. **Determina** la ecuación de la recta tangente y la recta normal a la gráfica de la función $f: x \mapsto f(x) = x^3 - 4$ en el punto (2, 4). **Realiza** la representación gráfica de la función y de las rectas tangente y normal.

12. **Determina** la derivada de las funciones racionales utilizando la definición de la derivada por límites.

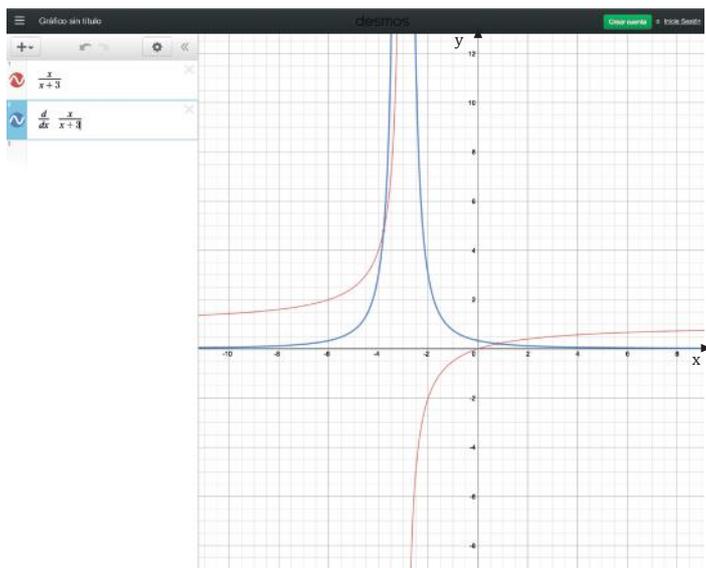
a. $f: x \mapsto f(x) = \frac{5x}{x+3}$

b. $f: x \mapsto f(x) = \frac{4}{x^2-1}$

c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x-3}{x+1}$

Actividades

5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



En la gráfica se aprecia $f(x) = \frac{x}{x+3}$ con asíntota vertical en $x = -3$ y su respectiva derivada, que resulta la función $f'(x) = \frac{3}{(x+3)^2}$ con asíntota horizontal $y = 0$.

13. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

a. $f: x \mapsto f(x) = \frac{4}{x-5}$

c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{5}{x^2-1}$

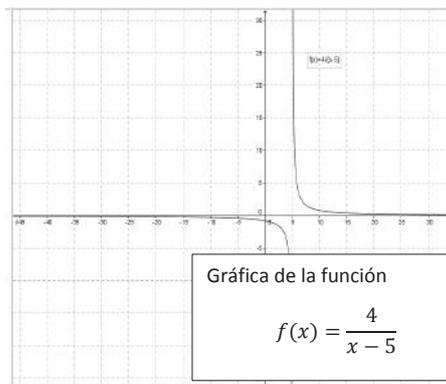
b. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$

Actividades

Solucionario

9. a

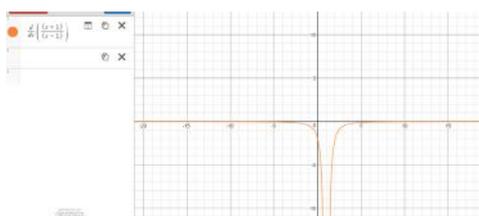
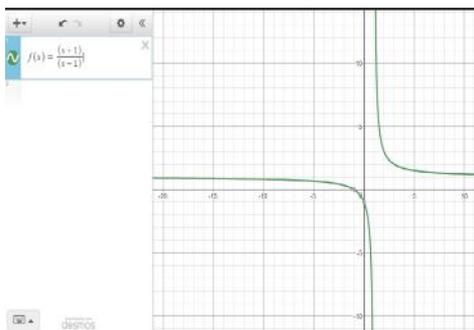


Gráfica de la función

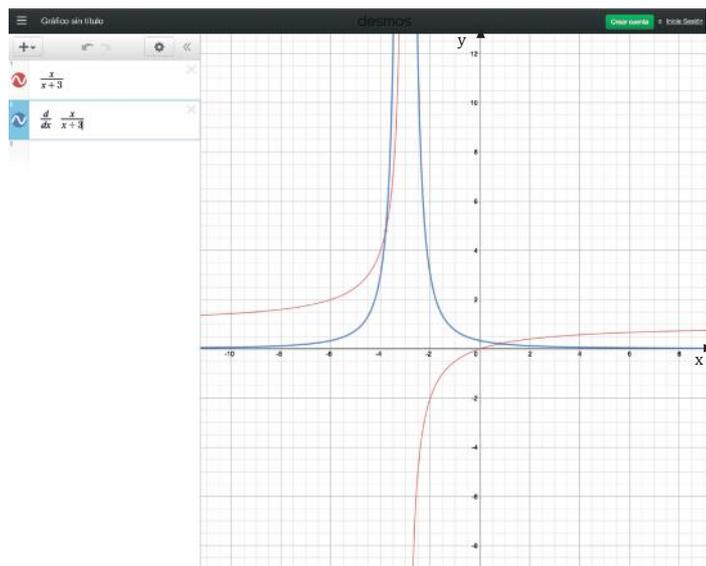
$$f(x) = \frac{4}{x-5}$$

Solucionario

b.



5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



En la gráfica se aprecia $f(x) = \frac{x}{x+3}$ con asíntota vertical en $x = -3$ y su respectiva derivada, que resulta la función $f'(x) = \frac{3}{(x+3)^2}$ con asíntota horizontal $y = 0$.

13. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

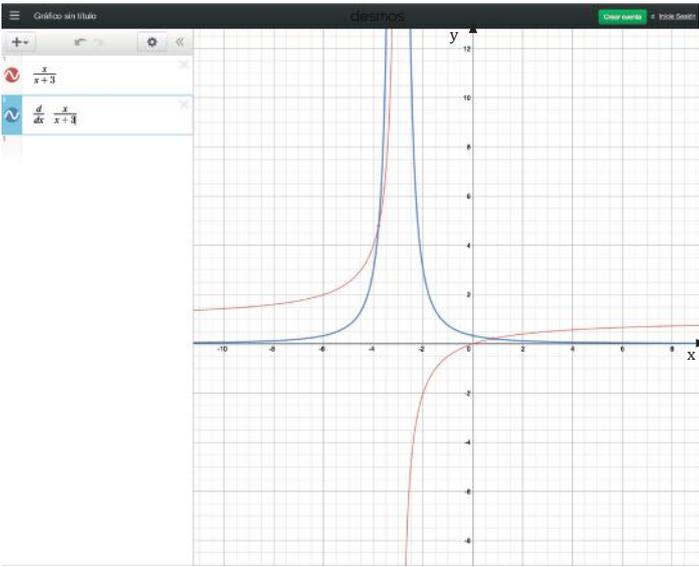
a. $f: x \mapsto f(x) = \frac{4}{x-5}$

c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{5}{x^2-1}$

b. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$

5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



En la gráfica se aprecia $f(x) = \frac{x}{x+3}$ con asíntota vertical en $x = -3$ y su respectiva derivada, que resulta la función $f'(x) = \frac{3}{(x+3)^2}$ con asíntota horizontal $y = 0$.

13. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

a. $f: x \mapsto f(x) = \frac{4}{x-5}$

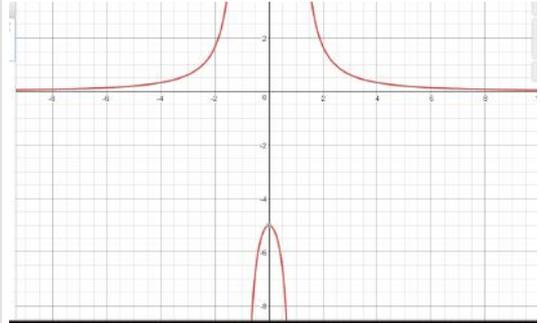
c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{5}{x^2-1}$

b. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

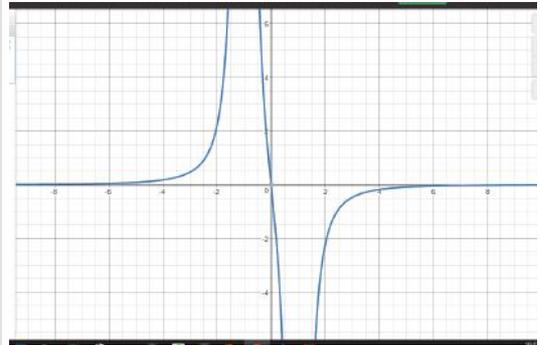
d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$

Actividades

Solucionario

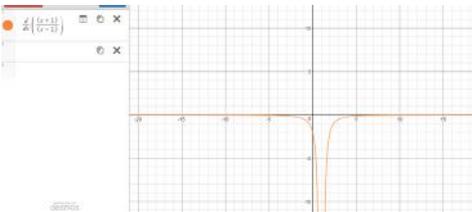
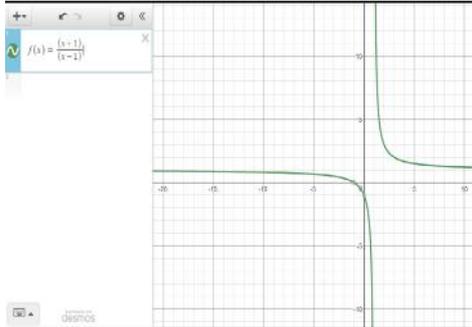


c.

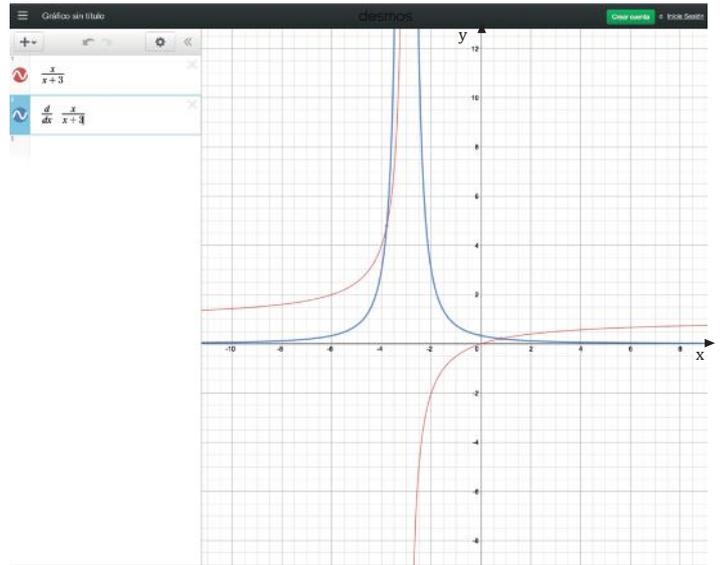


Solucionario

b.



5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



En la gráfica se aprecia $f(x) = \frac{x}{x+3}$ con asíntota vertical en $x = -3$ y su respectiva derivada, que resulta la función $f'(x) = \frac{3}{(x+3)^2}$ con asíntota horizontal $y = 0$.

13. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

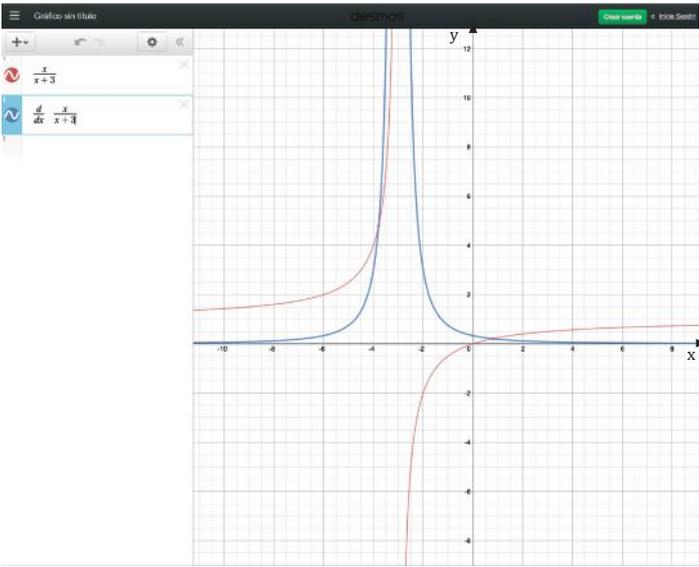
a. $f: x \mapsto f(x) = \frac{4}{x-5}$

c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{5}{x^2-1}$

b. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$

5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



En la gráfica se aprecia $f(x) = \frac{x}{x+3}$ con asíntota vertical en $x = -3$ y su respectiva derivada, que resulta la función $f'(x) = \frac{3}{(x+3)^2}$ con asíntota horizontal $y = 0$.

13. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

a. $f: x \mapsto f(x) = \frac{4}{x-5}$

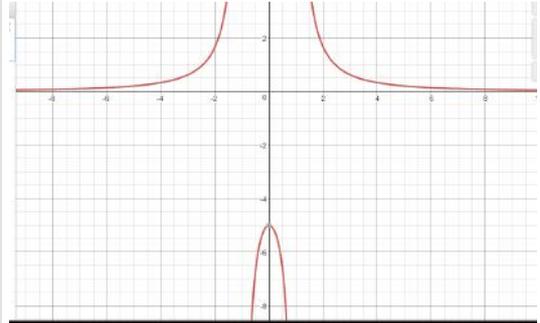
c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{5}{x^2-1}$

b. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

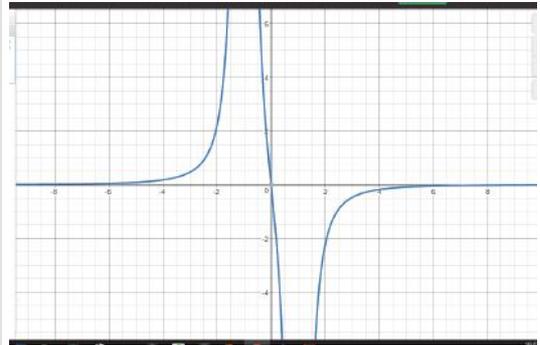
d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$

Actividades

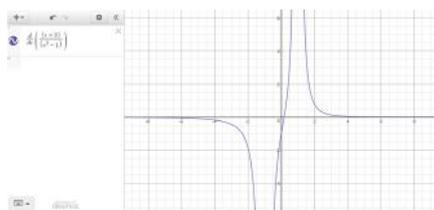
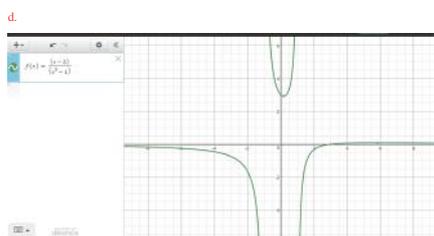
Solucionario



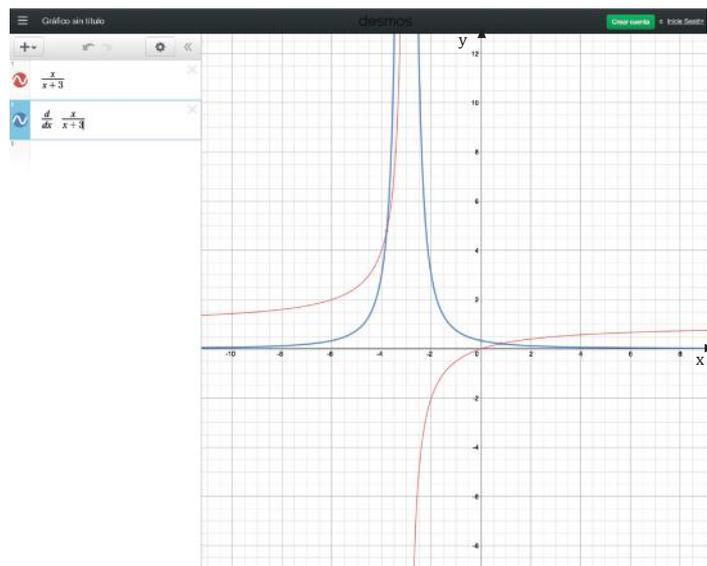
c.



Solucionario



5. En la pantalla se visualizará el siguiente resultado:



En la gráfica se aprecia $f(x) = \frac{x}{x+3}$ con asíntota vertical en $x = -3$ y su respectiva derivada, que resulta la función $f'(x) = \frac{3}{(x+3)^2}$ con asíntota horizontal $y = 0$.

13. Utilizando el graficador Desmos, **determina** las representaciones gráficas de la función con su respectiva derivada.

a. $f: x \mapsto f(x) = \frac{4}{x-5}$

c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{5}{x^2-1}$

b. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}$

Actividades

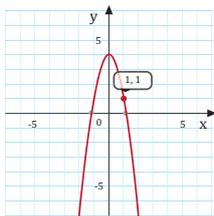


Ejercicios y problemas

1 Límites

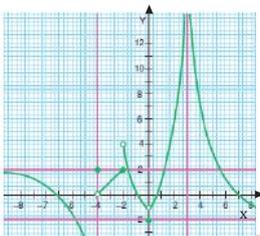
1. **Determina** el $\lim_{x \rightarrow 1} (-3x^2 + 4)$; analiza la tabla de valores aproximada y la representación gráfica.

x	...	0,98	0,99	1,01	1,02	1,03	...
f(x)
(x, f(x))							



2 Cociente incremental

2. Un cuerpo se mueve según la ecuación $y = 17t^2$, si la distancia se mide en metros, **determina** la velocidad media considerando los 3 primeros segundos de caída.
3. Una partícula cae según la ecuación $y = 28t^2 + 3$, si la distancia se mide en metros. **Halla** la velocidad media considerando los dos primeros segundos de movimiento.
4. Considera la gráfica de la función f .



- **Halla** los siguientes límites:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

- **Indica** en qué puntos f no es continua.

3 Derivadas (límites)

5. **Determina** la derivada de las funciones utilizando la definición por límites.
- $f: x \mapsto f(x) = -5x + 2$
 - $f: x \mapsto f(x) = 2x^2 + x$
 - $f: x \mapsto f(x) = 10x^3$
 - $f: x \mapsto f(x) = x^3 \cdot x + 2$
 - $f: x \mapsto f(x) = x^3 - 4 + x^2$
 - $f: x \mapsto f(x) = \frac{x}{x+2}$
 - $f: x \mapsto f(x) = x^2 - 2x$
6. **Calcula**, a partir de la definición, la derivada de la función constante y **comprueba** que es la función cero.
7. **Calcula**, a partir de la definición, la derivada de la función $f: x \mapsto f(x) = x^n$ para $n = 1, 2$ y 3 , y **comprueba** que se verifica $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Prohibida su reproducción

Solucionario

1. Como podemos observar, en el gráfico en el punto (1,1) existe una discontinuidad.

$$\lim_{x \rightarrow 1} -3x^2 + 4 = 1$$

3. Velocidad media = 84 m/s

5. a. -5 ; b. $4x + 1$; c. $30x^2$

- d. $3x^2 - 1$; e. $3x^2 + 2x$

f. $\frac{-x^2 - x + 2}{(x+2)^2}$; g. $2x - 2$

Solucionario

a. $f'(x) = 12x^3 + 18x - 4$

b. $f'(x) = -30x^2 - 4$

c. $f'(x) = -30x^2 - 4$

d. $f'(x) = -30x^2 - 4$

e. $\frac{1}{2}x^{-1/2} + x^{-1/2} - \frac{1}{3}x^{-2/3}$

11.

a. $f'(x) = 12x^3 - 15x^2 - 24x$

b. $f'(x) = \frac{4}{x} - 1$

c. $f'(x) = -4 \operatorname{sen} x - \ln x - 1$

d. $f'(x) = 8x + 12$

e. $f'(x) = -\operatorname{sen} x e^{\cos x}$

f. $f'(x) = \frac{2}{x}$

15.

a. $f'(x) = 8x + 12$

b. $g'(x) = 5 \cos 5x$

c. $h'(x) = -e^{\cos x} \operatorname{sen} x$

d. $i'(x) = \frac{2x}{\operatorname{sen} x^2} \cos x^2$

e. $j'(x) = -6x^2 \cos x^3 \operatorname{sen} x^3$

f. $k'(x) = \frac{1}{2} \cos x (\operatorname{sen} x)^{-1/2}$

8. **Calcula** la derivada de las siguientes funciones:

a. $f: x \mapsto f(x) = 8x^9$

b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

d. $f: x \mapsto f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 7x + 10$

e. $f: x \mapsto f(x) = \cos x \cdot e^x$

f. $f: x \mapsto f(x) = 4x^2 \cdot \ln x$

g. $f: x \mapsto f(x) = (5x^6 - 3x^2) \cdot (7x^4 - 3x^2)$

h. $f: x \mapsto f(x) = \frac{2x^3 + 7x^2 - 8x + 9}{\cos x}$

i. $f: x \mapsto f(x) = \frac{4x \cdot \operatorname{sen} x}{3 - 4e^x}$

a. $f: x \mapsto f(x) = 3x^4 - 5x^3 - 12x^2$

b. $f: x \mapsto f(x) = 4 \ln x - x$

c. $f: x \mapsto f(x) = 4 \cos(x) \cdot x \cdot \ln x$

d. $f: x \mapsto f(x) = (2x + 3)^2$

e. $f: x \mapsto f(x) = e^{\operatorname{sen}(x)}$

f. $f: x \mapsto f(x) = \ln 3x^2$

12. **Averigua** si es cierta la afirmación siguiente:

$$f(x) = \frac{k}{g(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{k \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

13. **Demuestra** que la derivada de $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ es:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

4 Derivadas (reglas)

9. **Deriva** las funciones utilizando las reglas de derivación.

a. $f: x \mapsto f(x) = 3x^4 - 4x + 9x^2$

b. $f: x \mapsto f(x) = 3 - 10x^3 - 4x$

c. $f: x \mapsto f(x) = 3 - 10x^3 - 4x$

d. $f: x \mapsto f(x) = 3 - 10x^3 - 4x$

e. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4x} - \sqrt[3]{x} + 15$

10. **Aplica** la regla de la cadena para derivar las siguientes funciones:

a. $f: x \mapsto f(x) = (2x^4 - 3x^2 - 7x + 3)^3$

b. $f: x \mapsto f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 5)$

c. $f: x \mapsto f(x) = \ln(\operatorname{sen} x)$

d. $f: x \mapsto f(x) = \cos^2(x^2 + 2x^2)$

11. **Calcula** la derivada de las funciones siguientes e **indica** en qué casos has aplicado la regla de la cadena:

14. **Calcula** la derivada de las funciones siguientes:

a. $f: x \mapsto f(x) = 3x^4 + 5x^3 - 12x^2 + 3x + 4$

b. $f: x \mapsto f(x) = 4 \ln x - x$

c. $f: x \mapsto f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen}(x)$

d. $f: x \mapsto f(x) = 4 \cos(x) \cdot x \cdot \ln x$

e. $f: x \mapsto f(x) = x \cdot \frac{\ln x}{x}$

15. **Aplica** la regla de la cadena para calcular la derivada de las siguientes funciones:

a. $f: x \mapsto f(x) = (2x + 3)^2$

b. $g: x \mapsto g(x) = \operatorname{sen}(5x)$

c. $h: x \mapsto h(x) = e^{\cos(x)}$

d. $i: x \mapsto i(x) = \ln(\operatorname{sen}(x)^2)$

e. $j: x \mapsto j(x) = \cos^2(x^2)$

f. $k: x \mapsto k(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x)}$

Prohibida su reproducción.

16. **Calcula** la función derivada de cada una de las funciones siguientes:
- $f: x \mapsto f(x) = \operatorname{tg}(3x)$
 - $f: x \mapsto f(x) = e^{2x} \cdot \operatorname{sen}(3x)$
17. Dada la función $f(x) = x^2 - 7x + 1$, **averigua** el valor de la derivada en los puntos de abscisa $x = -2$, $x = 2$ y $x = 10$.

5 Derivadas sucesivas

18. **Determina** $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$ en las siguientes funciones.
- $f: x \mapsto f(x) = -5x^3 - 4x^2 + 2$
 - $f: x \mapsto f(x) = \frac{2}{3}x^6 - \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}$
 - $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{4x} \cdot \sqrt{27x} + \sqrt{x} + 15$
 - $f: x \mapsto f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$

6 Rectas tangentes y normales

19. Considerando la ecuación $f(x) = -3x^3 + 4$ en el punto $(-1, 7)$, **determina**:
- La ecuación que permita encontrar la pendiente de la recta tangente.
 - La pendiente de la recta tangente en el punto dado.
 - La pendiente de la recta normal en el punto dado.
 - La ecuación de la recta tangente
 - La ecuación de la recta normal
 - La representación gráfica de la función y las rectas tangente y perpendicular al punto dado.
20. Considerando la ecuación $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ en el punto $(4, 2)$, **determina**.

- La ecuación que permita encontrar la pendiente de la recta tangente
- La pendiente de la recta tangente en el punto dado
- La pendiente de la recta normal en el punto dado
- La ecuación de la recta tangente
- La ecuación de la recta normal
- La representación gráfica de la función y las rectas tangente y perpendicular al punto dado

21. Dada la función $f: x \mapsto f(x) = \operatorname{sen}(x) \cdot \cos(x)$, **comprueba** que la función derivada se anula en el punto de abscisa:

$$x = \frac{\pi}{4}$$

- ¿Cómo será la tangente en dicho punto con respecto al eje de abscisas?

22. **Averigua** la ecuación de la recta tangente a la curva de la función $f: x \mapsto f(x) = x \cdot \ln x$ en el punto de abscisa $x = 1$.

23. **Calcula** la ecuación de la recta tangente a la gráfica de cada una de las siguientes funciones en los puntos indicados.

- $f: x \mapsto f(x) = x^3 + 2x + 10$, en el punto de abscisa $x = -2$.
- $f: x \mapsto f(x) = e^x$, en el punto de abscisa $x = 0$.
- $f: x \mapsto f(x) = \ln x$, en el punto en que la gráfica corta al eje de abscisas.

24. **Calcula** la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f: x \mapsto f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ en el punto de abscisa $x = 1$.

- ¿En qué punto la tangente es paralela al eje de abscisas?

Prohibida su reproducción

Solucionario

17. $-11; -3; 13$

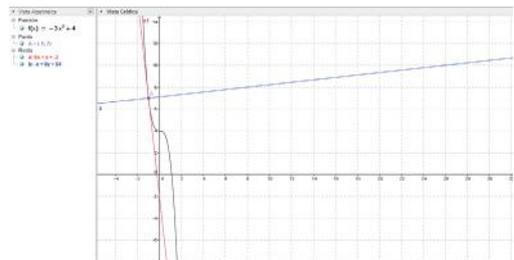
19. a. $f'(x) = -9x^2$

b. -9

c. $\frac{1}{9}$

d. $9x + y + 2 = 0$

e. $-x + 9y - 64 = 0$



21. $f'(x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

23. a. $14x - y + 28 = 0$

b. $x - y = 0$

c. $x = y$

Prohibida su reproducción

Solucionario

25. Al final

27. $m = -3$; $n = 1$; $p = 2$

29. $V = 19,6 \text{ m/s}$; $a = 9,8 \text{ m/s}^2$

31.

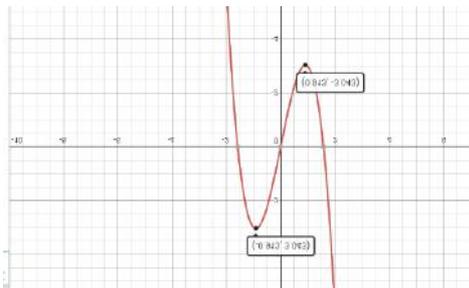
a. $f'(x) = 6x^2 - 5$

b. $x = \pm 0,91$

c. $y = \pm 3,04$

d. Máximo $(-0,91; 3,04)$

Mínimo $(0,91; -3,04)$



e)

35.

Límite = 1

x	...	-0,9	-0,99	-1,01	-1,04	...
f(x)	...	1,0744	1,0075	0,9925	0,9699	...

8 Máximos y mínimos

31. Dada la función $f: x \mapsto f(x) = 2x^3 - 5x$, determina.

- La derivada de la función
- Los valores críticos
- Los valores extremos
- El punto máximo y mínimo
- La gráfica de la función.

32. Dada la función $f: x \mapsto f(x) = 5x^4 - 10x^3$, determina.

- La derivada de la función
- Los valores críticos
- Los valores extremos
- Los puntos máximo y mínimo
- La gráfica de la función

25. El número de átomos de una muestra de material radioactivo se desintegra a medida que pasa el tiempo según la siguiente función:

$$N(t) = \frac{k}{e^t} \quad \begin{array}{l} N(t): \text{Número de átomos} \\ t: \text{Tiempo} \end{array}$$

-Razona cuándo se desintegra más rápidamente el material, ¿al inicio o al final del proceso?

26. Dada la función $f(x) = k \cdot \ln x$, donde k es una constante, halla el valor de esta sabiendo que la derivada de la función en el punto de abscisa $x = 1$ es igual a 3.

27. Averigua el valor de los coeficientes m , n y p de la función:

$$f(x) = x^3 + mx^2 + nx + p$$

sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(0, 2)$ y que $f'(2) = f'(0) = 1$.

7 Aplicaciones de la derivada

28. Desde un globo aerostático en reposo que está a una altura de 1300 m sobre el suelo, se lanza una piedra verticalmente hacia arriba que lleva velocidad inicial de $25 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Determina.

- La expresión de movimiento
- La expresión de la velocidad
- La velocidad para $t = 1$ s.
- La velocidad para $t = 2$ s.
- La aceleración para $t = 2$ s.

29. Un cuerpo en caída libre recorre $\frac{1}{2}pt^2$, donde la distancia se mide en m, el tiempo en segundos y p es la aceleración de la gravedad. Calcula la velocidad y la aceleración a los 2s.

30. Un móvil que viaja a $30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ aplica el freno de manera repentina. Si el movimiento realizado se modela según la ecuación: $y = 30t - t^2$, halla la distancia recorrida así como la aceleración que desarrolla el móvil hasta detenerse.

9 Más a fondo

33. Escribe dos situaciones en la que se pueda intuir la definición de límite.

34. Determina el $\lim_{x \rightarrow 3} 2x - 5$ completando la siguiente tabla de valores aproximada.

x	...	2,98	2,99	3,01	3,02	...
f(x)	...					
(x, f(x))	...					

35. Determina el $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5}{x - 3}$ completando la siguiente tabla de valores aproximada.

x	...	-0,9	-0,99	-1,01	-1,04	...
f(x)	...					
(x, f(x))	...					

36. Calcula el valor de los siguientes límites en forma numérica.

- $\lim_{x \rightarrow 2} x - 3$
- $\lim_{x \rightarrow 2} x + 2$

c. $\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}} x + \frac{2}{3}$

d. $\lim_{x \rightarrow 2} -3$

e. $\lim_{x \rightarrow 5} (m^2 - 10)$

f. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3}$

g. $\lim_{x \rightarrow 5} 2r^2$

h. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3}{x + 2}$

37. **Escribe** V si es verdadero o F si es falso, según corresponda

a. La expresión de la derivada por límites es ()

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

b. La derivada de la función $f(x) = 2x^n$ es $f'(x) = n2x^n$ ()

c. La notación de Euler para la derivada es $\frac{dy}{dx}$ ()

d. Si $f'(x) > 0$ entonces la función es creciente. ()

e. Si $f'(x) = 0$ entonces la función es decreciente. ()

f. La primera derivada en la función de desplazamiento representa físicamente la velocidad media. ()

g. Al calcular la segunda derivada en la función de desplazamiento determinamos la aceleración instantánea. ()

h. Los valores de la variable independiente que satisfacen la ecuación $f'(x) = 0$ se denominan valores críticos. ()

i. Para determinar los extremos relativos reemplazamos los valores críticos en $f'(x)$. ()

j. Al calcular la derivada de la función $f(x) = 2x^4 + 12$ resulta $8x^4$. ()

38. Cuando se deriva $f(x) = x^2 - 5$ utilizando la expresión de límites, resolviendo el producto notable y reduciendo términos semejantes, resulta la expresión:

a. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh - h^2 - 5}{h}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh - h^2}{h}$

c. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh - h^2}{h}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xh - h^2}{h}$

39. Cuando se deriva $f(x) = 2x^3$ utilizando la expresión de límites, resolviendo el producto notable y reduciendo términos semejantes, resulta la expresión:

a. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3xh - h^3 - 5}{h}$

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2h + 6xh^2 + 2h^3}{h}$

c. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^2h + 2xh^2 - 2h^3}{h}$

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 + 6x^2 + 3xh - h^2}{h}$

40. Al derivar $f(x) = \sqrt{x}$, resulta:

a. $f: x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}$

b. $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

c. $f: x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

d. $f: x \mapsto f(x) = 2\sqrt{x}$

Prohibida su reproducción

Solucionario

37.

a. V ; b. F ; c. F ; d. V ; e. F

f. F ; g. V ; h. V ; i. F ; j. F

39. b

Solucionario

1. c

2. b

3.

a. $f'(x) = 16x - 1$

b. $f'(x) = 16x(16x^2)^{-1/2} + 50x^3(25x^4)^{-1/2}$

c. $f'(x) = \frac{12}{5}x^{-3/5}$

d. $f'(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$

e. $f'(x) = \frac{1}{3x^{3/2}}$

4. a. F

b. V

c. V

d. V

e. F

f. F

g. V

h. F

Para finalizar

1 En $d: t \mapsto d(t) = 4t^2 + 8t - 2$, el valor de la aceleración instantánea es:

- a. $f(x) = -2$
- b. $f(x) = 10$
- c. $f(x) = 8$
- d. $f(x) = 0$

2 En $d(t) = 5t^2 + 10t - 12$, el valor de la aceleración instantánea cuando $t = 2s$ es:

- a. $f(x) = 20$ m/s
- b. $f(x) = 10$ m/s
- c. $f(x) = 15$ m/s
- d. $f(x) = 3$ m/s

3 Determina la derivada en las siguientes funciones utilizando las reglas de la derivación.

- a. $f: x \mapsto f(x) = 8x^2 + 15 - x$
- b. $f: x \mapsto f(x) = \sqrt{16x^2} + \sqrt{25x^4}$
- c. $f: x \mapsto f(x) = x^{\frac{2}{3}} + 5x^{\frac{2}{3}} - 12$
- d. $f: x \mapsto f(x) = \frac{x+3}{x+2}$
- e. $f: x \mapsto f(x) = \frac{2}{\sqrt{9x}}$

4 Escribe "V" inicial de Verdadero ó "F" inicial de Falso, según corresponda

- a. La primera derivada en la función de desplazamiento representa físicamente la velocidad media.
- b. Al calcular la segunda derivada en la función de desplazamiento se determina la aceleración instantánea
- c. Los valores de la variable independiente que satisfacen la ecuación $f'(x) = 0$ se denominan valores críticos.
- d. Para determinar los extremos relativos se reemplazan los valores críticos en $f'(x)$.
- e. Al calcular la derivada de la función $f(x) = 2x^4 + 12$ resulta $8x^4$.
- f. La derivada de la función $f(x) = 2x^n$ es $f'(x) = n2x^n$.
- g. Si $f'(x) > 0$ entonces la función es creciente.
- h. Si $f'(x) = 0$ entonces la función es decreciente.

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y autoevalúate en tu cuaderno:

Trabajo personal

¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?

¿He cumplido mis tareas?

¿Qué aprendí en esta unidad?

Trabajo en equipo

¿He compartido con mis compañeros y compañeras?

¿He respetado las opiniones de los demás?

• Escribe la opinión de tu familia.

• Pide a tu profesor sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

Solucionario

1. Responde verdadero (V) o falso (F).

- a. El $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 6x$ es -8 ()
- b. Un cuerpo cae libremente según la ecuación $y = 4t^2 - 3$, si la distancia se mueve en metros. La velocidad media considerando los cinco primeros minutos es 24. ()
- c. El valor de la derivada de $f(x) = 6x^3 - 3x^2 + 8x - 1$ es $f'(x) = 6x^2 - 6x + 8$ ()
- d. La derivada de $f(x) = \frac{5}{x^2}$ es $-\frac{10}{x^3}$ ()
- e. Si $f'(x) > 0$ entonces la función es decreciente. ()
- f. La expresión de la derivada por límites $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ()

2. Escoja la respuesta correcta

A) La derivada de $f(x) = (5x - 2)^2$ es:

- a. 5
- b. $5x - 2$
- c. 0
- d. $50x - 20$

B) El valor de la derivada de $g(x) = \text{Sen } 4x$ es:

- a. $4 \text{ Cos } 4x$
- b. $4 \text{ Cos } x$
- c. $\text{Cos } 4x$
- d. $4 \text{ Sen } x$

C) El valor de la derivada de $y = \ln x^2$ es :

- a. $\ln x$
- b. $\ln x^2$
- c. $\frac{2}{x}$

Solucionario

D) El punto crítico de la función $f(x) = x^3 - 9x$

- a. $x = \pm 6$
- b. $x = \pm 3$
- c. $x = \pm 27$
- d. $x = \pm\sqrt{3}$

3. **Resuelve** ejercicios de aprendizaje práctico.

a. **Encuentre** el límite de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$.

b. Aplicando la definición de límite **encuentra** la derivada de $f(x) = 2x^3$.

c. **Encuentra** la derivada de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 3}$

d. **Encuentra** el límite de $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{x + 3}$

e. Considerando la ecuación $f(x) = -2x^3 + 7$ en el punto $(-1, 5)$. **Determina**

- A) La ecuación que permita encontrar la pendiente de la recta tangente.
- B) La pendiente de la recta tangente en el punto dado.
- C) La pendiente de la recta normal en el punto dado.
- D) La ecuación de la recta tangente
- E) La ecuación de la recta normal.

Solucionario

1.

a. V

b. V

c. F

d. F

e. F f. V

2.

A) d

B) a

C) c

D) d

3.

a. 7

b. $6x^2$

c. $f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 4}{(x + 3)^2}$

d. 0

e.

A) $f'(x) = -6x^2$

B) $m = 6$

C) $m = -\frac{1}{6}$

D) $-6x + y - 11 = 0$

E) $x + 6y - 29 = 0$

Solucionario

Evaluación con adaptaciones

1. Responde verdadero (V) o falso (F).

a. El $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 6x$ es -8 ()

b. El valor de la derivada de $f(x) = 5x^3 - x^2$ es

$f'(x) = 15x^2 - 2x$ ()

c. La derivada de $f(x) = \frac{5}{x^2}$ es $-\frac{10}{x^3}$ ()

d. Si $f'(x) < 0$ entonces la función es decreciente. ()

e. La expresión de la derivada por límites $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ ()

2. **Escoge** la respuesta correcta.

A) La derivada de $f(x) = 5x - 2$ es:

a. 5

b. $5x - 2$

c. 0

d. $50x - 20$

B) El valor de la derivada de $g(x) = \text{Sen } x$ es:

a. $4 \text{ Cos } 4x$

b. $4 \text{ Cos } x$

c. $\text{Cos } x$

d. $4 \text{ Sen } x$

C) El valor de la derivada de $y = \ln x$ es :

a. $\ln x$

b. $\ln x^2$

c. $\frac{1}{x}$

d. x

Solucionario

d) El punto crítico de la función $f(x) = x^3 - 9x$.

a. $x = \pm 6$

b. $x = \pm 3$

c. $x = \pm 27$

d. $x = \pm\sqrt{3}$

3. **Resuelve** ejercicios de aprendizaje práctico.

a. **Encuentra** el límite de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-6}{x-5}$.

b. Aplicando la definición de límite o método directo encuentra la derivada de $f(x) = 2x^3$.

c. **Encuentra** la derivada de $f(x) = (x - 4)(x + 3)$.

d. Considerando la ecuación $f(x) = 2x^3 + 7$ en el punto $(1, 5)$. **Determina**

A) La ecuación que permita encontrar la pendiente de la recta tangente.

B) La pendiente de la recta tangente en el punto dado.

C) La pendiente de la recta normal en el punto dado.

D) La ecuación de la recta tangente.

E) La ecuación de la recta normal.

Solucionario

Solucionario de la evaluación con adaptaciones

1.

- a. V
- b. V
- c. F
- d. V
- e. V

2.

- A) a
- B) c
- C) c
- D) d

3.

a. $\frac{4}{3}$

b. $6x^2$

c. $x^2 + 4x - 4$

d.

A) $6x^2$

B) $m = 6$

C) $m = -\frac{1}{6}$

D) $-6x + y + 1 = 0$

E) $x + 6y - 31 = 0$

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

Aplicar el principio de incrementos, como introducción al tema de derivada de una función.

Debatir en clase los fenómenos de velocidad y aceleración, estudiados en física, para poner en contexto el tema de derivadas de una función.

Analizar una imagen de la noción geométrica de secante y tangente a una curva, evidenciando las características principales de estos conceptos.

Conceptualización

Diferenciar los conceptos entre incrementos grandes e infinitesimales en una función, por medio del concepto de límite de una función, numéricamente.

Comparar las relaciones entre derivada de una función.

Interpretar el significado de cociente incremental.

Reflexión

Reflexionar acerca de la importancia de estos modelos matemáticos en ciencias como física, química, economía, etc.

Identificar los métodos básicos de derivación de funciones elementales.

Aplicación

Atravez de un gráfico evidenciar con un ejemplos la utilidad de los temas tratados en esta unidad, en problemas físicos, químicos, etc.

Reconocer los elementos (variables) involucradas en los gráfico y sus respectivas ecuaciones.

Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.

Funciones

Límites:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Límites finitos y operaciones

— El límite, si existe, es único.

— Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L_1$ y $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L_2$:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot L_1$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L_1 \cdot L_2$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \Leftrightarrow L_2 \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)^{g(x)}] = (L_1)^{L_2}$, si $L_1 > 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} [g(f(x))] = g \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))$, si g es continua

Límites infinitos y operaciones

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = +\infty$	$\frac{k}{0} = \pm\infty$
$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$	$(\pm\infty) \cdot (\mp\infty) = -\infty$	$\frac{k}{\infty} = 0$
$(\pm\infty) \pm k = \pm\infty$	$\infty \cdot k = \pm\infty$ ($k \neq 0$)	$\frac{\infty}{k} = \pm\infty$

Indeterminaciones

$$\frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \cdot \infty; \frac{0}{0}; 1^\infty; 0^0; \infty^0$$

Asíntotas:

$x = x_0$ es una asíntota vertical de $f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$

$y = L$ es una asíntota horizontal de $f \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$

$y = ax + b$, $a \neq 0$ es una asíntota oblicua de $f \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ y } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b$$

Continuidad:

Una función f es **continua en** un punto x_0 si se verifica simultáneamente que existe $f(x_0)$, que existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y es finito y que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Tipos de discontinuidad

Evitable: $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, pero $\nexists f(x_0)$ o bien $L \neq f(x_0)$

Dentro de las no evitables:

- De salto finito: existen límites laterales pero son diferentes.
- De salto infinito: existen límites laterales pero al menos uno de ellos es infinito.
- Esencial: alguno de los límites laterales no existe.

Las funciones potenciales, polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son continuas en todo su dominio de definición.

Derivadas

La **derivada**, $f'(a)$, de la función f en $x = a$ es el límite, si existe:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ecuación de la **recta tangente** a la gráfica de f en $(a, f(a))$:

$$y - f(a) = f'(a) (x - a)$$

Función derivada y operaciones

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(k \cdot f)' = k \cdot f'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- $(g \circ f)' = g'(f) \cdot f'$ (regla de la cadena)

Regla de L'Hôpital

Sean f y g dos funciones con $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

si $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y además: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Esta regla también se aplica a indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Estudio de funciones

Crecimiento y concavidad:

- Si $f'(a) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente en $x = a$.
Si $f'(a) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente en $x = a$.
- Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ tiene un máximo relativo en $x = a$.
Si $f'(a) = 0$ y $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en $x = a$.
- Si $f''(a) > 0 \Rightarrow f$ es convexa en $x = a$.
Si $f''(a) < 0 \Rightarrow f$ es cóncava en $x = a$.
- Si $f''(a) = 0$ y $f'''(a) \neq 0 \Rightarrow f$ tiene un punto de inflexión en $x = a$.

En general:

Si $f^{(n)}(a) \neq 0$ y todas las derivadas anteriores son cero.	n impar	$f^{(n)}(a) > 0$	Crece
		$f^{(n)}(a) < 0$	Decrece
	n par	$f^{(n)}(a) > 0$	Máximo
		$f^{(n)}(a) < 0$	Mínimo
Si $f^{(n)}(a) \neq 0$ y, $\forall k > 1$ y $k < n$, $f^{(k)}(a) = 0$	n par	$f^{(n)}(a) > 0$	Cóncava
		$f^{(n)}(a) < 0$	Convexa
	n impar	$f^{(n)}(a) \neq 0$	Punto de inflexión

RECURSOS PARA FOMENTAR EL INGENIO EN EL AULA

Derivadas

Libro
 En un avión que vuela a una velocidad constante de 500 km/h, un pasajero se levanta y camina hacia el otro extremo del pasillo. El avión está volando a una velocidad constante de 500 km/h. ¿Cuál es la velocidad del pasajero respecto al suelo?
 a) 500 km/h
 b) 1000 km/h
 c) 0 km/h
 d) 50 km/h

EN CONTEXTO
 ¿Qué velocidad tiene el avión cuando el pasajero se levanta y camina hacia el otro extremo del pasillo? ¿Cuál es la velocidad del pasajero respecto al suelo? ¿Cuál es la velocidad del avión cuando el pasajero se levanta y camina hacia el otro extremo del pasillo?

4 Resumen

Producto escalar entre dos vectores
 El producto escalar entre dos vectores \vec{a} y \vec{b} se define como:
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$

Ángulo entre dos vectores
 El ángulo θ entre dos vectores \vec{a} y \vec{b} se define como:
 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$

Problema resuelto
 Calcula el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

Problema resuelto
 Calcula el producto escalar entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

Problemas resueltos

1. Calcula el producto escalar entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

2. Calcula el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

3. Calcula el producto escalar entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

4. Calcula el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

Problemas resueltos

1. Calcula el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

2. Calcula el producto escalar entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

3. Calcula el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

4. Calcula el producto escalar entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

Ejercicios y problemas

1. Producto escalar
 Calcula el producto escalar entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

2. Ángulo entre dos vectores
 Calcula el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

3. Producto escalar
 Calcula el producto escalar entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

4. Ángulo entre dos vectores
 Calcula el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

1. Producto escalar
 Calcula el producto escalar entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

2. Ángulo entre dos vectores
 Calcula el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

3. Producto escalar
 Calcula el producto escalar entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

4. Ángulo entre dos vectores
 Calcula el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

Para finalizar

1. Producto escalar
 Calcula el producto escalar entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

2. Ángulo entre dos vectores
 Calcula el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

3. Producto escalar
 Calcula el producto escalar entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

4. Ángulo entre dos vectores
 Calcula el ángulo entre los vectores $\vec{a} = (1, 2)$ y $\vec{b} = (3, 4)$.

ZONA

Enlén y la lealtad de la relatividad
 Los problemas de espacio y tiempo se parecen durante la relatividad, pero la física cuando se trata de relatividad.

El cuaternión
 Los cuaterniones son números complejos con tres partes imaginarias.

Los vectores y la animación
 Los vectores son herramientas útiles para la animación en gráficos por computadora.

El biliar y los vectores
 El biliar es un juego que puede ser modelado usando vectores para describir el movimiento de las bolas.

Prohibida su reproducción

UNIDAD 4



CONTENIDOS:

1. Vectores en \mathbb{R}^2	2.2. Ecuación de la recta en forma paramétrica
1.1. Producto escalar entre dos vectores	2.3. Ecuación de la recta en forma explícita
1.2. Propiedades del producto escalar	2.4. Ecuación de la recta en forma vectorial
1.3. Propiedades del producto vectorial	2.5. Transformación de la forma explícita a la forma paramétrica y vectorial
1.4. Vectores perpendiculares	2.6. Ecuación de una recta paralela a una recta conocida
1.5. Vectores paralelos	2.7. Ecuación de una recta perpendicular a una recta conocida
1.6. Uso de las TIC y los vectores	2.8. Cálculo de la distancia entre dos puntos con vectores
1.7. Norma de un vector	
1.8. Distancia entre dos puntos	
1.9. Ángulo entre dos vectores	
2. Resumen	
3. Problemas resueltos	
4. Ejercicios y problemas	
5. Para finalizar	
6. Zona WiFi	

Libro
 Como puedes ver en el siguiente fragmento del film, inspirado en el documental de Antonio Chua Sola, los vectores desempeñan un papel fundamental en la navegación aérea.
 «En vuelo en viento, si tuviésemos un avión desatado por el avión en lugar de rumbo, el viento desplazará la línea de la trayectoria y los aviones desatados sobre el rumbo de vuelo del viento momentáneo.
 El viento puede ser representado por un vector definido por la dirección y su velocidad. La dirección del viento es la dirección de la que viene el viento, no la que apunta al avión. De este modo, un viento de 200° significa que el viento que viene del sur y de intensidad 20 nudos.
 Para dibujar la ruta verdadera de un avión se utiliza el triángulo de velocidades. Para ello, se encuentra a continuación el dibujo de una recta que sea paralela al rumbo. A continuación, se traza sobre ella, partiendo del punto A, la velocidad verdadera del avión (VVA) en la dirección del viento (200°) con una velocidad de 200 y se unen los extremos de las dos rectas».

Web
 Ryan-Cook inventó en 1989 una cámara digital de mano que era más pequeña que la cámara de un teléfono móvil. En su lugar, utilizó un sensor de imagen CMOS, conocido como cámara de imagen de estado sólido, y su tecnología.

EN CONTEXTO
 ¿Por qué crees que se utiliza un vector para representar el viento? ¿Por qué usan los pilotos los vectores para calcular la ruta verdadera del avión?
 ¿Analiza en una foto aérea la trayectoria de un avión que se representa con vectores.
 Busca en Internet, como ejemplo, las fotografías de un avión que se representa con vectores.
 Busca en Internet, como ejemplo, las fotografías de un avión que se representa con vectores.
 Busca información en Internet sobre los vectores biológicos y las enfermedades transmitidas por vectores. ¿Qué relación tienen con el libro de Ryan-Cook? ¿Por qué crees que se utiliza el término vector para definirlos?

Ejes temáticos	Contenidos
	<ul style="list-style-type: none"> • Vector en \mathbb{R}^2.....página 130 • Producto escalar de un vector por sí mismo.....página 131 • Propiedades del producto escalar.....página 131 • Vectores Perpendiculares.....página 132 • Vectores Paralelos.....página 133 • El uso de las TIC y los vectores.....páginas 134-135 • Norma de un vector.....página 136 • Distancia entre dos puntos.....página 137 • Ángulo entre dos vectores.....páginas 138-139
Derivadas	<ul style="list-style-type: none"> • Ecuación cartesiana de la recta (Forma explícita)página 140 • Ecuación de la recta en la forma paramétrica.....página 141 • Ecuación de la recta en la forma vectorial.....página 142 • Transformación de la forma explícita a las formas paramétrica y vectorial.....página 143 • Transformación de la forma paramétrica a la forma explícita.....páginas 144-146 • Ecuación de una recta paralela a una recta conocida.....página 147 • Ecuación de una recta perpendicular a una recta conocida.....página 148 • Ecuación de una recta perpendicular a una recta conocida con vectores.....página 149 • Cálculo de la distancia entre dos puntos con vectores.....página 149 • Resumen.....página 150 • Problemas resueltos.....páginas 151-152 • Ejercicios y problemas.....páginas 153-156 • Para finalizar.....páginas 157-158 • Zona WiFi.....página 159

LOGO INSTITUCIONAL		NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN			AÑO LECTIVO	
Plan de unidad temática						
1. Datos informativos:						
Docente:	Nombre del docente que ingresa la información	Área/ asignatura:	Matemática Grado/Curso:	2° Bachillerato	Paralelo:	
N.º de unidad de planificación:	4	Título de unidad de planificación:	<p>FUNCIONES</p> <p>Objetivos específicos de la unidad de planificación:</p> <p>Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.</p> <p>Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.</p>			
PERÍODOS	24			SEMANA DE INICIO:		
2. Planificación						
			Destrezas con criterios de desempeño a ser desarrolladas:			
<ul style="list-style-type: none"> Graficar y analizar el dominio, el recorrido, la monotonicidad, los extremos y paridad de las diferentes funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con $n = -1, -2$, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín) utilizando TIC. Realizar la composición de funciones reales analizando las características de la función resultante (dominio, recorrido, monotonicidad, máximos, mínimos, paridad). Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas con el empleo de la modelización con funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con $n = -1, -2$, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín), identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos. Reconocer funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas para calcular la función inversa (de funciones biyectivas) comparando con la composición de funciones. Resolver y plantear aplicaciones de la composición de funciones reales en problemas reales o hipotéticos. Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales aplicando propiedades de los números reales. Resolver ecuaciones que se pueden reducir a ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolver (con o sin el uso de la tecnología) problemas o situaciones reales o hipotéticas que pueden ser modelizados con funciones cuadráticas identificando las variables significativas presentes y las relaciones entre ellas; juzgar la pertinencia y validez de los resultados obtenidos. Identificar sucesiones numéricas reales, sucesiones monótonas y sucesiones definidas por recurrencia a partir de las fórmulas que las definen. Reconocer y calcular uno o varios parámetros de una progresión (aritmética o geométrica) conociendo otros parámetros. 						
			Criterios de evaluación			
<p>CE.M.5.3. Opera y emplea funciones reales: lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.</p>						

<ul style="list-style-type: none"> • Aplicar los conocimientos sobre progresiones aritméticas, progresiones geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas para resolver aplicaciones en general y de manera especial en el ámbito financiero de las sucesiones numéricas reales. • Resolver ejercicios numéricos y problemas con la aplicación de las progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas. • Reconocer las aplicaciones de las sucesiones numéricas reales en el ámbito financiero y resolver problemas, juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema. • Emplear progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas en el planteamiento y resolución de problemas de diferentes ámbitos. • Realizar las operaciones de suma y multiplicación entre sucesiones numéricas reales y la multiplicación de escalares por sucesiones numéricas reales aplicando las propiedades de los números reales. • Identificar sucesiones convergentes y calcular el límite de la sucesión. 	<p>CE.M.5.6. Emplea vectores geométricos en el plano y operaciones en \mathbb{R}, con aplicaciones en física y en la ecuación de la rmeda todos gráficos, analíticos y tecnológicos.</p>
<p>Actividades de aprendizaje</p> <p>Debatir la necesidad que tienen los seres humanos en ubicarse en una ciudad usando mapas que tienen cuadrículas de referencia. También usamos para orientarnos dispositivos con sistemas de GPS (sistema de posicionamiento global), este sistema funciona triangulando posiciones entre satélites. Diferenciar los conceptos de magnitud escalar y magnitud vectorial. Comparar las operaciones en el espacio bidimensional como el producto escalar. Usar un sistema de referencia bidimensional para ubicar una partícula en el plano. Describir trayectorias rectilíneas, usando ecuaciones lineales paramétricas. Reflexionar acerca de la importancia de estos conocimientos en las apps actuales como TIC que usan para su funcionamiento el sistema GPS Usar el producto escalar y las diferentes formas de expresar las ecuaciones lineales en la resolución de problemas físicos, como los planteados en el texto</p>	<p>Técnicas e instrumentos de evaluación</p> <p>Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para el manejo de vectores en el plano y sus características, graficación, norma, Operaciones con vectores algebraicas, en forma gráfica y en Forma analítica, así como para la resolución de problemas de aplicación. El estudiante debe ser capaz de calcular el producto de un número por un vector, el producto Escalar entre vectores, la ortogonalidad, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores; determinar la posición relativa de dos rectas; describir la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola (tanto en su forma cartesiana como en su forma paramétrica), y, en general, resolver aplicaciones geométricas de vectores en \mathbb{R}.</p>
<p>Elementos del perfil de salida</p>	
<p>I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para Resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.</p> <p>I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos.</p>	
<p>Docente:</p> <p>Firma:</p> <p>Fecha:</p>	<p>Elaborado</p> <p>Revisado</p> <p>Director del área:</p> <p>Firma:</p> <p>Fecha:</p>
	<p>Aprobado</p>
	<p>Vicorrector:</p> <p>Firma:</p> <p>Fecha:</p>

Criterio de evaluación

- Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.
- Reconoce patrones presentes en sucesiones numéricas reales, monótonas y definidas por recurrencia; identifica las progresiones aritméticas y geométricas; y, mediante sus propiedades y fórmulas, resuelve problemas reales de matemática financiera e hipotética.

Indicadores para la evaluación del criterio

- Grafica funciones reales y analiza su dominio, recorrido, monotonía, ceros, extremos, paridad; identifica las funciones afines, potencia, raíz cuadrada, valor absoluto; reconoce si una función es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva; realiza operaciones con funciones aplicando las propiedades de los números reales en problemas reales e hipotéticos.

Identifica las sucesiones según sus características y halla los parámetros desconocidos; aplica progresiones en aplicaciones cotidianas y analiza el sistema financiero local, apreciando la importancia de estos conocimientos para la toma de decisiones asertivas.

Objetivos del área por subnivel

- O.M.5.4. Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentando la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Procedemos con respeto y responsabilidad con nosotros y con las demás personas, con la naturaleza y con el mundo de las ideas. Cumplimos nuestras obligaciones y exigimos la observación de nuestros derechos.

Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.

SOLUCIONARIO

Básicos imprescindibles

Básicos deseables

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
Álgebra	Identificar la intersección gráfica de dos rectas como solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
	Resolver analíticamente sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas utilizando diferentes métodos (igualación, sustitución, eliminación).
	Graficar y analizar el dominio, el recorrido, la monotonía, ceros, extremos y paridad de las diferentes funciones reales (función afín a trozos, función potencia entera negativa con $n = -1, -2$, función raíz cuadrada, función valor absoluto de la función afín) utilizando TIC.
	Reconocer funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas para calcular la función inversa (de funciones biyectivas) comprobando con la composición de funciones.
	Realizar las operaciones de adición y producto entre funciones reales, y el producto de números reales por funciones reales, aplicando propiedades de los números reales.
	Identificar sucesiones numéricas reales, sucesiones monótonas y sucesiones definidas por recurrencia a partir de las fórmulas que las definen.
	Reconocer y calcular uno o varios parámetros de una progresión (aritmética o geométrica) conocidos otros parámetros
	Aplicar los conocimientos sobre progresiones aritméticas, progresiones geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas para resolver aplicaciones, en general y de manera especial en el ámbito financiero, de las sucesiones numéricas reales
	Resolver ejercicios numéricos y problemas con la aplicación de las progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas
	Emplear progresiones aritméticas, geométricas y sumas parciales finitas de sucesiones numéricas en el planteamiento y resolución de problemas de diferentes ámbitos.
	Realizar la composición de funciones reales analizando las características de la función resultante (dominio, recorrido, monotonía, máximos, mínimos, paridad)
	Resolver y plantear aplicaciones de la composición de funciones reales en problemas reales o hipotéticos.
	Reconocer las aplicaciones de las sucesiones numéricas reales en el ámbito financiero y resolver problemas, juzgar la validez de las soluciones obtenidas dentro del contexto del problema.
	Realizar las operaciones de suma y multiplicación entre sucesiones numéricas reales y la multiplicación de escalares por sucesiones numéricas reales aplicando las propiedades de los números reales.
Identificar sucesiones convergentes y calcular el límite de la sucesión.	

Solucionario

Página 130 del texto del estudiante

- 2.- a) 29 b) -21 c) 13 d) 82 e) 13
 f) 10 g) 20 h) 8

Página 131 del texto del estudiante

- 1.- a) 7.07 b) 7.07 c) 15,81

d) $(2i+j) \cdot (3i+j+i+2j) = (2i+j) \cdot (3i+j) + (2i+j) \cdot (i+2j)$
 $(2i+j) \cdot (4i+3j) = 6+1+2+2$
 $8+3=11$
 $11=11$

Página 132 del texto del estudiante

- 2.- a
 3.- b

Página 133 del texto del estudiante

- 4.- c
 5.- $(10m; 240^\circ)$
 6.- $(-4i+2,5j)$

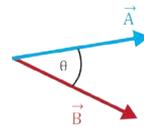
Página 130

I. VECTORES EN \mathbb{R}^2

1.1. Producto escalar entre dos vectores

El producto escalar o también conocido como producto punto, entre dos vectores, es un número real que se obtiene al multiplicar los módulos de los vectores considerados entre sí, por el coseno del ángulo formado entre estos vectores.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cos \theta$$



Vectores \vec{A} y \vec{B} con el ángulo de separación entre ellos.

Fig. 1.

El producto punto toma su nombre debido a su representación «un punto» entre los vectores relacionados en la operación.

Ejemplo 1

Determinemos el producto escalar con los vectores

$$\vec{A} = (4\vec{i} + 4\vec{j}) \text{ y } \vec{B} = (-3\vec{i} + \vec{j})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (4\vec{i} \cdot -3\vec{i}) + (4\vec{i} \cdot \vec{j}) + (4\vec{j} \cdot -3\vec{i}) + (4\vec{j} \cdot \vec{j})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-12) + (4\vec{i} \cdot \vec{j}) + (4\vec{j} \cdot -3\vec{i}) + (4)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-12 + 4)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = -8$$

Observaciones:

El producto escalar de los vectores unitarios rectangulares es:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 0 \text{ o viceversa } \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \text{ o viceversa } \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$$

Y TAMBIÉN:

Vectores base

Al expresar un vector en coordenadas de vectores base, se designa las letras, i para la componente del vector en x , j para la componente del vector en y .

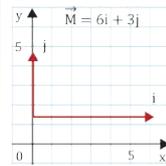


Fig. 2

Ejemplo 2

Determinemos el producto escalar entre:

$$\vec{A} = (-\vec{i} \cdot 9\vec{j}) \text{ y } \vec{B} = (-2\vec{i} \cdot 6\vec{j})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (-\vec{i} \cdot -2\vec{i}) + (-9\vec{j} \cdot -6\vec{j})$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (2) + (54)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 56$$

1. Determina el producto escalar solicitado siendo $\vec{A} = (-2\vec{i} + 3\vec{j})$, $\vec{B} = (-\vec{i} + 9\vec{j})$, $\vec{C} = (+3\vec{i} - 2\vec{j})$, $\vec{D} = (-2\vec{i} + 2\vec{j})$

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a. $\vec{A} \cdot \vec{B}$ | d. $\vec{B} \cdot \vec{B}$ |
| b. $\vec{B} \cdot \vec{C}$ | e. $\vec{C} \cdot \vec{C}$ |
| c. $\vec{A} \cdot \vec{A}$ | f. $\vec{A} \cdot \vec{D}$ |
| g. $\vec{B} \cdot \vec{D}$ | h. $\vec{D} \cdot \vec{D}$ |

Actividades

1.7. Norma de un vector

La norma de un vector se puede identificar como la distancia del punto final al origen; se encuentra calculando la raíz cuadrada de las variaciones de cada componente al cuadrado. Por consiguiente, la relación de la norma de un vector en \mathbb{R}^2 (dos dimensiones) será:

$$\text{Sean los vectores } \vec{v} = (vx, vy) ; \vec{u} = (ux, uy) \Rightarrow d(\vec{v} - \vec{u}) = \sqrt{(vx - ux)^2 + (vy - uy)^2}$$

Considerando que el origen es el punto $\vec{O} (0,0)$, la relación quedaría expresada por:

$$d(\vec{v} - \vec{u}) = d(\vec{v} - \vec{O}) = \sqrt{(vx - 0)^2 + (vy - 0)^2}$$

La Norma o magnitud de un vector se representa por $\|\cdot\|$

Ejemplo 6

Identifiquemos la norma o magnitud de los siguientes vectores: $\vec{A} = (6m; 35^\circ)$; $\vec{B} = (3i - 4j) m$; $\vec{C} = (7i + 2j)$; cuando su punto de origen es $\vec{D} (3; -4)$. En el vector $\vec{A} = (6m; 35^\circ)$ norma del vector es 6m, debido a que se expresa en coordenadas polares.

En el vector \vec{B} :

$$\begin{aligned} \vec{B} &= (3i - 4j) m \\ \|\vec{B}\| &= \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \\ \|\vec{B}\| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2} \\ \|\vec{B}\| &= \sqrt{9 + 16} \\ \|\vec{B}\| &= \sqrt{25} \\ \|\vec{B}\| &= 5m \end{aligned}$$

En el vector \vec{C} :

$$\begin{aligned} \vec{C} &= (7i + 2j); \text{ cuando su punto de origen es } \vec{D}(3; -4) \\ \text{Realizamos el cálculo punto final menos punto inicial.} \\ d(\vec{C} - \vec{D}) &= \sqrt{(Cx - Dx)^2 + (Cy - Dy)^2} \\ d(\vec{C} - \vec{D}) &= \sqrt{(7 - 3)^2 + (2 - (-4))^2} \\ d(\vec{C} - \vec{D}) &= \sqrt{(4)^2 + (6)^2} \\ d(\vec{C} - \vec{D}) &= \sqrt{16 + 36} \\ d(\vec{C} - \vec{D}) &= \sqrt{52} \end{aligned}$$

8. Encuentra la norma de los siguientes vectores:

a. $\vec{u} = (1, \sqrt{2})$, $\vec{v} = (-4, 3)$ y $\vec{w} = (8, -8)$

b. De \vec{AB} y \vec{AC} , siendo $A(6, 0)$, $B(3, 5)$, $C(-1, -1)$.

9. Las componentes de \vec{u} y \vec{v} en una base ortogonal son $\vec{u} = (2, -5, 4)$ y $\vec{v} = (-1, -3, 6)$.

Calcula:

a. $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b. $|\vec{u}|$ c. $|\vec{v}|$ d. $\cos(\widehat{u, v})$

10. Halla el valor de k para que $\vec{u} = (1, k, 2k)$ tenga módulo 9.

11. Las componentes de en una base ortogonal son $\vec{u} = (1, 2, 3)$ y $\vec{v} = (-2, 7, -1)$.

Calcula:

a. $|\vec{u} + \vec{v}|$ b. $|\vec{u} - \vec{v}|$ c. $|3\vec{u} - 2\vec{v}|$

12. Determina un vector unitario que sea paralelo a $\vec{v} = (2, 6, -3)$ y un vector unitario que sea perpendicular a $\vec{u} = (3, 2, -1)$.

13. Las componentes de \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} en una base ortogonal son $\vec{u} = (1, -1, 7)$, $\vec{v} = (-2, 0, 5)$ y $\vec{w} = (3, -3, 2)$. Halla:

a. $2\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$ c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{w})$
 b. $\vec{u} \cdot (\vec{w} - \vec{u})$ d. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})$

Actividades

Solucionario

Página 136 del texto del estudiante

1.- a) $|\vec{u}| = 1.73$

$|\vec{v}| = 5$

$|\vec{w}| = 11.31$

b) $|\vec{AB}| = 5,83$

$|\vec{AC}| = 7,07$

3.- a) 106

b) -31

c) 64

d) 22

Página 137 del texto del estudiante

3.- Distancia del punto B a la recta determinada por A y C= 1.41

Perímetro del triángulo= 9.98

Área del triángulo= 3,2

Página 139 del texto del estudiante

7.- Ángulo entre A y B= 51.53°

Ángulo entre C y D= 62.67°

Ángulo entre E y F= 44.08°

Solucionario

9.- a)

p	x=p+8	y=2p-11	(x,y)
-3	5	-17	(5,-17)
-2	6	-15	(6,-15)
-1	7	-13	(7,-13)
0	8	-11	(8,-11)
1	9	-9	(9,-9)
2	10	-7	(10,-7)
3	11	-5	(11,-5)

b) $y=2x-27$

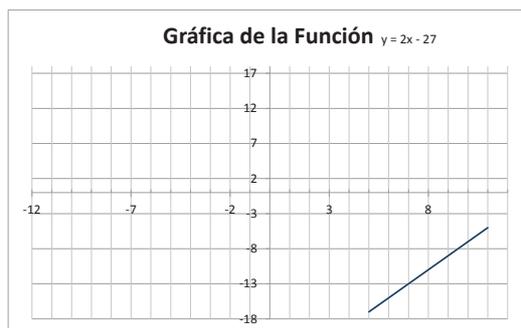
c)

9.- a)

p	x=p+8	y=2p-11	(x,y)
-3	5	-17	(5,-17)
-2	6	-15	(6,-15)
-1	7	-13	(7,-13)
0	8	-11	(8,-11)
1	9	-9	(9,-9)
2	10	-7	(10,-7)
3	11	-5	(11,-5)

b) $y=2x-27$

c)

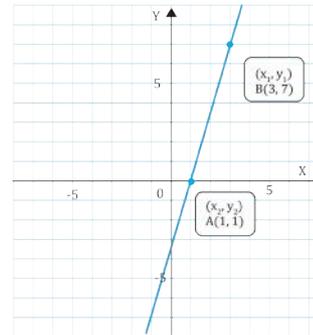


11.-

Forma explícita $y = -2,5x + 3,5$

Forma paramétrica $x = 3 - 2p$; $y = -4 + 5p$

2.3. Ecuación de la recta en la forma vectorial



La ecuación vectorial, expresa a una recta en vectores base, es decir, en sus componentes incluye los vectores directores (\vec{i}, \vec{j}) . Describe la recta según los elementos.

- Vector origen: Comprende entre el origen de coordenadas y el punto A (OA) .
- Parámetro: Se refiere a un valor numérico constante $(|p|)$.
- Vector de dirección: Se constituye por la variación entre el punto final menos el punto inicial (\vec{AB}) .

La ecuación vectorial de la recta, conocidos dos de sus puntos, es:

$$(\vec{OX}) = \vec{OA} + p(\vec{AB})$$

Fig. 14.

Ejemplo 12

Sean los puntos A $(1, 1)$ y B $(3, 7)$. Determinemos la ecuación de la recta en forma vectorial.

Primero: Determinamos el vector origen, mediante la diferencia de coordenadas:

$$\vec{OA} = \vec{A} - \vec{O}; \vec{OA} = (\vec{i} + \vec{j}) - (0\vec{i} + 0\vec{j}); \vec{OA} = (\vec{i} + \vec{j})$$

Segundo: Determinamos el vector dirección mediante la diferencia de coordenadas:

$$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}; \vec{AB} = (3\vec{i} + 7\vec{j}) - (\vec{i} + \vec{j}); \vec{AB} = (2\vec{i} + 6\vec{j})$$

Tercero: Reemplazamos los elementos en la ecuación vectorial, por lo tanto:

$$\left. \begin{aligned} (\vec{OX}) &= \vec{OA} + p(\vec{AB}) \\ (\vec{OX}) &= (\vec{i} + \vec{j}) + p(2\vec{i} + 6\vec{j}) \end{aligned} \right\}$$

17. Dados los puntos A $(3, 2)$ y B $(-1, -3)$, determina la ecuación de la recta en forma explícita.

18. Dada la ecuación que se expresa mediante:

$x = p + 8$; $y = 2p - 11$, donde p es un número real, determina:

- Los puntos determinados por: $\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3.
- La relación algebraica entre x e y.
- La gráfica de la función.

Actividades

2.6. Ecuación de una recta perpendicular a una recta conocida

Dos rectas perpendiculares forman, en su punto de intersección, un ángulo recto; las pendientes presentan la relación $m_1 \cdot m_2 = -1$.

Ejemplo 18

Determinemos la ecuación de la recta perpendicular a la recta $y = 2x + 1$, que pase por el punto $(1, 3)$

Análisis:

Los datos según el ejercicio son: $m_1 = 2$, $b = 1$ y el punto $(1, 3)$, donde $x_1 = 1$ y $y_1 = 3$.

Además, al ser rectas perpendiculares, la pendiente de la segunda recta debe cambiar el signo e invertir los elementos de la pendiente. Así entonces, si $m_1 = \frac{2}{1}$ entonces $m_2 = -\frac{1}{2}$

Solución:

En la expresión: $y - y_1 = m(x - x_1)$, reemplazamos los datos y resolvemos:

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \text{Reemplazamos}$$

$$2y - 6 = -x + 1 \quad \text{Multiplicamos por 2}$$

$$y = \frac{-x + 7}{2} \quad \text{Ecuación en la forma explícita}$$

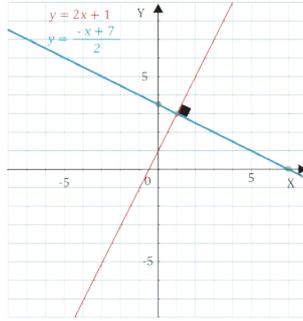


Fig. 16.

22. **Determina** la ecuación de la recta paralela a la recta $y = -2x + 5$, que pase por el punto $(1, 2)$ en la forma explícita y vectorial. **Dibuja** la gráfica con las dos rectas.

23. **Determina** la ecuación de la recta paralela a la recta $y = 4x - 2$, que pase por el punto $(2, 3)$ en la forma explícita y vectorial. **Dibuja** la gráfica con las dos rectas.

24. **Determina** la ecuación de la recta que pase por el punto $(1, 3)$ y que sea perpendicular a la recta $y = -3x - 1$. **Dibuja** la gráfica con las dos rectas.

25. **Determina** la ecuación de la recta que pase por el punto $(-2, 0)$ y que sea perpendicular a la recta $y = -5x + 3$. **Dibuja** la gráfica con las dos rectas.

Actividades

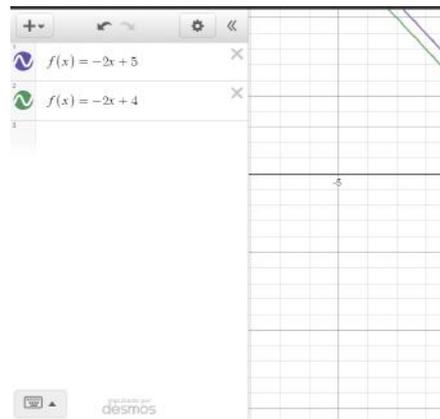
Prohibida su reproducción

Solucionario

13.-

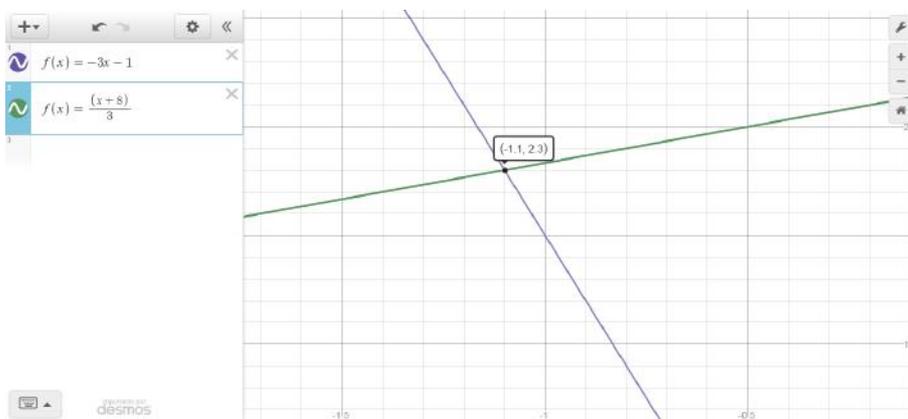
Forma explícita $y = -2x + 4$

Forma vectorial $\rightarrow 4j + p(i - 2j)$



15.-

$$Y = \frac{x}{3} + \frac{8}{3}$$



Prohibida su reproducción

Solucionario

Página 149 del texto del estudiante

3.- Distancia del punto B a la recta determinada por A y C= 1.41

Perímetro del triángulo= 9.98

Área del triángulo= 3,2

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

Página 153 del texto del estudiante

1.- a) -32

b) 10

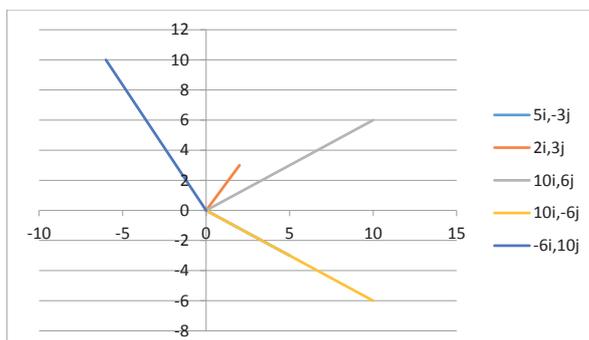
c) -68

d) -128i + 96j

3.- El ángulo formado por los dos vectores debe ser 90°

5.- El vector 10i, 5j es perpendicular al vector -2i, 4j

7.- El vector 5i, -3j es perpendicular al vector 10i, -6j



2.7. Ecuación de una recta perpendicular a una recta conocida con vectores

Cuando se presenta una recta en su forma vectorial, se consideran los aspectos que ilustramos en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 19

Determinemos la ecuación de la recta perpendicular a $\vec{OX} = (i - 2j) + p(-3i + 4j)$, que pase por el punto (2, 5).

Análisis

Los datos según el ejercicio son: vector de dirección $(-3i + 4j)$, donde la componente de y (j) se intercambia con la componente de x (i) y viceversa para la componente x , con la particularidad de cambiar el signo de la componente. El vector de origen, coincide con el punto de coordenadas rectangulares (2, 5).

Solución:

La ecuación de la recta paralela a la recta conocida, en la forma vectorial será:
 $\vec{OX} = (2i + 5j) + p(4i + 3j)$

2.8. Cálculo de la distancia entre dos puntos con vectores

Para determinar la distancia entre dos puntos con vectores, calculamos el vector \vec{AB} , restando las coordenadas de los vectores B y A, mediante la expresión:

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= \vec{OB} - \vec{OA} \\ \vec{AB} &= (8i + 5j) - (i + 4j) \\ \vec{AB} &= 8i - i + 5j - 4j \\ \vec{AB} &= 7i + j \end{aligned}$$

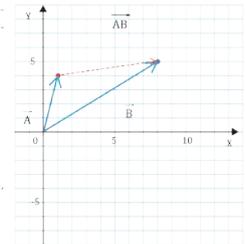


Fig. 17.

Luego, calculamos la norma del vector que resulta, aplicando la expresión:

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(7)^2 + (1)^2}$$

$d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \sqrt{50} \approx 7,07$ por ende, la distancia es de 7,07 unidades.

26. **Calcula** la distancia de los puntos $A = (2, 3, -1)$ y $B = (1, 4, 0)$ a la recta $r: (x, y, z) = (1, 3, -2) + k(1, 0, 1)$.

27. Sea el triángulo determinado por los puntos $A = (1, 4, -1)$, $B = (0, 0, 1)$ y $C = (1, 3, 1)$. **Halla** la distancia del punto B a la recta determinada por A y C. A continuación, **calcula** el perímetro y el área de este triángulo.

Actividades



Ejercicios y problemas

1 Producto escalar

1. Dados los vectores: $\vec{A} = (-8\vec{i} + 12\vec{j})$
 $\vec{C} = (4\vec{i} - 3\vec{j})$ y $\vec{B} = (\vec{i} - 2\vec{j})$

Determina.

- a. $\vec{A} \cdot \vec{B}$
- b. $\vec{C} \cdot \vec{B}$
- c. $\vec{A} \cdot \vec{C}$
- d. $\vec{A} \cdot \vec{B} \cdot \vec{C}$

2. Dados los vectores: $\vec{A} = (-5, 0)$; $\vec{N} = (0, 3)$ y $\vec{M} = (-1, -2)$

Determina.

- a. $\vec{A} \cdot \vec{N}$
- b. $\vec{A} \cdot \vec{M}$
- c. $\vec{M} \cdot \vec{N}$
- d. $\vec{A} \cdot \vec{M} \cdot \vec{N}$
- e. $\vec{A} \cdot \vec{A}$
- f. $\vec{M} \cdot \vec{N} \cdot \vec{N}$

3. ¿Cómo verifico si dos vectores son perpendiculares?

4. ¿Cómo verifico si dos vectores son paralelos?

5. ¿Cuál de los siguientes vectores es perpendicular a $\vec{C} = (-2\vec{i}, 4\vec{j})$?

- a. $\vec{E} = (-10\vec{i}, 5\vec{j})$
- b. $\vec{F} = (-5\vec{i}, 10\vec{j})$
- c. $\vec{G} = (5\vec{i}, -10\vec{j})$
- d. $\vec{P} = (10\vec{i}, 5\vec{j})$

6. ¿Cuál de los siguientes vectores es perpendicular a $\vec{C} = (5\vec{i}, -3\vec{j})$?

- a. $\vec{E} = (6\vec{i}, 10\vec{j})$
- b. $\vec{F} = (10\vec{i}, 6\vec{j})$
- c. $\vec{G} = (6\vec{i}, -10\vec{j})$
- d. $\vec{P} = (-6\vec{i}, 10\vec{j})$

7. ¿Cuál de los siguientes vectores es paralelo a $\vec{M} = (5\vec{i}, -3\vec{j})$?

- a. $\vec{A} = (2\vec{i}, -3\vec{j})$
- b. $\vec{N} = (10\vec{i}, 6\vec{j})$
- c. $\vec{M} = (10\vec{i}, -6\vec{j})$
- d. $\vec{B} = (-6\vec{i}, 10\vec{j})$

8. ¿Cuál de los siguientes vectores es paralelo a $\vec{P} = (\vec{i}, -\vec{j})$?

- a. $\vec{A} = (-5\vec{i}, 5\vec{j})$
- b. $\vec{N} = (\vec{i}, \vec{j})$
- c. $\vec{M} = (5\vec{i}, -5\vec{j})$
- d. $\vec{B} = (-\vec{i}, 2\vec{j})$

9. Dados los vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} de la figura, calcula gráficamente.

- a. $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
- b. $-2\vec{w}$
- c. $\vec{u} + 2\vec{v}$
- d. $2\vec{u} - \vec{v}$

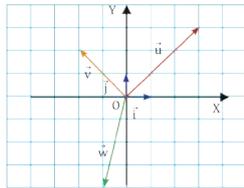


Fig. 19

10. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -2)$ y $\vec{v} = (-2, 2)$, referidos a una base ortonormal, calcula:

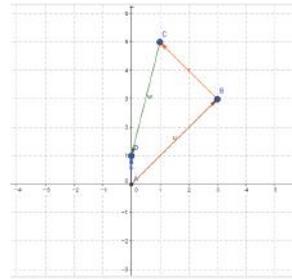
- a. $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w}$
- b. $-2\vec{u} - \vec{v}$
- c. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v}$

11. Dados los vectores $\vec{u} = (1, -2)$ y $\vec{v} = (2, 2)$ y $\vec{w} = (0, -1)$, calcula $(2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{v} + 4\vec{w})$.

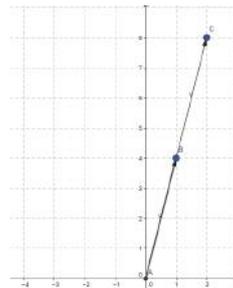
Prohibida su reproducción.

Solucionario

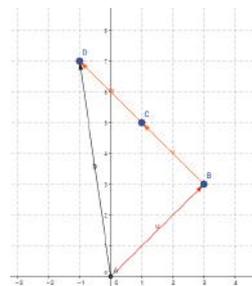
9.- a)



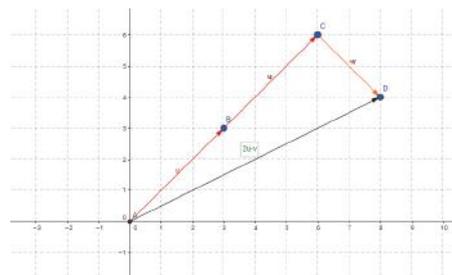
b)



c)



d)



11.- 12

Solucionario

13.-

- a) 1
- b) 7.28
- c) 1
- d) 8.28
- e) 8.28

15.-

- a) 20m
- b) 8.25
- c) 72.24
- d) 64.03°
- e) 5.1
- f) 18
- g) 64.67°

17.-

- a) 10.44°
- b) 76.74°
- c) 22.62°
- d) 180°

19.-

$$Y = -x - 2$$

12. Averigua si los puntos A, B y C están alineados en cada uno de los siguientes casos:

- a. $A = (0, 3)$, $B = (1, 1)$ y $C = (1, 5)$
- b. $A = (-1, 3)$, $B = (4, 0)$ y $C = (2, 6)$

2 Norma de un vector

13. Dados los vectores: $\vec{A} = (-1, 0)$, $\vec{N} = (0, -1)$ y $\vec{M} = (-7, -2)$. Determina la magnitud de:

- a. \vec{A}
- b. \vec{M}
- c. \vec{N}
- d. $\vec{M} + \vec{A}$
- e. $\vec{M} + \vec{N}$

3 Distancia entre dos puntos

14. Dados los vectores: $\vec{A} = (-10, 5)$, $\vec{N} = (2, -2)$ y $\vec{M} = (0, -2)$. Determina la distancia entre:

- a. \vec{A} y \vec{N}
- b. \vec{M} y \vec{N}
- c. \vec{A} y \vec{M}
- d. $\vec{M} + \vec{A}$
- e. $\vec{M} + \vec{M}$

f. El resultado obtenido en los literales c y d es igual? ¿Por qué?

g. ¿Por qué se obtiene el resultado del literal e?

4 Ángulo entre dos vectores

15. Dados los vectores: $\vec{Z} = (20m, 50^\circ)$, $\vec{X} = (8i, -2j)$ y $\vec{Y} = (i, -5j)$. Determina:

- a. La norma de \vec{Z}
- b. La norma de \vec{X}
- c. $\vec{X} \cdot \vec{Z}$
- d. El ángulo entre los vectores \vec{X} y \vec{Z}
- e. La norma de \vec{Y}
- f. $\vec{X} \cdot \vec{Y}$
- g. El ángulo entre los vectores \vec{X} y \vec{Y}

16. En la siguiente figura, determina:

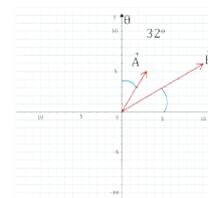


Fig. 20.

- a. El ángulo entre A y B
- b. El valor de θ .

17. Calcula el ángulo formado entre los vectores \vec{a} y \vec{b} , si se conoce que:

$$a. \vec{a} = (4, 5) \quad ; \quad \vec{b} = \left(\frac{16}{5}, 6\right)$$

$$b. \vec{a} = \vec{AB} \quad ; \quad \vec{b} = \vec{CD} \text{ y}$$

$$A(4, 6), B(-2, \frac{26}{5}), C(9, \frac{103}{10}), D(-\sqrt{3}, 5)$$

$$c. \vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} \quad ; \quad \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$$

$$d. \vec{a} = (-1, 0) \quad ; \quad \vec{b} = \vec{i}$$

18. Las componentes de u , v y w en una cierta base son $u = (-1, 2)$, $v = (2, 3)$ y $w = (1, 0)$. Expresa cada uno de estos vectores como combinación lineal de los otros dos.

19. Escribe en todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (-5, 3)$ y que tiene vector director $\vec{v} = (-1, 1)$.

20. Escribe en todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por el punto $B = (2, -1)$ y que tiene como vector director $\vec{u} = (3, 5)$.

5 Ecuación explícita de la recta

21. Encuentra la ecuación explícita de la recta $5x + y - 7 = 0$.
22. Encuentra la ecuación explícita de la recta que pasa por los puntos (7; -2) y (12; 3).
23. Encuentra la pendiente y la ordenada al origen de la recta $y = \frac{3x + 7}{2}$.
24. Encuentra la pendiente y la ordenada al origen de la recta $3x - 5y = 0$.

6 Ecuación vectorial de la recta

25. Encuentra la ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A = (-3; 5)$ y es parte del vector $v = (-2; -7)$.
26. La ecuación vectorial de la recta que pasa por el punto $A = (-2; 9)$ es $(x, y) = (-2; 9) + k(-6; 7)$. ¿Cuál es el valor del vector director?
27. Encuentra la ecuación vectorial de la recta que pasa por los puntos $P = (-8; -5)$ y $Q = (-2; 9)$.

7 Ecuación paramétrica de la recta

28. Encuentra la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $B = (5; 6)$ y tiene un vector director de $(-9; -2)$.
29. La ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto $P(5; 8)$ es $x = 5 + 3p$ e $y = 8 - p$. ¿Cuál es el valor del vector director?

30. Dada la ecuación que se expresa mediante $x = p + 8$; $y = 2p - 11$, donde p es un número real, determina:

- a. Los puntos determinados por: $...-3, -2, -1, 0, 1, 2$ y 3.
- b. La relación algebraica entre x e y .
- c. La gráfica de la función.

8 Formas de expresión de la recta

31. Representa la recta $5x + 3y = 0$, en forma explícita, paramétrica y vectorial.
32. Encuentra las ecuaciones explícita, general paramétrica de la siguiente recta $(x, y) = (3; -2) + p(2; 5)$.
33. Escribe en todas las formas posibles la ecuación de la recta que pasa por el punto $A = (-5, 3)$ y que tiene vector director $\vec{v} = (-1, 1)$.
34. Escribe en todas las posibles la ecuación de la recta que pasa por $A = (1, -3)$ y $B = (2, 0)$.
35. Escribe la ecuación paramétrica de la recta que pasa por el punto P y tiene como vector director \vec{a} .
- a. $P(4, 5)$; $\vec{a}(-4, 6)$
- b. $P(-\frac{1}{2}, 4)$; $\vec{a}(5, 3)$
36. Escribe la ecuación paramétrica de la recta que contiene a los puntos:
- a. $A(0, 0)$; $B(-3, -6)$
- b. $G(-\sqrt{3}, 5)$; $H(-\sqrt{3}, 2)$

Prohibida su reproducción

Solucionario

21.-

$$Y = -5x + 7$$

23.- $m=1.5$ $b=3.5$

27.- $OX = (-8i - 5j) + p(6i + 14j)$

29.- $3i - j$

31.- Forma explícita $y = \frac{-5x}{3}$

Forma paramétrica $x = p$; $y = \frac{-5p}{3}$

Forma vectorial $OX = p(i - \frac{5}{3}j)$

33.- $y = -x - 2$

35.- a) $x = 4 - 4p$; $y = 5 - 6p$

b) $x = -0,5 + 4p$; $y = 4 = 3p$

Solucionario

37.- $x = p$; $y = -4 + 2p$

39.- $x = p$; $y = -2 + 3p$

41.- a) $x_1 = 4$ $y_1 = 1$

b) $m = -\frac{1}{3}$

c) $b = \frac{7}{3}$

d) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

43.- a) $x_1 = 5$ $y_1 = -2$

b) $m = 4$

c) $b = -22$

d) $y = 4x - 22$

45.- $y = -x - 1$

9 Conversion explícita - paramétrica

37. Expresa $y = 2x - 4$ en su forma paramétrica.

38. Sean los puntos $(4, 3)$ y $(2, 2)$. **Determina** la forma paramétrica de la recta descrita.

39. Una recta se describe mediante los elementos $m = 3$ y $b = -2$. **Determina** la forma paramétrica de la misma.

40. Sea la gráfica, además de los puntos $(0, -2)$ y $(0, 4)$, **Halla** la forma paramétrica de la recta descrita.

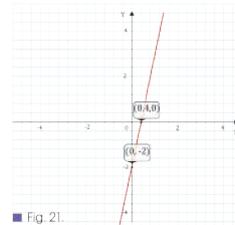


Fig. 21.

10 Conversion paramétrica explícita

41. Sea la ecuación $\begin{cases} x = 4 + 3p \\ y = 1 - p \end{cases}$

Determina.

- Los valores de x_1 , y_1 , a y b .
- El valor de la pendiente.
- El valor de la intersección.
- La ecuación explícita.

42. Sea la ecuación $\begin{cases} x = 3p \\ y = 5 + 2p \end{cases}$.

Determina.

- Los valores de x_1 , y_1 , a y b .
- El valor de la pendiente.
- El valor de la intersección.
- La ecuación explícita.

11 Conversion vectorial - explícita

43. Sea la recta $\vec{OX} = (5i - 2j) + p(i + 4j)$, **determina** la forma explícita.

- Los valores de x_1 , y_1 , a y b .
- El valor de la pendiente.
- El valor de la intersección.
- La ecuación explícita.

12 Recta paralela a una recta dada.

44. **Determina** la ecuación de la recta paralela a la recta $y = 5x + 4$, que pase por el punto $(2, 3)$.

45. **Halla** la ecuación de la recta paralela a la recta $y = -x + 4$, que pase por el punto $(-1, 0)$.

46. Dado el triángulo de vértices los puntos $A = (1, 1)$, $B = (-3, 5)$ y $C = (-1, -2)$, calcula la ecuación de:

- La recta que pasa por A y es paralela al lado BC .
- La mediana que parte de B .
- La altura que parte de C .

Para finalizar

- 1 Sean los vectores $\vec{A} (5, 8)$ y $\vec{B} (3, 2)$. Al realizar el producto punto, resulta.
 - a. 46
 - b. 31
 - c. 13
 - d. 18
- 2 La magnitud del vector $\vec{M} = 5\vec{i} - 8\vec{j}$ es:
 - a. $\sqrt{39}$
 - b. $\sqrt{-39}$
 - c. 3
 - d. $\sqrt{89}$
- 3 El producto escalar entre dos vectores perpendiculares es:
 - a. 0
 - b. 90
 - c. 1
 - d. -1
- 4 El vector perpendicular a $\vec{B} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ es:
 - a. $-7\vec{i} + 3\vec{j}$
 - b. $12\vec{i} + 9\vec{j}$
 - c. $-9\vec{i} + 12\vec{j}$
 - d. $3\vec{i} + 4\vec{j}$
- 5 Sean los vectores $\vec{A} = (3, -4)$ y $\vec{B} = (-2, 3)$. El módulo de los vectores respectivamente es:
 - a. $14, \sqrt{12}$
 - b. $12, \sqrt{15}$
 - c. $5, \sqrt{13}$
 - d. $\sqrt{5}, 13$
- 6 Sean los vectores $\vec{A} = (-5\vec{i}, -\vec{j})$ y $\vec{B} = (-2\vec{i}, 3\vec{j})$. El producto punto entre A y B es:
 - a. 7
 - b. 12
 - c. 9
 - d. -12
- 7 El ángulo formado por los vectores del ejercicio anterior es:
 - a. $12,68^\circ$
 - b. $0,38^\circ$
 - c. $67,59^\circ$
 - d. $22,41^\circ$
- 8 Responde verdadero (V) o falso (F).
 - a. El producto $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.
 - b. Para verificar que dos vectores son paralelos utilizamos la ecuación: $A_x B_y = A_y B_x$.
 - c. El producto escalar entre dos vectores que son perpendiculares es igual a uno.
 - d. Los vectores que son iguales forman 180° .
 - e. El producto escalar de dos vectores perpendiculares es igual al producto de sus módulos.
 - f. El producto escalar es conmutativo.
 - g. El producto $\vec{i} \cdot \vec{i} = 0$.
- 9 Determina la ecuación de la recta paralela a la recta $y = -2x + 3$, que pase por el punto $(2, 3)$.
- 10 Halla la ecuación de la recta perpendicular a la recta $y = -5x + 1$, que pase por el punto $(-1, -2)$.
- 11 Considerando la siguiente gráfica, determina la ecuación de la recta paralela a la recta L, que pase por el punto $(0, 4)$; y además, la ecuación de la recta perpendicular a la recta L, que pase por $(0, 1)$.

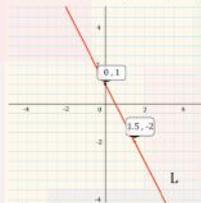


Fig. 22.

Solucionario

- 1.- b
- 3.- a
- 5.- ninguna respuesta
- 7.- c
- 9.- $y = -2x + 7$
- 11.- recta paralela $y = -\frac{1}{2}x + 4$;
recta perpendicular $y = 2x + 1$
- 13.- d
- 15.- perpendiculares
- 17.- $y = \frac{x-31}{7}$
- 19.- a) $x_1=6$ $y_1=5$ $a=5$ $b=7$
b) $m = -2$
c) $b=17$
d) $y = -2x + 17$
- 21.- $x = 5 - 5p$; $y = -3 + 5p$

1.- Contestar con verdadero y falso

- a) Dos vectores son paralelos cuando forman un ángulo de 90° ()
b) La ecuación de la recta expresada en forma explícita es $y=mx+b$ ()
c) Dos vectores son perpendiculares cuando forman un ángulo de 90° ()
d) El producto punto entre dos vectores nos da como resultado otro vector ()

Seleccionar la respuesta correcta

2.- La pendiente de la recta se obtiene mediante la ecuación siguiente:

a) $y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ b) $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ c) $y = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$

3.- Al punto de corte entre la recta y el eje de las ordenadas (eje y); se representa por la letra:

- a) m b) x_1 c) b

4.- El producto escalar de un vector por sí mismo es:

- a) B b) B^2 c) $|B|$

Resolver los siguientes ejercicios

5.- Calcular el producto escalar de los siguientes vectores:

a) $\vec{u} = (3, 0)$ $\vec{v} = (5, 5)$

b) $\vec{u} = (2, 1)$ $\vec{v} = (-3, 4)$.

6.- Graficar los siguientes vectores:

a) $\vec{A} = 3i + 4j$ b) $\vec{B} = i - 2j$

7.- Calcular la norma de los siguientes vectores

a) $\vec{A} = -6i + 4j$ b) $\vec{B} = 2i - j$

8.- Determinar la distancia entre los puntos

- a) $(3, 5)$ y $(1, 4)$ b) $(1, 8)$ y $(5, 1)$

9.- Calcular el ángulo entre los vectores:

a) $\vec{A} = 2i + 5j$ $\vec{B} = -1i + 4j$ b) $\vec{C} = 2i - 3j$ $\vec{D} = -6i + j$

10.- Expresar la ecuación en forma paramétrica

a) $y = -3x + 4$ b) $y = 2x - 1$

11.- Sean los puntos A $(1, 2)$ y B $(3, -4)$. Determinemos la ecuación de la recta en forma vectorial.

12.- Determinar la ecuación de la recta paralela a la recta $y = -2x - 2$ que pase por el punto $(1, 3)$

13.- Determinar la ecuación de la recta perpendicular a la recta $y = -2x + 1$, que pase por el punto $(1, -3)$

1.-

a) (F)

b) (V)

c) (V)

d) (F)

2.- b

3.- c

4.- b

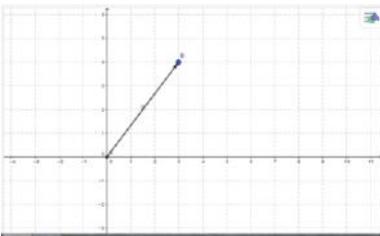
Resolver los siguientes ejercicios

5.- Calcular en producto escalar de los siguientes vectores:

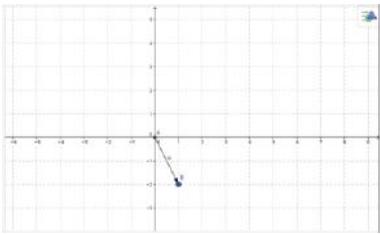
a) 15

b) -2

6.- Graficar los siguientes vectores:



a)



b)

7.- Calcular la norma de los siguientes vectores

a) 7.21

b) 2.24

8.- Determinar la distancia entre los puntos

a) 2.24

b) 8.06

9.- Calcular en ángulo entre los vectores:

a) 35.84°

b) 119.55°

10.- Expresar la ecuación en forma paramétrica

a) $x = p$; $y = 4 - 3p$

b) $x = p$; $y = -1 + 2p$

1.- Contestar con verdadero y falso

- a) Dos vectores son paralelos cuando forman un ángulo de 180° ()
b) La ecuación de la recta expresada en forma explícita es $y=mx+b$ ()
c) Dos vectores son perpendiculares cuando forman un ángulo de 90° ()
d) El producto punto entre dos vectores nos da como resultado otro vector ()

Seleccionar la respuesta correcta

2.- La pendiente de la recta se obtiene mediante la ecuación siguiente:

a) $y = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ b) $y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ c) $y = \frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1}$

3.- Al punto de corte entre la recta y el eje de las ordenadas (eje y); se representa por la letra:

- a) m b) x_1 c) b

4.- El producto escalar de un vector por sí mismo es:

- a) B b) B^2 c) | B |

Resolver los siguientes ejercicios

4.- Calcular el producto escalar de los siguientes vectores:

a) $\vec{u} = (3, 0)$ $\vec{v} = (5, 5)$

5.- Graficar los siguientes vectores:

a) $\vec{A} = 3i + 4j$

6.- Calcular la norma de los siguientes vectores

a) $\vec{A} = 6i + 4j$

b) $\vec{B} = 2i + j$

7.- Determinar la distancia entre los puntos

a) (3, 5) y (1, 4)

8.- Calcular el ángulo entre los vectores:

a) $\vec{A} = 2i + 5j$ $\vec{B} = 1i + 4j$

9.- Expresar la ecuación en forma paramétrica

a) $y = 3x + 4$

10.- Sean los puntos A (1, 1) y B (3,-2). Determinemos la ecuación de la recta en forma vectorial.

1.- Contestar con verdadero y falso

a) (V)

b) (V)

c) (V)

d) (F)

Seleccionar la respuesta correcta

2.- b

3.- c

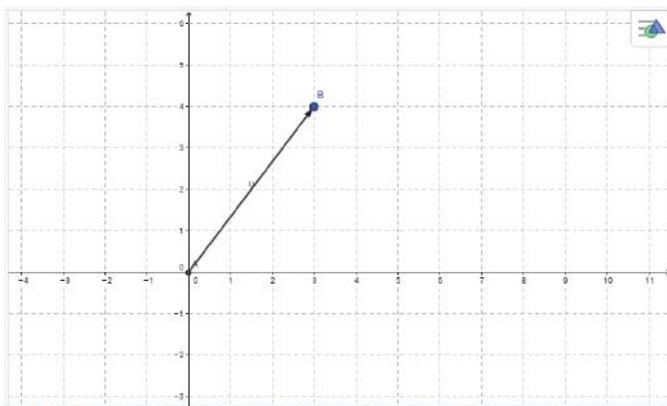
4.- b

Resolver los siguientes ejercicios

4.- Calcular en producto escalar de los siguientes vectores:

a) 15

5.-



a)

6.-

a) 7.21

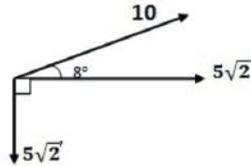
b) 2.24

7.-

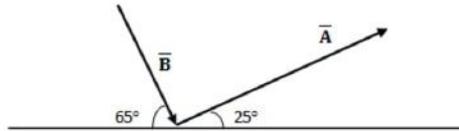
a) 2.24

BANCO DE PREGUNTAS

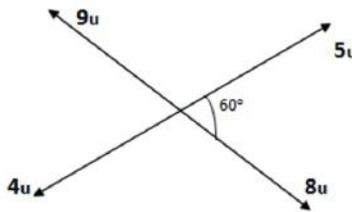
1. Calcule el módulo de la resultante (en N) de dos fuerza de 4N y 8N respectivamente y que forma un ángulo de 60° .
2. Determine el coseno del ángulo que forman dos vectores de igual magnitud, si su resultante vale la mitad de ellos.
3. Dos fuerzas de igual modulo y que forman un ángulo de 60° entre si, tiene una resultante de $40\sqrt{3}N$. calcule el modulo de dichas fuerzas.
4. Calcule el modulo del vector resultante.



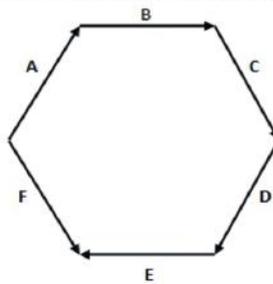
5. Los módulos de los vectores y son $4u$ y $3u$ respectivamente. Calcule el máximo valor de la operación $|2\vec{A} + 3\vec{B}|$.
6. Según la figura, halle $|\vec{A} - \vec{B}|$, si $A=8$ y $B=6$.



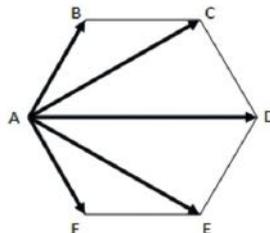
7. La resultante de los 4 vectores mostrados tiene un modulo de:



8. El vector suma de los vectores colocado en el hexágono regular es:



9. Se muestra un rectángulo ABCD, el modulo de la resultante de sumar los vectores $\vec{AD} + \vec{AB} + \vec{CB} + \vec{CD}$ es: (en cm)
10. Hallar el valor de la resultante de los vectores mostrados en la figura (en cm.) hexágono regular de radio de 20 cm.



CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

- Debatir la necesidad que tienen los seres humanos en ubicarse en una ciudad usando mapas que tienen cuadrículas de referencia.

También usamos para orientarnos dispositivos con sistemas de GPS (sistema de posicionamiento global), este sistema funciona triangulando posiciones entre satélites.

De esta forma cuando usamos por ejemplo Google maps, estamos usando parte del compendio de esta unidad

Conceptualización

- Diferenciar los conceptos de magnitud escalar y magnitud vectorial.

Comparar las operaciones en el espacio bidimensional como el producto escalar.

Usar un sistema de referencia bidimensional para ubicar una partícula en el plano.

Describir trayectorias rectilíneas, usando ecuaciones lineales paramétricas.

Reflexión

Reflexionar acerca de la importancia de estos conocimientos en las apps actuales como TIC que usan para su funcionamiento el sistema GPS

Aplicación

Usar el producto escalar y las diferentes formas de expresar las ecuaciones lineales en la resolución de problemas físicos, como los planteados en el texto

Reconocer los procesos en las operaciones con vectores bidimensionales.

Producir predicciones usando los modelos matemáticos estudiados.

RECURSOS PARA FOMENTAR EL INGENIO EN EL AULA

Cónicas

4. Películas
En este apartado puedes encontrar un resumen de películas que se han estrenado recientemente en el mundo. Puedes encontrar información sobre ellas en el apartado de películas de la página 100.

Web
En este apartado puedes encontrar un resumen de páginas web que se han estrenado recientemente en el mundo. Puedes encontrar información sobre ellas en el apartado de páginas web de la página 100.

EN CONTEXTO
1. ¿Qué es el foco de una cónica?
2. ¿Qué es el eje focal de una cónica?
3. ¿Qué es el eje real de una cónica?
4. ¿Qué es el eje imaginario de una cónica?
5. ¿Qué es el eje de simetría de una cónica?
6. ¿Qué es el eje de simetría de una cónica?
7. ¿Qué es el eje de simetría de una cónica?
8. ¿Qué es el eje de simetría de una cónica?

5 Resumen

Parábolas

Primer caso: $x = a + b \cdot y + c \cdot y^2$	Segundo caso: $x = a + b \cdot y + c \cdot y^2$
En este caso, la directriz es $x = -\frac{c}{2a}$	En este caso, la directriz es $x = -\frac{c}{2a}$
Como $dx/dy = 2cy + b$	Como $dx/dy = 2cy + b$
Operando, se obtiene $y^2 = 2ay + \frac{b^2}{4a^2}$	Operando, se obtiene $y^2 = 2ay + \frac{b^2}{4a^2}$

Elipses

Primer caso: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Segundo caso: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
En este caso, la directriz es $x = \pm \frac{a^2}{c}$	En este caso, la directriz es $x = \pm \frac{a^2}{c}$
Como $dx/dy = \frac{-2x}{a^2}$	Como $dx/dy = \frac{-2x}{a^2}$
Operando, se obtiene $y = \pm \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{x}$	Operando, se obtiene $y = \pm \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{1}{x}$

Gráficas

1. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

2. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

3. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

4. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

Problemas resueltos

1. Determina la ecuación de la elipse con eje focal en el eje x cuyo centro coincide con el origen y pasa por los puntos $A(3, 2)$ y $B(4, 1)$.

2. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(2, 3)$, $Q(0, 5)$ y cuyo centro está sobre la recta $x - y - 2 = 0$.

3. Halla los elementos de la parábola cuya ecuación es $y^2 = -2x$.

Ejercicios y problemas

1. Circunferencia

1. Determina la ecuación de la circunferencia y halla su centro.

2. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ y $C(5, 6)$.

3. Determina la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ y $C(5, 6)$.

2. Elipse

1. Halla la ecuación de la elipse que pasa por los puntos $A(3, 2)$, $B(4, 1)$ y $C(5, 6)$.

2. Halla la ecuación de la elipse que pasa por los puntos $A(3, 2)$, $B(4, 1)$ y $C(5, 6)$.

3. Halla la ecuación de la elipse que pasa por los puntos $A(3, 2)$, $B(4, 1)$ y $C(5, 6)$.

Para finalizar

1. Si se sigue el gráfico

2. Si se sigue el gráfico

3. Si se sigue el gráfico

4. Si se sigue el gráfico

5. Si se sigue el gráfico

6. Si se sigue el gráfico

7. Si se sigue el gráfico

8. Si se sigue el gráfico

9. Si se sigue el gráfico

10. Si se sigue el gráfico

11. Si se sigue el gráfico

12. Si se sigue el gráfico

13. Si se sigue el gráfico

14. Si se sigue el gráfico

15. Si se sigue el gráfico

16. Si se sigue el gráfico

17. Si se sigue el gráfico

18. Si se sigue el gráfico

19. Si se sigue el gráfico

20. Si se sigue el gráfico

21. Si se sigue el gráfico

22. Si se sigue el gráfico

23. Si se sigue el gráfico

24. Si se sigue el gráfico

25. Si se sigue el gráfico

26. Si se sigue el gráfico

27. Si se sigue el gráfico

28. Si se sigue el gráfico

29. Si se sigue el gráfico

30. Si se sigue el gráfico

31. Si se sigue el gráfico

32. Si se sigue el gráfico

33. Si se sigue el gráfico

34. Si se sigue el gráfico

35. Si se sigue el gráfico

36. Si se sigue el gráfico

37. Si se sigue el gráfico

38. Si se sigue el gráfico

39. Si se sigue el gráfico

40. Si se sigue el gráfico

41. Si se sigue el gráfico

42. Si se sigue el gráfico

43. Si se sigue el gráfico

44. Si se sigue el gráfico

45. Si se sigue el gráfico

46. Si se sigue el gráfico

47. Si se sigue el gráfico

48. Si se sigue el gráfico

49. Si se sigue el gráfico

50. Si se sigue el gráfico

51. Si se sigue el gráfico

52. Si se sigue el gráfico

53. Si se sigue el gráfico

54. Si se sigue el gráfico

55. Si se sigue el gráfico

56. Si se sigue el gráfico

57. Si se sigue el gráfico

58. Si se sigue el gráfico

59. Si se sigue el gráfico

60. Si se sigue el gráfico

61. Si se sigue el gráfico

62. Si se sigue el gráfico

63. Si se sigue el gráfico

64. Si se sigue el gráfico

65. Si se sigue el gráfico

66. Si se sigue el gráfico

67. Si se sigue el gráfico

68. Si se sigue el gráfico

69. Si se sigue el gráfico

70. Si se sigue el gráfico

71. Si se sigue el gráfico

72. Si se sigue el gráfico

73. Si se sigue el gráfico

74. Si se sigue el gráfico

75. Si se sigue el gráfico

76. Si se sigue el gráfico

77. Si se sigue el gráfico

78. Si se sigue el gráfico

79. Si se sigue el gráfico

80. Si se sigue el gráfico

81. Si se sigue el gráfico

82. Si se sigue el gráfico

83. Si se sigue el gráfico

84. Si se sigue el gráfico

85. Si se sigue el gráfico

86. Si se sigue el gráfico

87. Si se sigue el gráfico

88. Si se sigue el gráfico

89. Si se sigue el gráfico

90. Si se sigue el gráfico

91. Si se sigue el gráfico

92. Si se sigue el gráfico

93. Si se sigue el gráfico

94. Si se sigue el gráfico

95. Si se sigue el gráfico

96. Si se sigue el gráfico

97. Si se sigue el gráfico

98. Si se sigue el gráfico

99. Si se sigue el gráfico

100. Si se sigue el gráfico

ZONA

Antenas parabólicas

Las antenas parabólicas se utilizan para recibir y transmitir ondas de radio. Se utilizan en comunicaciones, televisión, radioastronomía y radares.

El gran geometra

El gran geometra fue un matemático griego que vivió en el siglo III a. de C. Fue el primero en demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180 grados.

Ovalos, ovoides y elipses

Los ovalos, ovoides y elipses son curvas cerradas que se utilizan en arquitectura, ingeniería y diseño.

Arquitecto

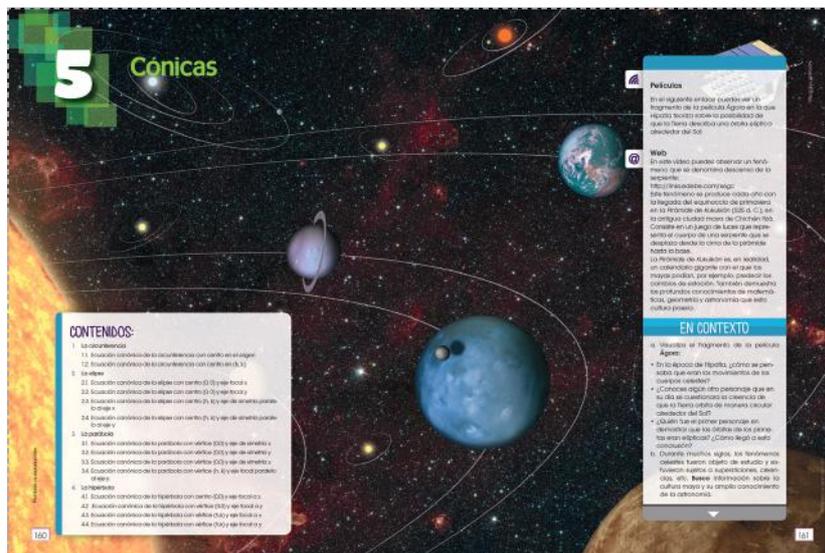
El arquitecto es el profesional que se encarga de diseñar y construir edificios y obras de arte.

La paglioflexia y los cóncavos

La paglioflexia es una enfermedad que afecta a la columna vertebral. Los cóncavos son curvas que se utilizan en ingeniería y diseño.

Prohibida su reproducción

UNIDAD 5



Ejes temáticos	Contenidos
Geometría y Medida	Cónicas.....página 162
	La circunferenciapágina 162
	Ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen.....página 163
	Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (h, k)página 165
	La elipsepágina 169
	Ecuación canónica de la elipse con centro (0, 0) y eje focal xpágina 169
	Ecuación canónica de la elipse con centro (0, 0) y eje focal y página 172
	Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje focal xpágina 174
	Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje focal ypágina 174
	La parábolapágina 177
	Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría x.....página 177
	Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría y.....página 178
	Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría x.....página 179
	Ecuación canónica de la parábola con vértice (0,0) y eje de simetría y.....página 179
	La hipérbolapágina 182
	Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (0,0) y eje focal a x.....página 182
	Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (0,0) y eje focal a y.....página 183
	Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (h,k) y eje focal a x.....página 185
Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (h,k) y eje focal a y.....página 185	

LOGO INSTITUCIONAL		NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN				AÑO LECTIVO	
PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA							
1. DATOS INFORMATIVOS:							
Docente:	Nombre del docente que ingresa la información	Área/asignatura:	MATEMÁTICA	Grado/Curso:	2º BACHILLERATO	Paralelo:	Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.
N.º de unidad de planificación:	5	Título de unidad de planificación:	CÓNICAS	Objetivos específicos de la unidad de planificación:			Desarrollar la curiosidad y la creatividad en el uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.
PERÍODOS	24				SEMANA DE INICIO:		
2. PLANIFICACIÓN							
				DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:			
				CRITERIOS DE EVALUACIÓN			
				<ul style="list-style-type: none"> • Describir la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola como lugares geométricos en el plano. • Escribir y reconocer las ecuaciones cartesianas de la circunferencia, de la parábola, la elipse y la hipérbola con centro en el origen y con centro fuera del origen para resolver y plantear problemas (por ejemplo en física: órbitas planetarias, tiro parabólico, etc.) identificando la validez y pertinencia de los resultados obtenidos. 			
				CE.M.5.6. Emplea vectores geométricos en el plano y operaciones en \mathbb{R} , con aplicaciones en física y en la ecuación de la recta; utiliza métodos gráficos, analíticos y tecnológicos.			

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	RECURSOS	INDICADORES DE LOGRO	TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN
<p>Se presentan estudios estadísticos que sirvan como tema de partida sobre la importancia de la estadística</p> <p>Manipulación de material con fotos y representación de distintos tipos de análisis estadísticos.</p> <p>Resolución de problemas de aplicación de funciones en el ámbito deportivo y social.</p> <p>Definición de variables estadísticas, medidas de dispersión, técnicas de muestreo, procedimientos, gráficos y análisis de resultados.</p> <p>Uso de hojas de cálculo que facilitan la representación, gráfica y posterior interpretación de información</p> <p>¿Qué podemos decir sobre la estadística y su aporte en la economía?</p> <p>Identificación de medidas de tendencia central su aplicación en las finanzas y economía.</p> <p>Reflexión y análisis sobre dichas aplicaciones</p> <p>¿Por qué es importante calcular, analizar e interpretar los datos estadísticos y de dispersión de una variable estadística?</p> <p>Plantamiento y resolución de problemas que apliquen medidas de dispersión y de tendencia central.</p>	<p>- Texto</p> <p>- Calculadora</p> <p>- Enlaces web</p> <p>- Pizarra</p>	<p>I.M.5.6.1. Grafica vectores en el plano; halla su módulo y realiza operaciones de suma, resta y producto por un escalar; resuelve problemas aplicados a la Geometría y a la Física. (I.2.)</p> <p>I.M.5.6.2. Realiza operaciones en el espacio vectorial R; calcula la distancia entre dos puntos, el módulo y la dirección de un vector; Reconoce cuando dos vectores son ortogonales; y aplica este conocimiento en problemas físicos.</p> <p>Apojado en las TIC. (I.3.)</p> <p>I.M.5.6.3. Determina la ecuación de la recta de forma vectorial y paramétrica; identifica su pendiente, la distancia a un punto y la posición relativa entre dos rectas, la ecuación de una recta bisectriz, sus aplicaciones reales, la validez de sus resultados y el aporte de las TIC. (I.3.)</p>	<p>Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para el manejo de vectores en el plano y sus características, graficación, norma, Operaciones con vectores algebraicas, en forma gráfica y en Forma analítica, así como para la resolución de problemas de aplicación. El estudiante debe ser capaz de calcular el producto de un número por un vector, el producto Escalar entre vectores, la ortogonalidad, la distancia entre dos puntos, el ángulo entre dos vectores; determinar la posición relativa de dos rectas; describir la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola (tanto en su forma cartesiana como en su forma paramétrica), y, en general, resolver aplicaciones geométricas de vectores en R</p>
ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA			
<p>I.2. Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para Resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos información posibles.</p>			
<p>I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos.</p>			
ELABORADO	REVISADO	APROBADO	
Docente:	Director del área :	Vicerrector:	
Firma:	Firma:	Firma:	
Fecha:	Fecha:	Fecha:	

Objetivos generales del área que se evalúan

- Describir la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola como lugares geométricos en el plano.
- Escribir y reconocer las ecuaciones cartesianas de la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola con centro en el origen y con centro fuera del origen para resolver y plantear problemas (por ejemplo, en física: órbitas planetarias, tiro parabólico, etc.), identificando la validez y pertinencia de los resultados obtenidos.

Objetivos del área por subnivel

- O.M.5.5. Valorar, sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico, la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales, para así plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.

Objetivo integrador del área por subnivel

- OI.5.5. Plantear actividades de emprendimiento en diversos ámbitos de su vida, evaluando los riesgos e impactos que comportan a través de la investigación, con el uso de las tecnologías y métodos científicos, planificando de forma adecuada sus proyectos.
- OI.2.8. Construir hábitos de organización en sus tareas y actividades cotidianas, proponiendo razonamientos lógicos y críticos.

Criterios de evaluación

- Opera y emplea funciones reales, lineales, cuadráticas, polinomiales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas para plantear situaciones hipotéticas y cotidianas que puedan resolverse mediante modelos matemáticos; comenta la validez y limitaciones de los procedimientos empleados y verifica sus resultados mediante el uso de las TIC.
- Reconoce patrones presentes en sucesiones numéricas reales, monótonas y definidas por recurrencia; identifica las progresiones aritméticas y geométricas; y, mediante sus propiedades y fórmulas, resuelve problemas reales de matemática financiera e hipotética.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.
- Sabemos comunicarnos de manera clara en el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.
- Determina la ecuación de la recta de forma vectorial y paramétrica; identifica su pendiente, la distancia a un punto y la posición relativa entre dos rectas, la ecuación de una recta bisectriz, sus aplicaciones reales, la validez de sus resultados y el aporte de las TIC.

Orientación didáctica

- En esta unidad se estudia las cónicas, sus ecuaciones canónicas, gráficas y análisis. La portada de la unidad nos lleva al estudio de las órbitas descritas por los planetas, ya que la primera Ley de Kepler nos indica que “Los planetas se mueven alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, y que el sol se encuentra en uno de sus Focos”. En el desarrollo de la unidad el estudiante entenderá que la elipse es una cónica y que uno de sus elementos característicos son los focos. Es importante que el estudiante reconozca las particularidades de cada cónica y sus diferencias para lograr la comprensión del resto de las cónicas tratadas en el texto. Como orientación metodológica el docente puede abordar la unidad con el apoyo de las TICs. Una herramienta que se sugiere es el manejo del software DESMOS y el GEOGEBRA, los cuales ayudarían a los estudiantes a comprender, interpretar y analizar con mayor profundidad el tema de las Cónicas. Forme grupos de trabajo que busquen y analicen objetos de su entorno y las relacionen con los distintos tipos de cónicas estudiados en la unidad. Puede presentar diferentes gráficas para que los alumnos reconozcan a qué tipo de cónica corresponde.

5 Cónicas

CONTENIDOS:

- La circunferencia**
 - Ecuación canónica de la circunferencia con centro en el origen
 - Ecuación canónica de la circunferencia con centro en (h, k)
- La elipse**
 - Ecuación canónica de la elipse con centro $(0, 0)$ y eje focal x
 - Ecuación canónica de la elipse con centro $(0, 0)$ y eje focal y
 - Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje x
 - Ecuación canónica de la elipse con centro (h, k) y eje de simetría paralelo al eje y
- La parábola**
 - Ecuación canónica de la parábola con vértice $(0,0)$ y eje de simetría x
 - Ecuación canónica de la parábola con vértice $(0,0)$ y eje de simetría y
 - Ecuación canónica de la parábola con vértice $(0,0)$ y eje de simetría x
 - Ecuación canónica de la parábola con vértice (h, k) y eje focal paralelo al eje y .
- La hipérbola**
 - Ecuación canónica de la hipérbola con centro $(0,0)$ y eje focal x
 - Ecuación canónica de la hipérbola con vértice $(0,0)$ y eje focal y
 - Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (h,k) y eje focal x
 - Ecuación canónica de la hipérbola con vértice (h,k) y eje focal y

160

Películas
 En el siguiente enlace puedes ver un fragmento de la película *Ágora* en la que Hipatia teoriza sobre la posibilidad de que la Tierra describa una órbita elíptica alrededor del Sol.

Web
 En este vídeo puedes observar un fenómeno que se denomina descenso de la serpiente:
<http://links.edebe.com/k6gc>
 Este fenómeno se produce cada año con la llegada del equinoccio de primavera en la *Pirámide de Kukulkán* (525 d. C.), en la antigua ciudad maya de Chichén Itzá. Consiste en un juego de luces que representa el cuerpo de una serpiente que se desplaza desde la cima de la pirámide hasta la base.
 La *Pirámide de Kukulkán* es, en realidad, un calendario gigante con el que los mayas podían, por ejemplo, predecir los cambios de estación. También demuestra los profundos conocimientos de matemáticas, geometría y astronomía que esta cultura poseía.

EN CONTEXTO

a. Visualiza el fragmento de la película *Ágora*:

- En la época de Hipatia, ¿cómo se pensaba que eran los movimientos de los cuerpos celestes?
- ¿Conoces algún otro personaje que en su día se cuestionara la creencia de que la Tierra orbita de manera circular alrededor del Sol?
- ¿Quién fue el primer personaje en demostrar que las órbitas de los planetas eran elípticas? ¿Cómo llegó a esta conclusión?

b. Durante muchos siglos, los fenómenos celestes fueron objeto de estudio y estuvieron sujetos a supersticiones, creencias, etc. **Busca** información sobre la cultura maya y su amplio conocimiento de la astronomía.

Solucionario

- a. Respuesta sugerida:

Se pensaba que la Tierra era el centro del Universo y que los astros, incluido el Sol, giraban alrededor de ella. Nicolás Copérnico.

Lo demostró Johannes Kepler.

- b. Respuesta sugerida:

Los conocimientos astronómicos mayas eran propios de la clase sacerdotal y el pueblo conducía su vida de acuerdo a sus predicciones. Se puede consultar más información en:

<http://links.edebe.com/4sp>

La Elipse en la Arquitectura

¿Cómo empezar? Por supuesto, con el definición de esta cifra geométrica: la elipse es una curva cerrada (locus de puntos) tal que la suma de las distancias de cada uno de sus puntos que los dos puntos internos fijos, llamados focos, es constante y es igual a la longitud del eje mayor.

Para ver este concepto puede ser útil para mostrar la llamada "La construcción del jardinero" hecho mediante la colocación de dos clavos en los incendios y la localización de la elipse con la ayuda de una cuerda.

Para ver más intuitivamente el concepto de "Sección cónica" puede ser útil usar la haz de una linterna proyectada en la pared. De acuerdo a 'inclinación del eje de la viga se puede observar la forma cónica proyectado en la pared.

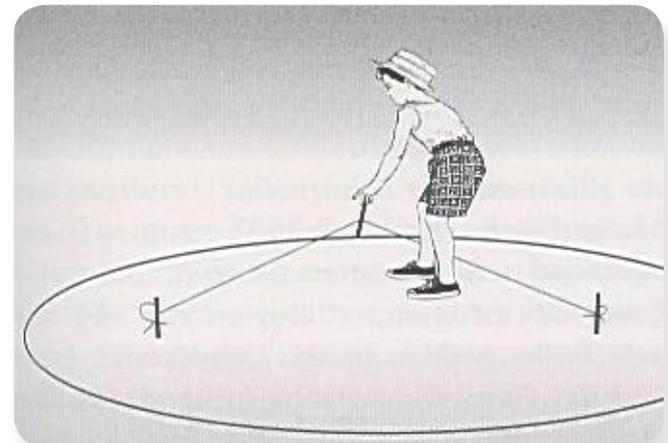
La de la siguiente figura, por ejemplo, es un 'hipérbola porque el eje del proyector es paralela a la pared.

En la historia de la arquitectura la elipse se ha disparado en varias ocasiones como distribución del plan o como esquemática en alzado. En muchos casos no son elipses perfectas, sino que tiende a las formas ovaladas. Dada la similitud entre las dos figuras a tener en cuenta a la vez de todos modos.

La primera evidencia de la utilización de la máquina elíptica (u oval) Se remonta al Anfiteatro Romano. Esta forma podría ser el resultado de la combinación de dos teatros de medio punto.



<http://goo.gl/mc7131>



<http://goo.gl/mc7131>



<http://goo.gl/mc7131>

Ejemplo 3

Considerando la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ determinemos la gráfica de la circunferencia correspondiente.

Datos: $x^2 + y^2 = 4$ Gráfica = ?

Al comparar la ecuación dada en los datos con la ecuación general, es posible establecer la igualdad: $r^2 = 4$; entonces $r = 2$.

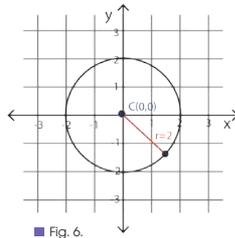


Fig. 6.

1. **Representa** gráficamente las siguientes ecuaciones.

- a. $x^2 + y^2 = 6$
- b. $x^2 + y^2 = 2$
- c. $x^2 + y^2 = \frac{12}{25}$
- d. $x^2 + y^2 = (5)^2$
- e. $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

2. **Relaciona** las ecuaciones con su respectiva gráfica

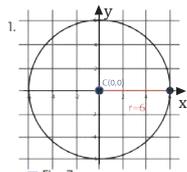


Fig. 7.

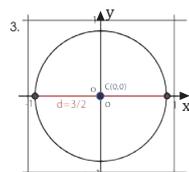


Fig. 8.

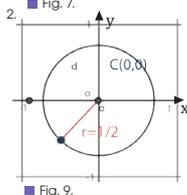


Fig. 9.

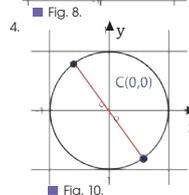


Fig. 10.

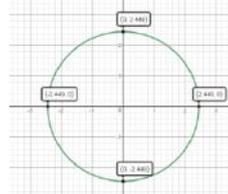
- a. $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$
- b. $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$
- c. $x^2 + y^2 = 4$
- d. $x^2 + y^2 = 36$

3. **Determina** las ecuaciones que cumplan con las condiciones dadas.

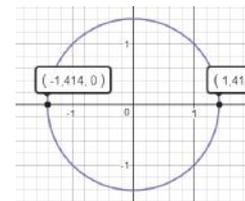
- a. $C(0, 0)$; $d = \frac{2}{3}$
- b. $C(0, 0)$; $r = 3$
- c. $C(0, 0)$; $r = \sqrt{6}$
- d. $C(0, 0)$; $r = 1 \frac{2}{3}$

Actividades

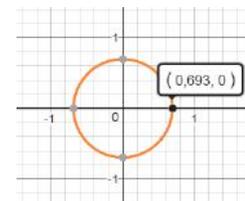
Solucionario



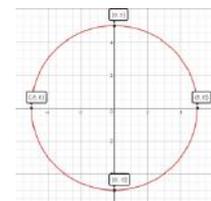
a) circunferencia con centro en el origen y $r = \sqrt{6} = 2.44$



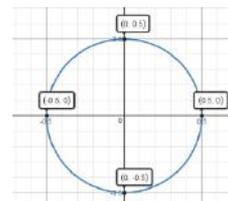
b) circunferencia con centro en el origen y $r = \sqrt{2} = 1.41$



c) circunferencia con centro en el origen y $r = \sqrt{\frac{2}{2}} = 0.693$



d) circunferencia con centro en el origen y $r = 5$



e) circunferencia con centro en el origen $r = \frac{2}{3}$

2. Observando los elementos representativos de radio y centro las ecuaciones con sus gráficas son:

1 - d, 2 - b, 3 - a, 4 - c.

3. Ecuación de la circunferencia con centro en el origen $x^2 + y^2 = r^2$

- a) $r = \frac{d}{2} = \frac{(\frac{2}{3})}{2} = \frac{1}{3}$ b) $x^2 + y^2 = 3^2$ c) $x^2 + y^2 = (\sqrt{6})^2$ d) $r = 1 \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$
- $x^2 + y^2 = \frac{1}{(3)^2}$ $x^2 + y^2 = 9$ $x^2 + y^2 = 6$ $x^2 + y^2 = (\frac{5}{3})^2$
- $x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$ $x^2 + y^2 = \frac{25}{9}$

Solucionario

Ecuación Canónica $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

4. a) $[x - (-2)]^2 + [y - 3]^2 = 8^2$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 64$$

Ecuación General

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 64 \quad \text{Desarrollando:}$$

$$x^2 + 2x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 64$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 4 + 9 - 64 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 6y - 51 = 0$$

b) Ecuación Canónica

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

Ecuación General

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

$$x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 + 4 - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y + 25 = 0$$

c) Ecuación Canónica

$$[x - (-2)]^2 + [y - (-1)]^2 = 4^2$$

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

Ecuación General

$$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 16$$

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 16$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 + 1 - 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 11 = 0$$

d) Ecuación Canónica

$$[x - (-5)]^2 + (y - 8)^2 = 7^2$$

$$(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 49$$

Ecuación General

$$(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 49$$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 16y + 64 = 49$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 16y + 25 + 64 - 49 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 16y + 40 = 0$$

e) Ecuación Canónica

$$[x - (-1)]^2 + (y - 0)^2 = 12^2$$

$$(x + 1)^2 + y^2 = 144$$

Ecuación General

$$(x + 1)^2 + y^2 = 144$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 = 144$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 1 - 144 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 143 = 0$$

5. La ecuación de la circunferencia es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$. Si su centro está sobre las abscisas tendrá coordenadas $(h; 0)$. Si es tangente a la recta $y = -x + 3$. Su radio será perpendicular a la recta en el punto $P(-1; 4)$.

Condición de perpendicularidad

$M_1 \cdot M_2 = -1$ La pendiente de la recta $y = -x + 3$ será:

$$M_1 = -1$$

$$-1 \cdot M_2 = -1$$

$$M_2 = -1$$

La ecuación del radio será: $y = x + b$; como pasa por el punto $(-1; 4)$

$$4 = -1 + b = 5$$

Ecuación del radio $y = x + 5$ Para encontrar el centro sabemos que: $y = 0$ $0 = x + 5$ $x = -5$

Por lo tanto las coordenadas del centro son:

$$C = (-5; 0)$$

Ecuación general de la circunferencia

Si desarrollamos la ecuación canónica de la circunferencia, resolviendo el producto notable binomio al cuadrado (en los dos paréntesis), tenemos:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{Ecuación canónica con centro } C(h, k)$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 = r^2 \quad \text{Resolviendo el binomio al cuadrado}$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0 \quad \text{Ordenando los términos convenientemente}$$

$$A = -2h, B = -2k \quad \text{y} \quad C = h^2 + k^2 - r^2 \quad \text{Reemplazando las constantes A, B y C}$$

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \quad \text{Ecuación general de la circunferencia}$$

Ejemplo 6

Determinemos las ecuaciones canónica y general de la circunferencia de radio 6, cuyas coordenadas del centro son (-3, 2).

Datos: $r = 6$, $C = (-3, 2)$. a. Ecuación canónica = ? ; b. Ecuación general = ?

Según los datos, conocemos las coordenadas del centro y el valor del radio, así tenemos en la ecuación canónica.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{Ecuación canónica con centro } C(h, k)$$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 36 \quad \text{Al reemplazar los valores de h y k cambian los signos.}$$

Al desarrollar la ecuación canónica con centro h, k, resolvemos los productos notables, y las constantes. Al igualar a cero resulta:

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 36$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 9 + 4 = 36$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 13 - 36 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0 \quad \text{Ecuación General de la circunferencia}$$

Actividades

4. **Determina** las ecuaciones canónica y general para las circunferencias descritas:

- Radio 8, centro (-2, 3).
- Radio 2, centro (5, 2).
- Radio 4, centro (-2, -1).
- Radio 7, centro (-5, 8).
- Radio 12, centro (-1, 0).

5. **Halla** la ecuación de la circunferencia cuyo centro se halla sobre el eje de abscisas y es tangente a la recta $r: y = -x + 3$ en el punto $P = (-1, 4)$.

6. **Halla** la ecuación general de una circunferencia de radio 2 que es concéntrica con la que tiene como extremos de un diámetro los puntos $A = (0, 3)$ y $B = (8, 3)$

7. Considerando las siguientes ecuaciones de hipérbolas, determine las coordenadas del centro, vértices y focos así como la representación gráfica.

a. $\frac{(x + 2)^2}{9} - \frac{(y - 5)^2}{49} = 1$

b. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{7} = 1$

c. $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$

Prohibida su reproducción

La longitud del radio lo determinamos como la distancia entre el punto P y el centro

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$r = \sqrt{(-1 + 5)^2 + (4 - 0)^2}$$

$$r = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x + 5)^2 + y^2 = 32$$

6. Como las circunferencias son concéntricas su centro será el mismo. El centro será el punto medio entre los dos extremos del diámetro.

$$C = \left(\frac{0 + 8}{2}\right); \left(\frac{3 + 3}{2}\right)$$

$$C = (4; 2)$$

La ecuación de la circunferencia es:

$$(x - 4)^2 + (y - k)^2 = 2^2$$

$$(x - 4)^2 + (y - k)^2 = 4$$

Prohibida su reproducción

Solucionario

Actividad 13

5. Para determinar las coordenadas del centro y el radio se debe escribir la ecuación de la circunferencia en forma canónica.

a) $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$

$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) = 3 + 9 + 4$
Completamos los T.C.P

$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$ Comparamos con la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$r = \sqrt{16} = 4$

Centro: $(-3 ; -2)$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

$(x^2 + 4x + 4) + y^2 + 8y + 16 = 5 + 4 + 16$

$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$

$r = 25 = 5$

Centro: $(2 ; -4)$

c) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y = 8$

$x^2 + y^2 + 2x - 4y = 4$ Dividimos para dos

$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 4y + 4) = 4 + 1 + 4$

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Radio: $4 = 2$ Centro: $(1 ; 2)$

d) $5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$

Dividimos para cinco

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$

$x^2 - 2x + 1 + (y^2 - 4y + 4) - 1 + 1 + 4$

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$

Radio: $4 = 2$ Centro: $(1 ; 2)$

Obtención del radio y las coordenadas del centro a partir de la ecuación general de la circunferencia

A partir de la fórmula general, obtendremos la ecuación canónica de la circunferencia utilizando el método de completación para trinomios cuadrados perfectos.

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ Ecuación general de la circunferencia

$(x^2 + Ax) + (y^2 + By) = -C$ Agrupando los términos según x e y.

$(x^2 + Ax + \frac{A^2}{4}) + y^2 + By + \frac{B^2}{4} = -C + \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4}$

Aumentamos el término ideal para completar el trinomio cuadrado perfecto, dividiendo para dos y elevando al cuadrado el segundo término.

$(x + \frac{A}{2})^2 + (y + \frac{B}{2})^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$ Factorando los trinomios y resolviendo las fracciones.

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ Comparamos con la ecuación canónica.

Por lo cual, se concluye que el radio es $r = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}}{2}$

Ejemplo 7

Determinar el valor del radio y las coordenadas del centro a partir de la ecuación general de la circunferencia descrita por: $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 31 = 0$

$x^2 + y^2 + 4x + 2y - 31 = 0$

Dato

$(x^2 + 4x) + (y^2 + 2y) = 31$

Agrupando los términos según x e y.

$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) = 31 + 4 + 1$

Completando el trinomio.

$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 36$

Factorando los trinomios

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

Comparamos con la ecuación canónica

Actividades

8. Determina el valor del radio y las coordenadas del centro a partir de las ecuaciones:

a. $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$

b. $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

c. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y = 8$

d. $5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 5 = 0$

Ejemplo 9

Dada la ecuación de una elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, determinemos las coordenadas de los vértices, focos, las longitudes de los respectivos ejes mayor y menor, la excentricidad, la longitud de los lados rectos y realicemos la representación gráfica.

$$4x^2 + 9y^2 = 36 \quad \text{Dividimos para 36} \quad \frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = \frac{36}{36} \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Al comparar la expresión obtenida con $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, tenemos: $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, por lo tanto $a = 3$ y $b = 2$.

Ahora, según la expresión pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2$, reemplazamos y determinamos el valor de c , $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $c = \sqrt{3^2 - 2^2}$ entonces $c = \sqrt{5}$.

Vértices: $V_1(-a, 0)$; $V_2(a, 0) \rightarrow V_1(-3, 0)$; $V_2(3, 0)$

Focos $F_1(-c, 0)$; $F_2(c, 0) \rightarrow F_1(-\sqrt{5}, 0)$; $F_2(\sqrt{5}, 0)$

$B_1(0, 2)$; $B_2(0, -2)$

Longitud eje mayor $2a = 6$

Longitud eje menor $2b = 4$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$; $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$

Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}$; $LR = \frac{2(2)^2}{3}$; $LR = \frac{8}{3}$; $LR \approx 2,67$

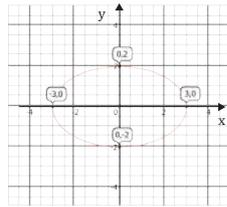


Fig. 13

Ejemplo 10

Hallemos la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(-7, 0)$ y $(7, 0)$ y sus focos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$.

Solución

Según los vértices $(-7, 0)$ y $(7, 0)$ entonces $a = 7$ y los focos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$, $c = 5$.

Ahora según la expresión pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2$, reemplazamos y determinamos el valor de b : $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $b = \sqrt{7^2 - 5^2}$ entonces $b = \sqrt{24}$.

Ahora, reemplazamos en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Resultado: $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1$

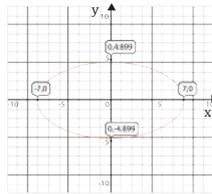


Fig. 14

9. Sea la ecuación $4x^2 + 25y^2 = 100$, **determina** las coordenadas de los vértices, focos, las longitudes de los respectivos ejes mayor y menor, la excentricidad, la longitud de los lados rectos y **realiza** la representación gráfica.

10. **Halla** la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(-8, 0)$ y $(8, 0)$ y sus focos $(-6, 0)$ y $(6, 0)$.

11. **Halla** la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(-7, 0)$ y $(7, 0)$ y sus focos $(-5, 0)$ y $(5, 0)$.

Actividades

Prohibida su reproducción

Solucionario

6. Para determinar los elementos de la elipse, se debe escribir la ecuación en su forma canónica.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$4x^2 + 25y^2 = 100 \quad \text{Dividimos para 100}$$

$$\frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = \frac{100}{100}$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a=5; b=6; c=\sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{5^2-2^2} = \sqrt{21}$$

Vértices

$$V1(-a, 0); V2(a, 0) \quad V1(-5, 0); V2(5, 0)$$

Focos

$$F1(-c, 0); F2(c, 0) \quad F1(-\sqrt{21}, 0); F2(\sqrt{21}, 0)$$

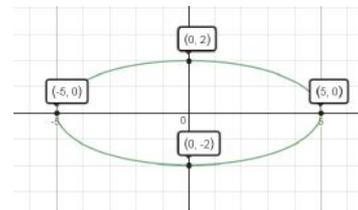
$$B1(0, b); B2(0, -b) \quad B1(0, 2); B2(0, -2)$$

Longitud Eje mayor $2a = 10$

Longitud Eje menor $2b = 4$

$$\text{Excentricidad} \quad e = \frac{c}{a}; e = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\text{Lado recto} \quad LR = \frac{2b^2}{a}; LR = \frac{2(2)^2}{5}; LR = \frac{8}{5}; LR = 1,6$$



7. Si $V1(-8; 0)$; $V2(8; 0)$ Entonces $a = 8$
Si $F1(-6; 0)$; $F2(6; 0)$ Entonces $c = 6$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}; b = \sqrt{8^2 - 6^2}; b = \sqrt{28}$$

Centro: $(0, 0)$

La ecuación de la elipse: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{28} = 1$

Prohibida su reproducción

Solucionario

9. Para determinar los elementos de la elipse, la ecuación debe expresarse en forma canónica.

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$25x^2 + 4y^2 = 100$$

$$\frac{25x^2}{100} + \frac{4y^2}{100} = \frac{100}{100}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$$

De donde $a = \sqrt{25} = 5$ Entonces los vértices serán: $V1(0,5)$; $V2(0,-5)$

$$b = \sqrt{4} = 2 \text{ Entonces } B1(2,0); B2(-2,0)$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}; c = \sqrt{25 - 4}; c = \sqrt{21}$$

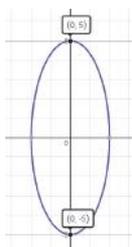
Entonces los focos serían: $F1(0, \sqrt{21})$; $F2(0, -\sqrt{21})$

$$\text{Longitud Eje mayor } 2a = 10$$

$$\text{Longitud Eje menor } 2b = 4$$

$$\text{Excentricidad } e = \frac{c}{a}; e = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\text{Lado recto } LR = \frac{2b^2}{a}; LR = \frac{2(2)^2}{5}; LR = \frac{8}{5}; LR = 1,6$$



10. Si $V1(0,4)$ y $V2(0,-4)$ Entonces

Si $F1(0,2)$ y $F2(0,-2)$ Entonces

Determinamos el valor de b

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}; b = \sqrt{4^2 - 2^2}; b :$$

Ahora reemplazamos en la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Tenemos que la distancia del punto $B_1(0, b)$ a cada foco es a. Por lo tanto, seguimos esta ecuación pitagórica y despejamos b^2 .

$$a^2 = b^2 + c^2; b^2 = a^2 - c^2;$$

Sustituimos todos los $(a^2 - c^2)$ que tengamos en la ecuación anterior por b^2

$$a^2 b^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2; a^2 x^2 + b^2 y^2 = a^2 b^2$$

Finalmente dividimos toda la ecuación para $a^2 b^2$ y simplificamos.

$$\frac{a^2 x^2}{a^2 b^2} + \frac{b^2 y^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 b^2}{a^2 b^2}; \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ ecuación de la elipse con eje focal y}$$

Ejemplo 11

Hallemos los elementos de la elipse cuya ecuación es $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

Primero: Encontramos a y b. luego sustituimos en las coordenadas de V y B.

$$a^2 = 25; a = 5 \text{ entonces los vértices serán } V_1(0,5); V_2(0,-5)$$

$$b^2 = 16; b = 4 \text{ entonces } B_1(4,0); B_2(-4,0)$$

Segundo: El valor de c lo conseguimos despejando de la ecuación

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}; c = \sqrt{25 - 16}; c = \sqrt{9}; c = 3 \text{ entonces los focos serán}$$

$$F_1(0,3); F_2(0,-3)$$

$$\text{longitud eje mayor} = 2a; \text{ longitud eje mayor} = 10$$

$$\text{longitud eje menor} = 2b; \text{ longitud eje menor} = 8$$

$$\text{lado recto } LR = \frac{2b^2}{a}; LR = \frac{2(4)^2}{5}; LR = \frac{32}{5}; LR = 6,4$$

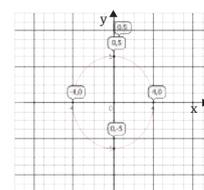


Fig. 16.

Ejemplo 12

Hallemos la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(0,3)$ y $(0,-3)$ y sus focos $(0,2)$ y $(0,-2)$.

Según los vértices $(0,3)$ y $(0,-3)$ entonces $a = 3$ y los focos $(0,2)$ y $(0,-2)$, $c = 2$.

Ahora según la expresión pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2$, reemplazamos y determinamos el valor de b.

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}; b = \sqrt{3^2 - 2^2} \text{ entonces } b = \sqrt{5}.$$

Ahora, reemplazamos en la ecuación $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$,

$$\text{Resultado: } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

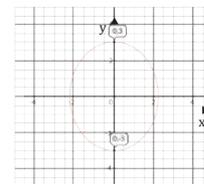


Fig. 17.

12. Dada la ecuación $25x^2 + 4y^2 = 100$, determina las coordenadas de los vértices, focos, las longitudes de los respectivos ejes mayor y menor, la excentricidad, la longitud de los lados rectos y realiza la representación gráfica.

13. Halla la ecuación de la elipse de centro en el origen cuyos vértices son los puntos $(0,4)$ y $(0,-4)$ y sus focos $(0,2)$ y $(0,-2)$.

Actividades

Prohibida su reproducción

Ejemplo 13

Determinemos la ecuación de la elipse con centro $(-2, 2)$, cuyos vértices son $(-2, 8)$ y $(-2, -4)$ y además el eje menor es 10.

Solución: Es notable que la primera componente no cambia (-2) , esta observación evidencia que la elipse se encuentra paralela al eje y . Entonces:

$V_1(h, k, k+a)$ se relaciona con $(-2, 8)$ entonces $h = -2$ y $k+a = 8$

$V_2(h, k, k-a)$ se relaciona con $(-2, -4)$ entonces $h = -2$ y $k-a = -4$

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones $k+a = 8$ y $k-a = -4$

$$k+a = 8$$

$$k-a = -4$$

$$2k = 4 \quad \text{Entonces } k = 2 \text{ y } a = 6$$

Si el eje menor es 10, tenemos que $2b = 10$ por lo cual $b = 5$.

Empleamos la fórmula de la elipse paralela al eje y que se ubica fuera del origen:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

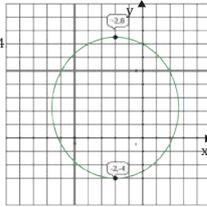


Fig. 20.

Ejemplo 14

Determinemos la ecuación de la elipse con centro $(-3, 4)$, cuyo eje mayor es paralelo al eje horizontal y el valor de la excentricidad es $\frac{2\sqrt{6}}{7}$.

Solución: Con el valor de la excentricidad, concluimos que

$$a = 7 \text{ y } c = 2\sqrt{6}.$$

Calculamos el valor de b con la expresión: $b^2 = a^2 - c^2$

$$b^2 = 49 - 24, \text{ entonces } b = 5. \text{ Entonces:}$$

$$V_1(h-a, k) \rightarrow (-10, 4)$$

$$V_2(h+a, k) \rightarrow (4, 4)$$

Empleamos la fórmula de la elipse paralela al eje x que se ubica fuera del origen:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x+3)^2}{49} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$$

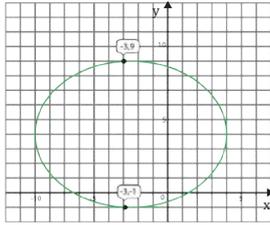


Fig. 21.

14. Una elipse se describe según la ecuación $\frac{(x-2)^2}{100} + \frac{(y-1)^2}{36} = 1$, halla las coordenadas de los vértices, focos, las longitudes de los respectivos ejes mayor y menor, el valor de la excentricidad, la longitud de los lados rectos y realiza la representación gráfica.

15. Determina la ecuación de la elipse con centro $(3, 3)$, cuyo eje mayor es paralelo al eje vertical y el valor de la excentricidad es $\frac{4}{5}$.

Actividades

Prohibida su reproducción

Solucionario

11. En la ecuación observamos que el semieje mayor esta en las x debido a que el denominador es

mayor para esa variable, por lo tanto la elipse es paralela al eje de las x y su ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Las coordenadas del centro son: $(2, 1)$

$$a = \sqrt{100} = 10 \text{ Entonces } V_1(h-a, k) \text{ y } V_2(h+a, k);$$

$$b = \sqrt{36} = 6$$

$$V_1(2-10, 1); V_1(-8, 1)$$

$$V_2(2+10, 1); V_2(12, 1)$$

Los focos son:

$$F_1(h-c, k); F_1(2-8, 1) ; F_1(-6, 1)$$

$$F_2(h+c, k); F_2(2+8, 1) ; F_2(10, 1)$$

$$\text{Longitud Eje mayor } 2a = 20$$

$$\text{Longitud Eje menor } 2b = 12$$

$$\text{Excentricidad } e = \frac{c}{a}; e = \frac{8}{10}; e = \frac{4}{5}$$

$$\text{Lado recto } LR = \frac{2b^2}{a};$$

$$LR = \frac{2(6)^2}{10}; LR = \frac{72}{10}; LR = 0,72$$

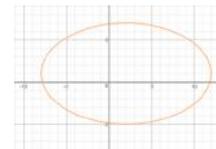
12. Si el eje mayor es paralelo al eje Y (vertical) su ecuación canónica es $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

Con el valor de la excentricidad concluimos que $c = 4$ y $a = 5$

$$\text{Por lo tanto } b = \sqrt{a^2 - c^2}; b = \sqrt{5^2 - 4^2}; b = 3$$

Ecuación de la elipse

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{25} = 1$$



Solucionario

$$\begin{aligned}
 13. \text{ a) } & 9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0 \\
 & (9x^2 - 36x) + (4y^2 - 8y) = -4 \\
 & 9(x^2 - 4x) + 4(y^2 - 2y) = -4 \\
 & 9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = \\
 & -4 + 36 + 4 \\
 & 9(x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 36 \\
 & \frac{9(x-2)^2}{36} + \frac{4(y-1)^2}{36} = \frac{36}{36} \\
 & \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1
 \end{aligned}$$

Elipse de lado mayor paralelo al eje y

$$a = 3 ; b = 2 ;$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} ; c = \sqrt{3^2 - 2^2} ; c = \sqrt{5}$$

$$\text{Centro: } (h, k) ; (3, 1)$$

$$\text{Vértices: } (h, k + a) ; (3, 4)$$

$$(h, k - a) ; (3, -2)$$

$$\text{Focos: } (h, k + c) ; (3, 2 + \sqrt{5})$$

$$(h, k - c) ; (3, 2 - \sqrt{5})$$

$$\text{Excentricidad } e = \frac{c}{a} ; e = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Lado recto } LR &= \frac{2b^2}{a} ; \\
 LR &= \frac{2(2)^2}{3} ; LR = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

Obtención de la ecuación canónica de la elipse a partir de la ecuación general

Sea la ecuación general de un lugar geométrico, $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$; si los coeficientes de A y B son del mismo signo, representa una elipse con eje paralelo al eje horizontal o vertical.

Ejemplo 15

Sea la ecuación $6x^2 + 9y^2 - 96x - 36y - 36 = 0$, hallemos la ecuación canónica de la elipse, determinemos las coordenadas del centro, vértices, focos, longitudes de los lados rectos, el valor de la excentricidad y la representación gráfica.

Solución:
 $16x^2 + 9y^2 - 96x - 36y + 36 = 0$ Dato
 $(16x^2 - 96x) + (9y^2 - 36y) = -36$ Agrupando los términos según x e y.
 $16(x^2 - 6x) + 9(y^2 - 4y) = -36$ Factor común numérico
 $16(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 - 4y + 4) = -36 + 144 + 36$ Completando los trinomios
 $16(x - 3)^2 + 9(y - 2)^2 = 144$ Factorando trinomios y realizando operaciones
 $\frac{16(x - 3)^2}{144} + \frac{9(y - 2)^2}{144} = \frac{144}{144}$ Dividiendo cada término para 144
 $\frac{(x - 3)^2}{9} + \frac{(y - 2)^2}{16} = 1$ Simplificando las fracciones

- Elipse de eje mayor paralelo al eje y.
- Valores de a, b y c correspondientemente: 4, 3 y $\sqrt{7}$.
- Centro (h, k) → Centro (3, 2)
- Vértices: (h, k + a) → (3, 6)
(h, k - a) → (3, -2)
- Focos: (h, k + c) → (3, 2 + $\sqrt{7}$)
(h, k - c) → (3, 2 - $\sqrt{7}$)
- Lado recto LR = $\frac{16(x - 3)^2}{144}$
- Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$; $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$

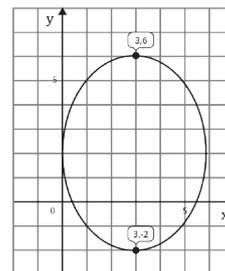


Fig. 22.

16. Considerando las siguientes ecuaciones, **determina** la ecuación canónica de la elipse, estableciendo las coordenadas del centro, vértices, focos, longitudes de los lados rectos el valor de la excentricidad; así como la representación gráfica.

a. $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$

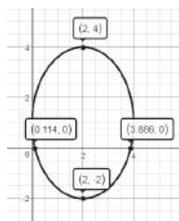
c. $16x^2 + 4y^2 + 32x + 16y - 32 = 0$

b. $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

Solucionario

$$\text{Lado recto } LR = \frac{2b^2}{a};$$

$$LR = \frac{2(2)^2}{3}; LR = \frac{8}{3}$$



b) $x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 21 = 0$

$$(x^2 - 6x) + (4y^2 + 16y) = -21$$

Agrupando los términos según X o Y

$$(x^2 - 6x) + 4(y^2 + 4y) = -21$$

Factor comun numérico

$$(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 4y + 4) = -21 + 9 + 16 \quad \text{Completando los trinomios}$$

$$(x - 3)^2 + 4(y + 2)^2 = 4$$

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{4(y+2)^2}{4} = \frac{4}{4}$$

Dividiendo para 4

$$\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{1} = 1$$

Elipse de lado mayor paralelo al eje x

$$a = 2; b = 1; c = \sqrt{a^2 - b^2}; c = \sqrt{2^2 - 1}; c = \sqrt{3}$$

Centro: $(h, k); (3, -2)$

Vértices: $(h + a, k); (5, -2)$

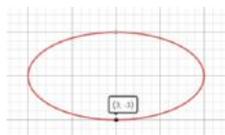
$$(h - a, k); (1, -2)$$

Focos: $(h + c, k); (5 + \sqrt{2}, -2)$

$$(h - c, k); (5 - \sqrt{2}, -2)$$

Excentricidad $e = \frac{c}{a}; e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Lado recto $LR = \frac{2b^2}{a}; LR = \frac{2(1)^2}{2}; LR = \frac{2}{2} = LR = 1$



Solucionario

$$c) \quad 16x^2 + 4y^2 + 32x + 16y - 32 = 0$$

$$(16x^2 + 32x) + (4y^2 + 16y) = 32$$

$$16(x^2 + 2x) + 4(y^2 + 4y) = 32$$

$$16(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 + 4y + 4) = 32 + 16 + 16$$

$$16(x + 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 64$$

$$\frac{16(x+1)^2}{64} + \frac{4(y+2)^2}{64} = \frac{64}{64}$$

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

Elipse de lado mayor paralelo al eje y

$$a = 4 ; \quad b = 2 ; \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} ; \quad c = \sqrt{4^2 - 2^2} ; \quad c = \sqrt{12}$$

$$\text{Centro: } (h, k) ; \quad (-1, -2)$$

$$\text{Vértices: } (h, k + a) ; \quad (-1, +2)$$

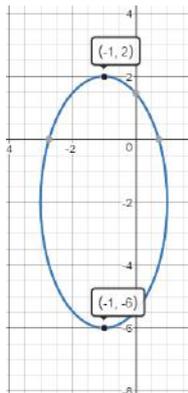
$$(h, k - a) ; \quad (-1, -6)$$

$$\text{Focos: } (h, k + c) ; \quad (-1, -2 + \sqrt{12})$$

$$(h, k - c) ; \quad (-1, -2 - \sqrt{12})$$

$$\text{Excentricidad} \quad e = \frac{c}{a} ; \quad e = \frac{\sqrt{12}}{4} , \quad e = \frac{2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Lado recto} \quad LR = \frac{2b^2}{a} ; \quad LR = \frac{2(2)^2}{4} ; \quad LR = 2$$



Recordamos que, para obtener la ecuación canónica, hay que igualar las distancias que se obtienen desde un punto de la parábola $P(x, y)$ al foco $(h; k + p)$ y a la directriz $L(x; k - p)$. Así, tenemos que:

$$d(P, L) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad d(P, F) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d(P, L) = \sqrt{(x - x)^2 + (k - p - y)^2} \quad d(P, F) = \sqrt{(h - x)^2 + (k + p + y)^2}$$

$$d(P, L) = k - p - y$$

Igualamos distancias y resolvemos

$$(k - p - y)^2 = (\sqrt{(h - x)^2 + (k + p + y)^2})^2$$

$$k^2 + p^2 + y^2 - 2kp - 2ky - 2py = h^2 - 2hx + x^2 + k^2 + p^2 + y^2 + 2kp - 2ky - 2py$$

$$x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4kp$$

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \text{ ecuación canónica}$$

Ejemplo 18

Determinemos la ecuación de la parábola que cumple con las condiciones dadas: vértice $(-3, -2)$ y ecuación de la directriz es $y - 3 = 0$.

Solución: La ecuación de la directriz es $y = k - p$, y disponemos del dato $y - 3 = 0$, luego, se concluye que $3 = k - p$, pero, según el vértice $k = -2$ entonces despejamos p .

$$3 = k - p; 3 = -2 - p \quad \text{donde } -p = 5 \text{ entonces } p = -5$$

Así, con el valor de p y las coordenadas del vértice, reemplazamos en la ecuación:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k); (x + 3)^2 = 4(-5)(y + 2); (x + 3)^2 = -20(y + 2)$$

Ejemplo 19

Hallemos los elementos de la parábola que corresponde a la siguiente ecuación $(y - 4)^2 = 8(x + 2)$, luego realicemos la representación gráfica.

Datos: $(y - 4)^2 = 8(x + 2)$ $V = ?$ $F = ?$ directriz = ? eje focal = ? $LR = ?$

Solución:

Comparamos con la ecuación general $(y - k)^2 = 4p(x - h)$, por lo que:

$$4p = 8 \rightarrow p = 2$$

• Vértice $(-2, 4)$

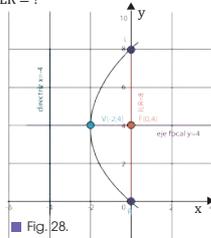
• Coordenadas del foco $(0, 4)$

• Ecuación de la directriz $x = -4$

• Ecuación del eje focal $y = 4$

• Longitud del lado recto $LR = 8$

• Como $p > 0$, las ramas de la parábola abren hacia arriba.



17. Representa gráficamente las parábolas.

a. $(x - 3)^2 = -3(y + 4)$

b. $y^2 = -8(y + 3)$

c. $x^2 = -\frac{1}{2}(y - 1)$

18. Determina la ecuación de la parábola cuyo vértice y foco sean $V(3, 4)$; $F(3, 6)$

Actividades

Prohibida su reproducción

Solucionario

a) Para facilitar el gráfico determinaremos sus elementos. Es una parábola con eje de simetría

paralelo al eje y .

Vértice: $(3, -4)$

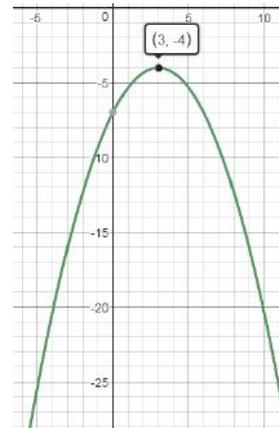
$$4p = -3$$

$$p = -\frac{3}{4}$$

Despejando P nos indica que se abre hacia abajo

Foco: $(h, k + p)$; $(3, -\frac{19}{4})$

Directriz: $y = k - p$; $y = \frac{-13}{4}$



b) $y^2 = -8(x + 3)$

Parábola con eje de simetría paralela al eje

Vértice: $(-3, 0)$

$$4p = -8$$

$$p = -2$$

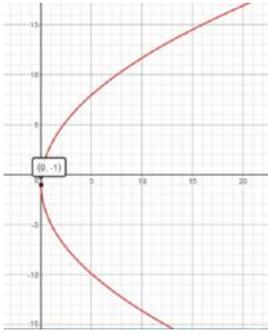
Despejando P nos indica que se abre hacia

Foco: $(h + p, k)$; $(-5, 0)$

Prohibida su reproducción

Solucionario

Eje de simetría: $y = k$; $y = -1$



c) $x^2 + 4x + 20y - 96 = 0$

$$x^2 + 4x = -20y + 96$$

$$x^2 + 4x + 4 = -20y + 96 + 4$$

$$(x + 2)^2 = -20(y + 5)$$

$$h: -2 ; k = -5 ; p = -5$$

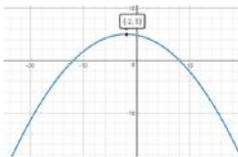
Vértice: (h, k) ; $(-2, -5)$

Foco: $(h, k + p)$; $(-2, -10)$

Directriz: $y = k - p$; $y = 0$

Longitud lado recto: $LR = 20$

Eje de simetría: $x = h$; $x = -2$



$$x^2 + 8x + 12y + 16 = 0$$

c) $(y - 2)^2 = 24(x + 6)$

$$y^2 - 4y + 4 = 24x + 144$$

$$y^2 - 4y - 24x + 4 - 144 = 0$$

$$y^2 - 4y - 24x - 140 = 0$$

d) $(y + 5)^2 = 36(x - 1)$

$$y^2 + 10y + 25 = 36x - 36$$

$$y^2 + 10y - 36x + 25 + 36 = 0$$

$$y^2 + 10y - 36x + 61 = 0$$

17. a) $(x - 3)^2 = 8(y - 2)$

$$x^2 - 6x + 9 = 8y - 16$$

$$x^2 - 6x - 8y + 9 + 16 = 0$$

$$x^2 - 6x - 8y + 25 = 0$$

b) $(x + 4)^2 = -12y$

$$x^2 + 8x + 16 = -12y$$

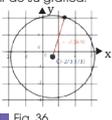
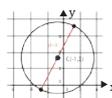
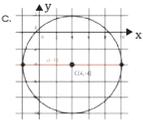
Elevando el binomio al cuadrado

Ordenando según x



Ejercicios y problemas

1 Circunferencia

- Determina la ecuación de la circunferencia y traza su gráfica.
 - $C(0, 0); r = 5$
 - $C(4, 2); r = 4$
 - $C(-3, 2); r = 2$
 - $C(-4, -2); d = 8$
- Verifica si el punto dado pertenece o no a la circunferencia.
 - $P(-1, -3)$ a $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 4$
 - $P(0, 2)$ a $(x+5)^2 + (y+1)^2 = 5$
 - $P(-9, 3)$ a $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 81$
 - $P\left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{5}\right)$ a $(x-7)^2 + y^2 = 64$
- Determina las ecuaciones de la circunferencia a partir de su gráfica.
 -  Fig. 36.
 -  Fig. 37.
 -  Fig. 38.
- Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos que distan 10 metros del punto $P = (-3, 8)$.
- Halla la ecuación del lugar geométrico del plano formado por los puntos que distan 7 unidades del punto $A = (-4, -5)$.
- Determina las ecuaciones de las circunferencias siguientes:
 - Centro $(2, -1)$ y radio 3.
 - Centro $(3, 0)$ y radio 4.
 - Centro $(-1, 5)$ y pasa por el punto $P = (-4, -6)$.

- Analiza las ecuaciones canónicas de circunferencias y determina las coordenadas del centro y el valor del radio.
 - $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 49$
 - $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 36$
 - $x^2 + (y+5)^2 = 9$
 - $(x+12)^2 + y^2 = 144$
- Dadas las ecuaciones generales, halla las coordenadas del centro de la circunferencia así como el valor del radio.
 - $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 10y - 11 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 121 = 0$
- Calcula los valores de m para que el punto $P = (1, 1)$ pertenezca a la circunferencia descrita por $x^2 + y^2 - 2mx + 4my - 4m^2 = 0$.
- Determina la posición relativa de los puntos $A = (5, 4)$, $B = (-1, 1)$ y $C = (2, -1)$ respecto a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.

2 Elipse

28. Dadas las gráficas, halla la ecuación de la elipse.

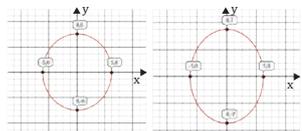


Fig. 39.

Fig. 40.

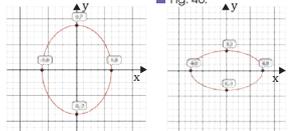


Fig. 41.

Fig. 42.

Prohibida su reproducción

Solucionario

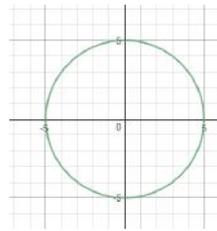
Circunferencia

18. Ecuación de la circunferencia

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

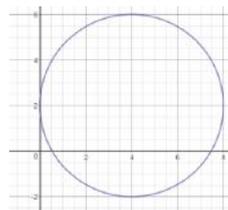
a) $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$

$$x^2 + y^2 = 25$$



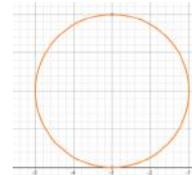
b) $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$

$$(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 16$$



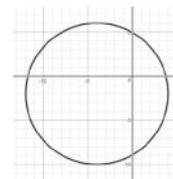
c) $(x - (-3))^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$$



d) $(x - (-4))^2 + (y - (-2))^2 = 8^2$

$$(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 64$$



Solucionario

19. Si el punto pertenece a la circunferencia debería verificar la ecuación

a) $((1 - 1) + 3)^2 + (-3 - 2)^2 = 4$

$$2^2 + (-5)^2 = 4$$

$$4 + 25 = 4$$

$$29 \neq 4$$

P no pertenece a la circunferencia

b) $(0 + 5)^2 + (2 + 1)^2 = 5$

$$25 + 9 = 5$$

$$34 \neq 5$$

P no pertenece a la circunferencia

c) $(-9 - 4)^2 + (3 - 2)^2 = 81$

$$169 + 1 = 81$$

$$170 \neq 81$$

P no pertenece a la circunferencia

d) $(\frac{1}{3} - 7)^2 + (-\frac{3}{5})^2 = 64$

$$64 \frac{181}{225} \neq 64$$

P no pertenece a la circunferencia

$$(-\frac{20}{2})^2 + \frac{9}{25} = 64$$

$$\frac{400}{9} + \frac{9}{25} = 64$$

20. Para determinar la ecuación se debe identificar el centro y el radio.

a) El centro tiene coordenadas $(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ y el radio $r = \sqrt{\frac{59}{9}}$

Entonces la ecuación $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$(x + \frac{2}{3})^2 + (y - \frac{1}{3})^2 = \frac{59}{9}$$

b) $C = (-1, 3)$

$$d = 8 \quad y \quad r = \frac{d}{2} \quad ; \quad r = 4$$

La ecuación de la circunferencia es $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$

c) $C = (4, -4)$

$$d = 12 \quad y \quad r = \frac{d}{2} \quad ; \quad r = 6$$

La ecuación de la circunferencia es $(x - 4)^2 + (y + 4)^2 = 36$

Solucionario

El lugar geométrico de los puntos que distan 10 metros del punto P es la circunferencia de radio 10 y

centro P. Es decir, la circunferencia que tiene como ecuación:
 $(x + 3)^2 + (y - 8)^2 = 100$

El lugar geométrico del plano formado por los puntos que distan 7 unidades del punto A es la

circunferencia de radio 7 y centro A. Es decir, la circunferencia que tiene como ecuación:

$$(x + 4)^2 + (y + 5)^2 = 49$$

Ecuación de la circunferencia: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

a) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 32 = 9$

b) $(x - 3)^2 + y^2 = 42 = 16$

c) $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 130$, donde r es la distancia entre el centro y P: $r = d(C, P) = (-4 + 1)^2 + (-6 - 5)^2 = 130$

24. Ecuación canónica de la circunferencia

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

a) $C = 3,1$ y $r = 7$

b) $C = 5, -3$ y $r = 6$

c) $C = 0, -5$ y $r = 3$

d) $C = -12, 0$ y $r = 12$

25.

a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

$$(x^2 - 6x) + (y^2 - 4y) = 12$$

$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 12 + 9 + 4$$

$$x - 3^2 + y - 2^2 = 25$$

$$C = 3, 2; r = 5$$

b) $x^2 + y^2 - 10y - 11 = 0$

$$x^2 + y^2 - 10y = 11$$

$$x^2 + (y^2 - 10y + 25) = 11 + 25$$

$$x^2 + y - 5^2 = 36$$

$$C = 0, 5; r = 6$$

c) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

$$(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) = 7$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) = 7 + 1 + 1$$

$$x - 1^2 + y + 1^2 = 9$$

$$C = 1, -1; r = 3$$

d) $x^2 + y^2 - 121 = 0$

$$x^2 + y^2 = 121$$

$$C = 0, 0; r = 11$$

Sustituimos el punto P en la ecuación: $12 + 12 - 2m + 4m - 4m^2 = 0 \Rightarrow m = 1, m = -1/2$. Calculamos el centro y el radio para estos dos valores:

$$m = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

$$m = -2a \Rightarrow -2 = -2a \Rightarrow a = 1; n = -2b \Rightarrow 4 = -2b \Rightarrow b = -2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = (1, -2); p = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow -4 = 12 + (-2)^2 - r^2 \Rightarrow r = 3$$

$$m = -1/2 \Rightarrow x^2 + y^2 + x - 2y - 1 = 0$$

$$1 = -2a \Rightarrow a = -1/2; n = -2b \Rightarrow -2 = -2b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = (-1/2, 1)$$

$$p = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow -1 = (-1/2)^2 + 12 - r^2 \Rightarrow r = 1,5$$

De las expresiones de m, n y p obtenemos:

$$-4 = -2a \Rightarrow a = 2; -2 = -2b \Rightarrow b = 1; -4 = 22 + 12 - r^2 \Rightarrow r = 3$$

Calculamos ahora las distancias entre los puntos A, B y C con el centro de la circunferencia P = (2, 1) y las comparamos con el radio r:

$$d(A, P) = (2 - 5)^2 + (1 - 4)^2 = 18 > 3 = r \Rightarrow \text{El punto}$$

A es exterior a la circunferencia.

$$d(B, P) = (2 + 1)^2 + (1 - 1)^2 = 3 = r \Rightarrow \text{El punto B pertenece}$$

a la circunferencia.

$$d(C, P) = (2 - 2)^2 + (1 + 1)^2 = 2 < 3 = r \Rightarrow \text{El punto C es interior a la circunferencia.}$$

Elipse

a) La elipse tiene su centro en el origen $a = 6$ y $b = 5$. Su eje mayor es paralelo al eje y, por lo tanto la ecuación será:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$$

b) La elipse tiene su centro en el origen $a = 7$ y $b = 5$. Su eje mayor es paralelo al eje y, por lo tanto la ecuación será:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$$

c) La elipse tiene su centro en el origen $a = 6$ y $b = 3$. Su eje mayor es paralelo al eje x, por lo tanto la ecuación será:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Solucionario

31. De los focos concluimos que la elipse tiene su centro en el origen $c = 4$

Su eje mayor es paralelo al eje x

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad ; \quad a^2 = b^2 + 16$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Reemplazando a^2 en la ecuación

$$\frac{x^2}{b^2+16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Reemplazamos el punto P en la ecuación

$$\frac{3^2}{b^2+16} + \frac{1^2}{b^2} = 1$$

Reemplazamos el punto P en la ecuación

Resolviendo la ecuación tenemos que:

$$b^2 = 8$$

Entonces $a^2 = 24$

La ecuación de la elipse será:

$$\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{8} = 1$$

a) Elipse con el eje mayor paralelo al eje x; comparamos con:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$a = 4 \quad ; \quad b = 3$$

Centro: (h, k) ; $(3, -2)$

Vértice: $(h - a, k)$; $(-1, -2)$

$(h + a, k)$; $(7, -2)$

Longitud Eje mayor $2a = 8$

Longitud Eje menor $2b = 9$

b) Elipse con el eje mayor paralelo al eje y; comparamos con:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

$$a = 10 \quad ; \quad b = 9$$

Centro: (h, k) ; $(-5, 3)$

Vértice: $(h, k - a)$; $(-5, -7)$

$(h, k + a)$; $(-5, 13)$

Longitud Eje mayor $2a = 20$

Longitud Eje menor $2b = 18$

11. **Halla** los vértices, los focos y la excentricidad de siguientes elipses:

a. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ c. $5x^2 + 6y^2 = 30$

b. $9x^2 + 4y^2 = 36$ d. $x^2 = 4 - 2y^2$

12. **Halla** la ecuación de las elipses determinadas por las siguientes condiciones:

a. Focos $(\pm 4, 0)$. Vértices: $(0, \pm 5)$.

b. Longitud del eje mayor: 6. Longitud del eje menor: Focos en el eje X.

c. Focos: $(\pm 5, 0)$. Longitud del eje mayor: 12.

d. Extremos del eje menor: $(0, \pm 3)$. Distancia focal: 8.

e. Excentricidad: 0,8. Focos: $(\pm 1, 5, 0)$.

f. Corta el eje de ordenadas en los puntos $A = (0, 6)$; $A' = (0, -6)$ y la excentricidad es $e = \frac{1}{3}$

13. **Halla** la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P = (3, 1)$ y tiene sus focos en $F = (4, 0)$ y $F' = (-4, 0)$

14. **Halla** la ecuación de las elipses que satisfacen las siguientes condiciones:

a. Foco $(7, 2)$. Vértice: $(9, 2)$. Centro: $(4, 2)$.

b. Centro: $(1, 4)$. Distancia focal: 16.

Eje mayor: Paralelo al eje OX y de longitud 20.

15. **Halla** el centro y los focos de las siguientes elipses de ecuación:

a. $\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y+4)^2}{16} = 1$

b. $\frac{(x-1)^2}{100} + \frac{(y+4)^2}{36} = 1$

16. La Luna describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra, que es uno de sus focos. Si la excentricidad de la órbita lunar es 0,84 y la distancia focal es de 369 200 km, **halla** la distancia máxima a la que se encuentra la Tierra de la Luna.

17. **Halla** las coordenadas del punto medio de la cuerda que determinan la recta $x + 2y - 1 = 0$ y la elipse $x^2 + 2y^2 = 3$.

18. **Analiza** las ecuaciones canónicas de elipses y determina las coordenadas del centro, vértice y las longitudes de los ejes mayor y menor.

a. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$

b. $\frac{(x+5)^2}{81} + \frac{(y-3)^2}{100} = 1$

19. Dadas las ecuaciones generales, **halla** la ecuación canónica y **determina** las coordenadas del centro de la elipse y los valores de a, b y c.

a. $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$

b. $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y = 116$

c. $100x^2 + 81y^2 - 486y - 7371 = 0$

3 Parábola

20. **Halla** el valor del parámetro p de la parábola $x^2 = -2py$ sabiendo que el punto $P = (-6, -1)$ está contenido en ella.

21. **Halla** el foco y la directriz de las siguientes parábolas:

a. $y^2 = -8x$ c. $y = 5x^2$

b. $x^2 = 12y$ d. $8x^2 + 12y = 0$

22. **Determina** en su forma reducida las ecuaciones de las siguientes parábolas:

a. $6y^2 - 12x = 0$

b. $15x^2 - y = 42y$

A continuación, indica en cada caso el valor del parámetro p, las coordenadas del foco y la ecuación de la directriz.

23. **Halla** la ecuación de las parábolas que satisfacen las siguientes condiciones:

a. Vértice: $(0, 0)$. Foco: $(-2, 0)$. Directriz: $x = 2$.

b. Vértice: $(0, 0)$. Directriz: $y = 6$.

c. Foco: $(0, -5)$. Directriz: $y = 5$.

d. Vértice: $(0, 0)$. Eje de simetría: eje OY. Pasa por el punto $P = (-3, 3)$.

Solucionario

37.

a) $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 4 = 0$

$$(9x^2 - 36x) + (4y^2 - 8y) = -4$$

$$9(x^2 - 4x) + 4(y^2 - 2y) = -4$$

$$9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = -4 + 36 + 4$$

$$9(x - 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 36$$

$$\frac{9(x-2)^2}{36} + \frac{4(y-1)^2}{36} = \frac{36}{36}$$

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

$$C = (2,1)$$

$$a = 3 ; b = 2 ; c = \sqrt{3^2 - 2^2} ; c = \sqrt{5}$$

b) $9x^2 + 25y^2 - 18x + 100y = 116$

$$(9x^2 + 18x) + (25y^2 + 100y) = 116$$

$$9(x^2 + 2x) + 25(y^2 + 4y) = 116$$

$$9(x^2 + 2x + 1) + 25(y^2 + 4y + 4) = 116 + 9 + 100$$

$$9(x + 1)^2 + 25(y + 2)^2 = 225$$

$$\frac{9(x+1)^2}{225} + \frac{25(y+2)^2}{225} = \frac{225}{225}$$

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$$

$$C = (-1, -2)$$

$$a = 5 ; b = 3 ; c = \sqrt{5^2 - 3^2} ; c = 4$$

c) $100x^2 + 81y^2 - 486y - 7371 = 0$

$$(100x^2) + (81y^2 - 486y) = 7371$$

$$100x^2 + 81(y^2 - 6y) = 7371$$

$$100x^2 + 81(y^2 - 6y + 9) = 7371 + 729$$

$$100x^2 + 81(y - 3)^2 = 8100$$

$$\frac{100x^2}{8100} + \frac{81(y-3)^2}{8100} = \frac{8100}{8100}$$

Hipérbolas

42.

a) Vértice: (h, k) ; $(4, 2)$

Longitud lado recto:

$$LR = |4p| ; LR = 24$$

b) Vértice: (h, k) ; $(-5, -3)$

Longitud lado recto:

$$LR = |4p| ; LR = 16$$

c) Vértice: (h, k) ; $(3, 0)$

Longitud lado recto:

$$LR = |4p| ; LR = 20$$

d) Vértice: (h, k) ; $(0, -7)$

Longitud lado recto:

$$LR = |4p| ; LR = 36$$

43. No hay ecuaciones

Solucionario

47. El gráfico nos indica que es una elipse con centro en el origen y eje mayor paralelo al eje x . Su ecuación canónica es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Como: $a = 6$; $b = 5$

Entonces la respuesta es $C = \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$

MÁS A FONDO

49. Para reconocer las ecuaciones de la cónicas deben estar en forma canónica.

$$4x^2 - 60y^2 + 120y - 45 = 0$$

$$4x^2 - 60(y^2 - 2y) = 45$$

$$4x^2 - 60(y^2 - 2y + 1) = 45 - 60$$

$$4x^2 - 60(y - 1)^2 = -15$$

$$\frac{60(y-1)^2}{15} - \frac{4x^2}{15} = 1$$

$$\frac{(y-1)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{x^2}{\frac{15}{4}} = 1 \quad \text{Hipérbola}$$

Para finalizar

1. Sea la siguiente gráfica:

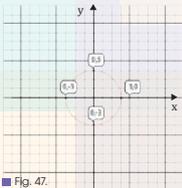


Fig. 47.

- ¿Cuáles son los elementos que definen de forma total a una circunferencia?
- ¿Cuál es el valor del radio?
- Escribe** la ecuación respectiva
- ¿Cómo varía la ecuación de la circunferencia si el centro se traslada 4 unidades a la derecha?
- ¿Cómo se explicaría el hecho de que al recorrer 4 unidades a la derecha, que significaría un aumento de cuatro unidades (+4), en la ecuación aparezca (-4)?
- En cambio ¿Cómo varía la ecuación de la circunferencia si el centro se traslada tres unidades hacia arriba?

2. Sea la gráfica:

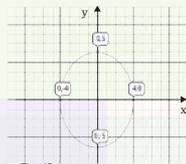


Fig. 48.

- ¿Cuál es la distancia del eje mayor?
 - ¿Cuál es la distancia del eje menor?
 - ¿Cuál es la ecuación de la gráfica?
 - ¿Cómo cambiaría la ecuación si el eje mayor se trasladase al eje horizontal y el eje menor al eje vertical?
 - En una elipse, ¿Cuál de las variables entre a, b y c, es mayor?
 - Según la gráfica, ¿cuál sería la ecuación si la elipse se traslada 2 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia abajo?
 - ¿Cómo diferenciamos si una elipse es paralela al eje x o paralela al eje y?
3. ¿Cómo se diferencian las ecuaciones canónicas de la elipse e hipérbola?

4. Para la expresión $x^2 = -20y$ el lado recto y la directriz es:

- LR = 10, y = 5
- LR = 5, y = - 4
- LR = 20, y = 5
- LR = -20, y = - 4

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y **autoevalúate** en tu cuaderno:

Trabajo personal

- ¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?
- ¿He cumplido mis tareas?
- ¿Qué aprendí en esta unidad?

Trabajo en equipo

- ¿He compartido con mis compañeros y compañeras?
- ¿He respetado las opiniones de los demás?

Escribe la opinión de tu familia.

Pide a tu profesor o profesora sugerencias para mejorar y **escríbelas**.

Solucionario

- Su centro y el radio
 - $r=3$
 - $x^2 + y^2 = 9$
 - Nuevo centro (4; 0) ; $(x - 4)^2 + y^2 = 9$
 - Ya que la ecuación de una circunferencia es $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
Si $h=4$ al reemplazar en la ecuación queda $(x - 4)^2 + y^2 = 9$
 - Nuevo centro (0; 3) ; $x^2 + (y - 3)^2 = 9$
- Longitud eje mayor =2a; Longitud eje mayor=10
 - Longitud eje menor =2b; Longitud eje menor =8
 - Elipse con eje mayor paralelo a Y y el centro en el origen $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$
 - Sería una elipse con el eje mayor paralelo al eje x $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$
 - a es el eje mayor, porque es la distancia del centro al vértice
 - Nuevo centro (2;-4)
 $\frac{(x - 2)^2}{16} + \frac{(y + 4)^2}{25} = 1$
 - Cuando el valor más grande esta debajo de las x la elipse es paralela al eje contrario es paralela al eje de las Y
- Se diferencian porque en la elipse términos se suman, mientras que en hipérbola los términos se restan
- Lado recto =14pl, la ecuación can es $x^2 = 4px$, igual cuando $4p=-20$; $p=-5$
Directriz $y=-p$; $y=-5$
 $lr = |4p|$; $Lr = 20$
Entonces la opción correcta es C

Solucionario

Zona Wifi

La papiroflexia y las cónicas

Respuesta sugerida:

Hipérbola:

<http://links.edebe.com/u29nas>

Elipse (método del jardinero):

— Mark Twain y el cometa Halley

Calculamos primero la semidistancia focal, c , a partir de la excentricidad, e , y el semieje mayor, a :

$$e = c/a \Rightarrow c = e \cdot a = 0,967\ 990 \cdot 17,857\ 619 = 17,285\ 997\text{UA}$$

Antenas parabólicas

Respuesta sugerida:

Los cables de los puentes colgantes tienen forma parabólica; la forma de los telescopios, detectores de radar y reflectores luminosos son parabólicos; algunos marcos fotográficos tienen forma elíptica.

Óvalos, ovoides y elipses

Respuesta sugerida:

Óvalo: Curva cerrada y plana formada por cuatro arcos de circunferencia tangentes entre sí e iguales dos a dos.

Ovoide: Curva cerrada y plana formada por cuatro arcos de circunferencia tangentes entre sí, dos iguales y dos desiguales.

Se pueden relacionar con una elipse.

Respuesta sugerida:

Coinciden en que son curvas cerradas y planas formadas por arcos de circunferencia tangentes entre sí. Se diferencian en que el óvalo está compuesto por un número par de arcos de circunferencia enlazados entre sí y simétricos respecto a sus ejes mayor y menor normales entre sí; y el ovoide está compuesto por dos arcos de igual radio, y otros dos de distinto radio y tiene un eje de simetría que contiene a los centros de los arcos desiguales

- 1** Halla la ecuación de la circunferencia:
- Cuyo centro es $C = (2, -3)$ y pasa por el punto $P = (1, 4)$.
 - Que tiene por diámetro el segmento \overline{MN} siendo $M = (-3, -3)$ y $N = (3, 3)$.
 - Que tiene por diámetro el segmento \overline{PQ} siendo $P = (-6, 6)$ y $Q = (2, 0)$.
 - Que tiene su centro en el punto de intersección de las rectas $2x + 5y = 10$ y $x - 8y = 26$ y su radio es 2.

Sol.: a) $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 50$;
 b) $x^2 + y^2 = 18$;
 c) $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$;
 d) $(x-10)^2 + (y+2)^2 = 4$

- 2** Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $x + 2y = 0$ y pasa por los puntos $P = (4, 3)$ y $Q = (0, 1)$.

Sol.: a) $(x-4)^2 + (y+2)^2 = 25$

- 3** Halla la ecuación de la circunferencia de radio 4 y concéntrica a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 2x + 10y + 17 = 0$$

Sol.: $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 16$

- 4** Halla las posiciones relativas de las circunferencias y rectas siguientes:

a) $C: x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ y $r: 2x - y - 4 = 0$.

b) $C: x^2 + y^2 - 2x + 3y + 2 = 0$ y

$r: 2x + y - 3 = 0$.

- 5** Determina las coordenadas de los focos y de los vértices, así como la excentricidad de las siguientes elipses:

a) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ b) $2x^2 + y^2 = 4$

Sol.: a) $F = (0, \pm\sqrt{5})$, $A = (0, \pm 3)$, $B = (\pm 2, 0)$, $e = \sqrt{5}/3$;

b) $F = (0, \pm\sqrt{2})$, $A(0, \pm 2)$, $B = (\pm\sqrt{2}, 0)$, $e = \sqrt{2}/2$

- 6** Escribe las ecuaciones de las hipérbolas que cumplen las siguientes características:

a) Centro: $C = (-3, 0)$. Foco: $F = (2, 0)$. $e = 5/4$.

b) Vértices: $A = (6, 2)$, $A' = (-2, 2)$. Distancia focal: 10.

Sol.: a) $\frac{(x+3)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$;

b) $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

- 7** Determina las coordenadas del centro, de los focos, de los vértices y la excentricidad de la hipérbola que tiene por ecuación:

$$\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

Sol.: $C = (1, 3)$, $F = (1 \pm \sqrt{13}, 3)$ $A = (4, 3)$,
 $A' = (-2, 3)$, $e = \sqrt{13}/3$

- 8** Escribe las ecuaciones que corresponden a las parábolas que cumplen las siguientes propiedades:

a) Vértice: $V = (2, -2)$. Directriz: $y = -5$.

b) Foco: $F = (6, 1)$. Vértice: $V = (2, 1)$.

Sol.: a) $(x-2)^2 = 12(y+2)$; b) $(y-1)^2 = 16(x-2)$

- 9** Halla la intersección, en caso de que exista, de la parábola que tiene por ecuación $y^2 = 9x$ con la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Sol.: $A = (16, 94, -12, 35)$, $B = (16, 94, 12, 35)$

- 10** Clasifica las siguientes cónicas justificando en cada caso tu respuesta:

a) $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$

b) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$

c) $y = 3x^2$

A continuación, halla los elementos que definen a cada una de ellas.

- 11** Durante un partido de fútbol, un jugador chuta a portería para marcar un gol.

Observamos que la pelota sigue una trayectoria parabólica de ecuación:

$$(x-11)^2 = -24\left(y - \frac{121}{24}\right)$$

en la que x indica el desplazamiento horizontal e y el desplazamiento vertical. Ambas distancias están expresadas en metros.

- a) ¿Qué altura máxima alcanzará la trayectoria de la pelota?

- b) ¿A qué distancia del jugador volverá a tocar el suelo?

- c) Si la pelota se dirige a la portería, que está situada a 20 metros del jugador, ¿entrará o pasará por encima del travesaño situado a una altura de 2,40 metros?

Sol.: a) 121/24 m; b) 22 m

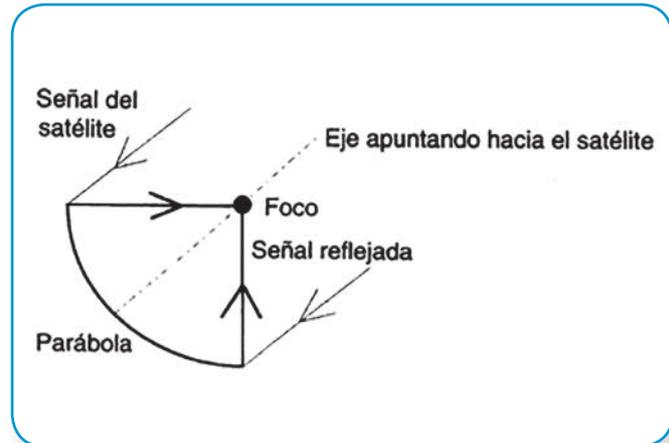
AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS

Una de las aplicaciones de las ecuaciones cónicas más usadas, es la de las antenas parabólicas, útiles en la Ingeniería de Telecomunicaciones, por medio ellas podemos enviar información a grandes distancia, triangulando satélites. Así captamos señales de televisión , radio y también señales del espacio, que los astrofísicos usan como recurso fundamental para la observación del universo.

La curva usada en esta imagen es la de una parábola, si la dibujas en un plano cartesiano, obtendrás una ecuación de segundo grado, de la forma:

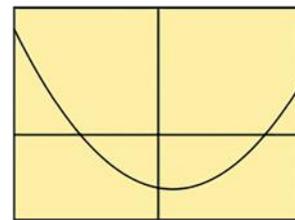
Como puedes observar, la radiación electromagnética, rebota en el plato de la antena con forma parabólica y se concentra en el foco para mejorar la recepción de estas señales.

Actualmente el radiotelescopio más grande del mundo se terminó de construir en el 2016 en China

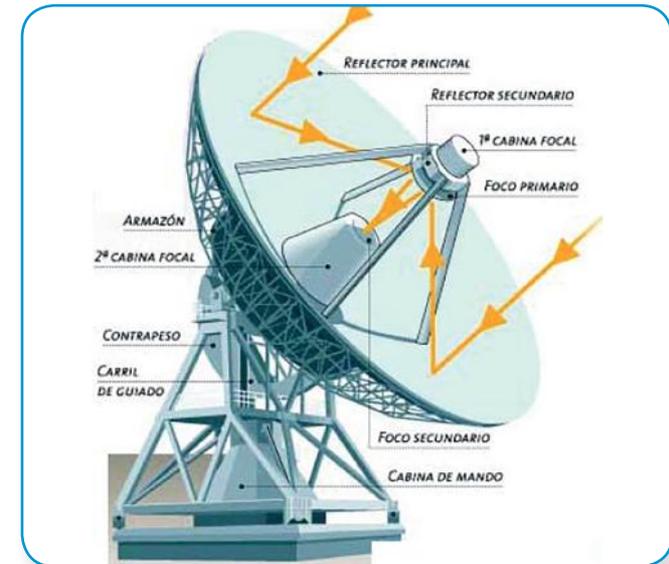


Ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



Solucionario

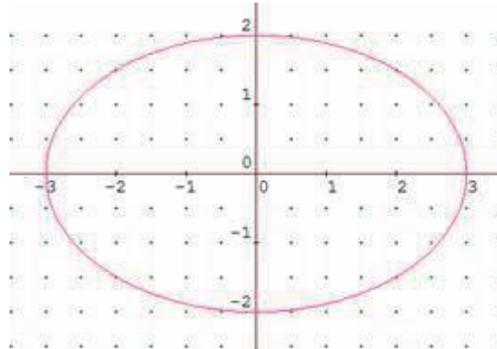
1. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene:

a) el centro en el punto $(2, 5)$ y el radio es igual a 7.

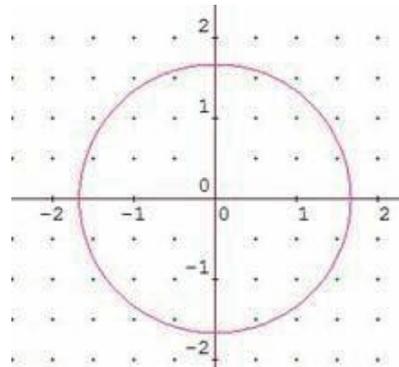
b) un diámetro con extremos los puntos $(8, -2)$ y $(2, 6)$.

2. Determina las ecuaciones que representa a las siguientes cónicas

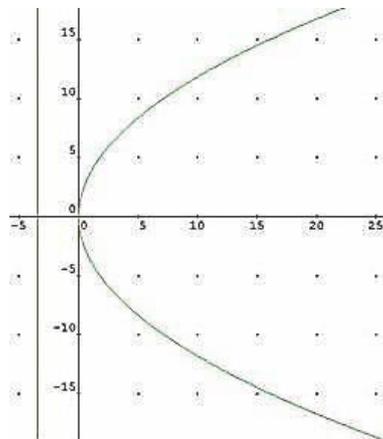
a.



b.



c.



Solucionario

a) La ecuación de la circunferencia de centro (a, b) y radio r es $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

Así, la ecuación de la circunferencia pedida es $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 49$.

Realizando operaciones queda $x^2 + y^2 - 4x - 10y - 20 = 0$.

b) El centro de la circunferencia es el punto medio del diámetro de extremos $(8, -2)$ y $(2, 6)$, es decir, $\left(\frac{8+2}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) = (5, 2)$

El radio es la distancia del centro a un punto cualquiera de la circunferencia, por ejemplo al $(8, -2)$, es decir, $r = d((8, -2), (5, 2)) = \sqrt{(8-5)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{9+16} = 5$.

Por tanto, la ecuación de la circunferencia es $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ y realizando operaciones $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 4 = 0$.

- a. En la gráfica observamos una elipse con eje mayor paralelo al eje x , su semieje mayor y su semieje menor es 2, por lo tanto la ecuación de la elipse será

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

- b. En la gráfica se observa una circunferencia con centro en el origen y de radio $\frac{3}{2}$, por lo tanto la ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$$

- c. En la gráfica observamos una parábola con eje focal en el eje x y vértice en el origen, por lo tanto el valor de p es igual a 5, por lo que la ecuación de la parábola será:

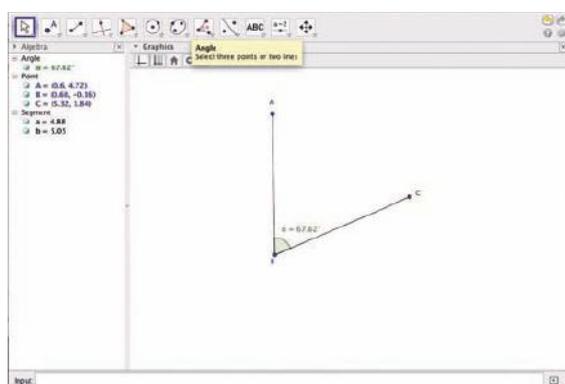
$$y^2 = 20x$$

Solucionario

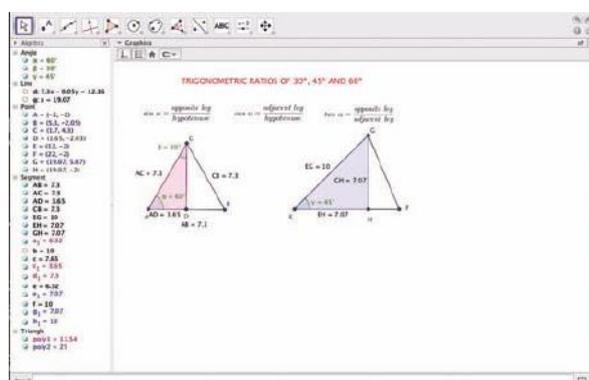
GeoGebra permite tratar la trigonometría de una forma dinámica. Podemos utilizar las pantallas de **Vista Algebraica (Algebra)** y **Vista Gráfica (Graphics)**. Además, con la opción **Deslizador (Slider)** es posible obtener distintos valores de un ángulo para determinar los valores de sus razones trigonométricas.

Trigonometría

La amplitud de un ángulo (en sentido antihorario; es decir, C , B , A) puede obtenerse a partir de tres puntos que determinan dos rectas en el plano. Podemos utilizar el icono  para dibujar los puntos y  para marcar los segmentos. Al mover los puntos con  se observa que el valor del ángulo va variando según la nueva amplitud.



En esta imagen se muestran las razones trigonométricas de 30° , 45° y 60° . Al mover los puntos A , B y D , G de cada triángulo se puede observar que el valor de las razones trigonométricas no varía, aunque cambie el tamaño del triángulo.

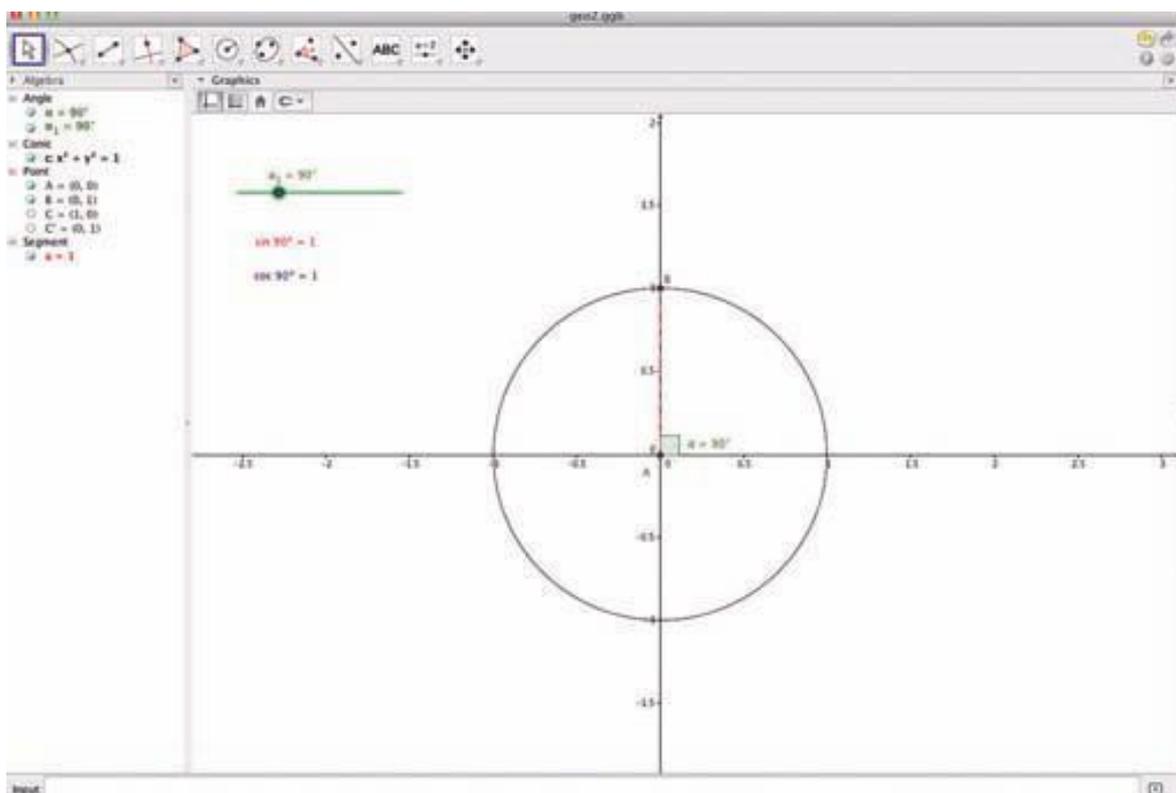


Para determinar las razones trigonométricas, se sigue este proceso:

- Dibujar dos puntos, en este caso, A , B y E , F .
- Dibujar el tercer punto con la amplitud del ángulo que se desee.
- Unir los tres puntos para obtener el triángulo deseado.
- Trazar la perpendicular desde el punto C o G al lado opuesto del triángulo para conseguir un triángulo rectángulo.
- Determinar el punto de intersección de dicha perpendicular con el lado del triángulo.
- Determinar el valor de la longitud de los lados.



Para estudiar las razones del ángulo de 90° , puede utilizarse la circunferencia goniométrica. Al mover el deslizador se obtienen las razones trigonométricas de los ángulos hasta 360° .



BANCO DE PREGUNTAS

1. ¿Qué es una Cónica?
2. ¿Cuál es la ecuación general de las cónicas?
3. ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de una recta fija y un punto fijo llamado foco?
4. Ecuación cónica que se usa para modelar los platos de las antenas de tv
5. Ecuación cónica que incluye dos lugares geométricos llamados focos
6. Ecuación cuadrática de dos variables en la que ambos cuadrados tienen signo desigual
7. ¿Cómo identificas si una elipse tiene su eje mayor paralelo al eje x o paralelo al eje de las y ?
8. ¿Existe diferencia entre las excentricidades de la elipse y de la hipérbola?
9. ¿Qué es el lado recto de una cónica?
10. ¿Qué representa la excentricidad?

SOLUCIONARIO

1. Las cónicas son curvas planas obtenidas mediante la intersección de un cono con un plano.
2. La ecuación general de las cónicas es:
 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
3. Los puntos situados a igual distancia de recta y foco forman una parábola.
4. Las llaman antenas parabólicas porque la cónica que forman es una parábola.
5. Las figuras que se definen mediante dos focos son la elipse y la hipérbola. En el primer caso es constante la suma de las distancias a los focos y en el segundo la diferencia.
6. La hipérbola es aquella que tiene variables al cuadrado de signo opuesto
7. Por el valor al cual se divide cada variable, si el mayor valor que divide está bajo la variable
X la elipse tiene su eje mayor paralelo al eje de las X, caso contrario será paralelo al eje de las Y.
8. La excentricidad de una elipse siempre es menor que 1, mientras que de la hipérbola siempre será mayor que 1
9. El lado recto es una cuerda que pasa por el foco y es perpendicular al eje focal de una cónica
10. La excentricidad ε , es un parámetro que determina el grado de desviación de una sección cónica con respecto a una circunferencia

CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

Activación de conocimientos previos a través de preguntas sobre círculo, circunferencia, óvalos y parábolas?

Identificar cónicas desde una sección giratoria y su intersección con una plano. Escritura de la ecuación general de las cónicas. Uso de TIC's para graficar cónicas. Comparación de ecuaciones canónicas de las diferentes cónicas.

Ejercicios de graficación de cónicas. Identificación de los elementos de las cónicas.

Conceptualización

Transformación de cónicas de su forma normal a su forma canónica.

Identificación de sus vértices, focos, directrices, longitudes de lado recto.

Empleo de TIC's para graficar cónicas y definir los elementos necesarios para su interpretación.

Reflexión

¿qué diferencia el conjunto de los números reales del resto de conjuntos estudiados?

Identificación de las propiedades de los logaritmos que se pueden aplicar en cada ejercicio o problema.

Reflexión y análisis sobre la aplicación de las propiedades de los logaritmos y la relación con la potenciación de números reales

Aplicación

¿Planteamiento y resolución de problemas sobre cónicas

Reconocer cónicas a partir de su ecuación general. Transformación de cónicas de su forma general a su forma canónica.

Graficar cónicas a partir de los elementos sin ayuda de graficadores ni tablas de datos.

Cálculo de longitudes de lado recto y excentricidad

RECURSOS PARA FOMENTAR EL INGENIO EN EL AULA

Estadística y Probabilidad

Noticias
Bajo el precio del suelo urbano... un 22%.

En el primer trimestre del año 2013, los países bajaron un 22%, y el precio de cada metro cuadrado bajó un 11,5% en comparación con el año anterior. En las poblaciones de menor precio del metro cuadrado bajó un poco más, llegando al 20%.

Noticias
El precio del metro cuadrado bajó un 11,5% en comparación con el año anterior. En las poblaciones de menor precio del metro cuadrado bajó un poco más, llegando al 20%.

Definición de desviación
La desviación es el cuadrado de la diferencia entre el valor observado y el valor esperado.

Definición de desviación estándar
La desviación estándar es la raíz cuadrada de la desviación.

Definición de desviación estándar
La desviación estándar es la raíz cuadrada de la desviación.

Definición de desviación estándar
La desviación estándar es la raíz cuadrada de la desviación.

TAMBIÉN

$DM = \frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{n}$

Simbología:
DM: Desviación media
 X_i : Valor estadístico
n: Número de datos

Calculadora
Las calculadoras científicas disponen de una función para determinar las desviaciones de la siguiente forma según el ejemplo 19:

presionamos el 3, a continuación el shift luego la tecla (x), después el número dos y finalizamos presionando la tecla igual entonces saldrá:

$P = 6$

1.7. Desviación media para datos no agrupados (DM)

Definición de desviación media
La desviación media es el cuadrado de la diferencia entre el valor observado y el valor esperado.

Definición de desviación estándar
La desviación estándar es la raíz cuadrada de la desviación.

Definición de desviación estándar
La desviación estándar es la raíz cuadrada de la desviación.

Problemas resueltos

1. Una urna contiene 10 bolas de colores... ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

2. Se lanzan dos dados... ¿Cuál es la probabilidad de sacar una suma de 7?

3. Se lanzan tres dados... ¿Cuál es la probabilidad de sacar una suma de 10?

TIC

En el siguiente enlace, encontrarás una simulación de la ley de los grandes números aplicada a un dado.

Visita: <http://goo.gl/SSX0HH>

¿Qué conclusiones puedes sacar de la observación de dicho experimento?

Definición de probabilidad
La probabilidad es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Definición de probabilidad
La probabilidad es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Definición de probabilidad
La probabilidad es el cociente entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.

Proyecto

LA ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA EN OBRAS DE RENOVACIÓN Y LAS PROBABILIDADES

El estadístico describe una muestra de datos... ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

El estadístico describe una muestra de datos... ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

Ejercicios y problemas

1. Dadas las siguientes frecuencias... ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

2. Se lanzan dos dados... ¿Cuál es la probabilidad de sacar una suma de 7?

3. Se lanzan tres dados... ¿Cuál es la probabilidad de sacar una suma de 10?

Para finalizar

1. Para las siguientes afirmaciones, escribe V si es verdadera o F si es falsa según corresponda.

2. Si un suceso es imposible, su probabilidad es 0.

3. Si un suceso es seguro, su probabilidad es 1.

ZONA

Redes bayesianas
Las redes bayesianas son un tipo de modelo probabilístico que permite representar las relaciones de dependencia entre variables aleatorias.

¿LA INTUICIÓN ENTIENDE DE PROBABILIDADES?
La intuición humana a menudo falla al evaluar probabilidades, especialmente cuando se trata de eventos complejos o contradictorios.

Ingeniería estadística
La ingeniería estadística es la aplicación de métodos estadísticos para resolver problemas de ingeniería.

Un alto en el camino

1. Si se lanzan dos dados... ¿Cuál es la probabilidad de sacar una suma de 7?

2. Se lanzan tres dados... ¿Cuál es la probabilidad de sacar una suma de 10?

3. Se lanzan cuatro dados... ¿Cuál es la probabilidad de sacar una suma de 13?

Prohibida su reproducción

UNIDAD 6

6

Estadística y Probabilidad

CONTENIDOS:

1. La estadística
 - 1.1. La recolección de datos y su interpretación
 - 1.2. Tabla de frecuencia para datos no agrupados
 - 1.3. Medidas de tendencia central para datos no agrupados
 - 1.4. Media aritmética
 - 1.5. Mediana
 - 1.6. Moda
 - 1.7. Desviación media para datos no agrupados (DM)
 - 1.8. La Varianza para datos no agrupados (s^2)
 - 1.9. Desviación típica para datos no agrupados (s)
 - 1.10. Medidas de tendencia central para datos agrupados
 - 1.11. Media aritmética para datos agrupados
 - 1.12. Mediana para datos agrupados (M_e)
 - 1.13. Moda para datos agrupados (M_o)
2. Experimentos aleatorios
 - 2.1. Espacio muestral
 - 2.2. Operaciones con sucesos
 - 2.3. Probabilidad
 - 2.4. Probabilidad condicionada
 - 2.5. Teorema de Bayes

194

195



Noticias

Baja el precio del suelo urbano un 11,5 % y las ventas, un 22 %.

En el primer trimestre del año 2013, las ventas de pisos bajaron un 22 %, y el precio del metro cuadrado bajó un 11,5 % en comparación con el año anterior. En las poblaciones más habitadas el precio del metro cuadrado ha disminuido un poco más, llegando al 20 %.

El País, 18-6-2013.



Web

En la siguiente web puedes encontrar todo tipo de datos y encuestas. También hay juegos y un poco de historias, que te ayudarán con la estadística:

<http://www.ine.es/esp/ica/ica.htm>

Esta otra página te servirá como apoyo durante estos temas. En ella podrás repasar la teoría y disponrás de una evaluación al final:

<http://links.edebe.com/286k>

Películas

Ciudad mágica, de William A. Wellman (1947).

Una empresa que se dedica a elaborar sondeos y busca una ciudad en la que la opinión de cuyos habitantes sea representativa de la de todo el país.

EN CONTEXTO

Observa el gráfico que encontramos en el siguiente enlace y **contesta** razonadamente a las preguntas:

- <http://links.edebe.com/286k>
- a. ¿Puedes describir la trayectoria del gráfico?
 - b. ¿Podrías predecir lo que va próximos cuatrimestres? ¿a ocurrir en los...
 - c. ¿Te podrías fiar de esta predicción? Busca otros gráficos e intenta predecir lo que va a suceder. ¿Qué ocurre en la realidad?

Eje temático

Contenidos

Estadística y Probabilidad

Elementos del plano

Probabilidad

1. La recolección de datos y su interpretación página 197
 2. Tabla de frecuencia para datos no agrupados página 198
 3. Medidas de tendencia central para datos no agrupados.... página 199
 4. Media aritmética página 199
 5. Mediana página 200
 6. Moda página 201
 7. Desviación estándar..... página 202
 8. Varianza página 203
 9. Desviación típica página 204
 10. Medidas de tendencia central para datos agrupados..... página 207
 12. Media aritmética página 207
 13. Mediana página 208
 14. Moda página 209
- Experimentos aleatorios página 210
- Operaciones con sucesos página 211
- Probabilidad..... página 212
- Probabilidad condicionada página 214
- Teorema de Bayes página 215

Criterio de evaluación

- Emplea la estadística descriptiva para resumir, organizar, graficar e interpretar datos agrupados y no agrupados.
- Emplea técnicas de conteo y teoría de probabilidades para calcular la posibilidad de que un determinado evento ocurra; identifica variables aleatorias; resuelve problemas con o sin TIC; contrasta los procesos, y discute sus resultados.

Elementos del perfil de salida a los que se contribuye

- Actuamos con ética, generosidad, integridad, coherencia y honestidad en todos nuestros actos.
- Tenemos iniciativas creativas, actuamos con pasión, mente abierta y visión de futuro; asumimos liderazgos auténticos, procedemos con pro actividad y, responsabilidad en la toma de decisiones y estamos preparados para enfrentar los riesgos que el emprendimiento conlleva
- Nos movemos por la curiosidad intelectual, indagamos la realidad nacional y mundial, reflexionamos y aplicamos nuestros conocimientos interdisciplinarios para resolver problemas en forma colaborativa e interdependiente aprovechando todos los recursos e información posibles.
- Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con responsabilidad nuestros discursos.

Objetivos generales del área que se evalúan

- Producir, comunicar y generalizar información, de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica, mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos, para así comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país, y tomar decisiones con responsabilidad social.
- Valorar el empleo de las TIC para realizar cálculos y resolver, de manera razonada y crítica, problemas de la realidad nacional, argumentando la pertinencia de los métodos utilizados y juzgando la validez de los resultados.
- Desarrollar la curiosidad y la creatividad a través del uso de herramientas matemáticas al momento de enfrentar y solucionar problemas de la realidad nacional, demostrando actitudes de orden, perseverancia y capacidades de investigación.
- Proponer soluciones creativas a situaciones concretas de la realidad nacional y mundial mediante la aplicación de las operaciones básicas de los diferentes conjuntos numéricos, y el uso de modelos funcionales, algoritmos apropiados, estrategias y métodos formales y no formales de razonamiento matemático, que lleven a juzgar con responsabilidad la validez de procedimientos y los resultados en un contexto.

Indicadores para la evaluación del criterio

- Calcula, con y sin apoyo de las TIC, las medidas de centralización y dispersión para datos agrupados y no agrupados; representa la información en gráficos estadísticos apropiados y los interpreta, juzgando su validez.
- Analiza, interpreta información y emite conclusiones a partir del análisis de parámetros estadísticos (media, mediana, moda, rango) y de datos discretos provenientes del entorno, con el uso de medios tecnológicos
- Asigna probabilidades (gráficamente o con fracciones) a diferentes sucesos, en experiencias aleatorias, y resuelve situaciones cotidianas.

Básicos imprescindibles

Básicos deseables

Eje temático	Destrezas con criterio de desempeño
Aprendizajes básicos	Analizar y representar, en tablas de frecuencias, diagramas de barra, circulares y poligonales, datos discretos recolectados en el entorno e información publicada en medios de comunicación.
	Analizar y representar, en tablas de frecuencias, diagramas de barra, circulares y poligonales, datos discretos recolectados en el entorno e información publicada en medios de comunicación.
	Describir las experiencias y sucesos aleatorios a través del análisis de sus representaciones gráficas y el uso de la terminología adecuada.
	Emplear programas informáticos para tabular y representar datos discretos estadísticos obtenidos del entorno.
	Calcular la probabilidad de que un evento ocurra, gráficamente y con el uso de fracciones, en función de resolver problemas asociados a probabilidades de situaciones significativas.
Estadística y Probabilidad	Calcular e interpretar la media, mediana, moda, rango, varianza y desviación estándar para datos no agrupados y agrupados, con apoyo de las TIC.
	Resolver y plantear problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados, con apoyo de las TIC.
	Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en los problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados dentro del contexto del problema, con apoyo de las TIC.
	Calcular e interpretar el coeficiente de variación de un conjunto de datos (agrupados y no agrupados).
	Reconocer los experimentos y eventos en un problema de texto, y aplicar el concepto de probabilidad y los axiomas de probabilidad en la resolución de problemas.
	Determinar la probabilidad empírica de un evento repitiendo el experimento aleatorio tantas veces como sea posible (50, 100... veces), con apoyo de las TIC.

LOGO INSTITUCIONAL		NOMBRE DE LA INSTITUCIÓN				AÑO LECTIVO	
PLAN DE UNIDAD TEMÁTICA							
1. DATOS INFORMATIVOS:							
Docente:	Nombre del docente que ingresa la información	Área/asignatura:	MATEMÁTICA	Grado/Curso:	2° BACHILLERATO	Paralelo:	
N.º de unidad de planificación:	6	Título de unidad de planificación:	ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD	Objetivos específicos de la unidad de planificación:	<p>Producir, comunicar y generalizar información de manera escrita, verbal, simbólica, gráfica y/o tecnológica mediante la aplicación de conocimientos matemáticos y el manejo organizado, responsable y honesto de las fuentes de datos para comprender otras disciplinas, entender las necesidades y potencialidades de nuestro país y tomar decisiones con responsabilidad social.</p> <p>Valorar sobre la base de un pensamiento crítico, creativo, reflexivo y lógico la vinculación de los conocimientos matemáticos con los de otras disciplinas científicas y los saberes ancestrales para plantear soluciones a problemas de la realidad y contribuir al desarrollo del entorno social, natural y cultural.</p>		
PERÍODOS	24				SEMANA DE INICIO:		
2. PLANIFICACIÓN							
				DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO A SER DESARROLLADAS:			
				<ul style="list-style-type: none"> Resolver y plantear problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados con apoyo de las TIC. Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en los problemas de aplicación de las medidas de tendencia central y de dispersión para datos agrupados dentro del contexto del problema, con apoyo de las TIC. Calcular e interpretar el coeficiente de variación de un conjunto de datos (agrupados y no agrupados). Reconocer los experimentos y eventos en un problema de texto y aplicar el concepto de probabilidad y los axiomas de probabilidad en la resolución de problemas. Determinar la probabilidad empírica de un evento reemplazando el experimento aleatorio tantas veces como sea posible (50, 100, ... veces) con apoyo de las TIC. Realizar operaciones con sucesos: unión, intersección, diferencia y complemento, leyes de De Morgan en la resolución de problemas. Aplicar los métodos de conteo; permutaciones, combinaciones para determinar la probabilidad de eventos simples y a partir de ellos la probabilidad de eventos compuestos en la resolución de problemas. Reconocer experimentos en los que se requiere utilizar la probabilidad condicionada mediante el análisis de la dependencia de los eventos involucrados y calcular la probabilidad de un evento sujeto a varias condiciones aplicando el teorema de Bayes en la resolución de problemas. 			
				CRITERIOS DE EVALUACIÓN			
				CE.M.5.9. Emplea la estadística descriptiva para resumir, organizar, graficar e interpretar datos agrupados y no agrupados.			

<ul style="list-style-type: none"> Reconocer variables aleatorias discretas cuyo recorrido es un conjunto discreto, en ejemplos numéricos y experimentos y la distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta como una función real a partir del cálculo de probabilidades acumuladas definidas bajo ciertas condiciones dadas. Calcular e interpretar la media, la varianza y la desviación estándar de una variable aleatoria discreta. Juzgar la validez de las soluciones obtenidas en los problemas que involucren el trabajo con probabilidades y variables aleatorias discretas dentro del contexto del problema. 		<p>INDICADORES DE LOGRO</p>	<p>I.M.5.9.1. Calcula, con y sin apoyo de las TIC, las medidas de centralización y dispersión para datos agrupados y no agrupados; representa la información en gráficos estadísticos apropiados y los interpreta, juzgando su validez. (J.2., I.3.)</p>	<p>TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN</p> <p>Comprobar el desarrollo de las destrezas necesarias para la aplicación de la estadística descriptiva, medidas de tendencia central y de dispersión, para el análisis de datos agrupados y no agrupados. Además de calcular e interpretar el coeficiente de variación, determinar los cuantiles y deciles, y realizar sus representaciones gráficas.</p>
ELEMENTOS DEL PERFIL DE SALIDA				
<p>J.2. Actuamos con ética, generosidad, integridad, coherencia y honestidad en todos nuestros actos. I.3. Sabemos comunicarnos de manera clara en nuestra lengua y en otras, utilizamos varios lenguajes como el numérico, el digital, el artístico y el corporal; asumimos con Responsabilidad nuestros discursos.</p>				
ELABORADO		REVISADO		APROBADO
Docente:		Director del área :		Vicerrector:
Firma:		Firma:		Firma:
Fecha:		Fecha:		Fecha:

CRÓNICA MATEMÁTICA

El nacimiento de la estadística y la probabilidad

Por referencias históricas se sabe que en el segundo milenio a. C. en China ya se elaboraban censos para saber cuánta población había en su territorio y cobrar impuestos.

La cita del Evangelio se refiere al censo de población del imperio romano que se hizo en los primeros años de la era cristiana.

El primer texto que se considera de estadística matemática es *Observations upon the Bills of Mortality* (*Observaciones sobre las tasas de mortalidad*, 1662) de John Graunt (1620-1674), que trató de averiguar la esperanza de vida de los habitantes de unas zonas geográficas de Inglaterra, independientemente de la influencia que tuvieron las epidemias de peste de finales del siglo XVI y principios del XVII.

Y aconteció en aquellos días, que se promulgó un edicto de parte de Augusto César, que todo el mundo fuese empadronado.

Este primer censo se hizo siendo Cirenio gobernador de Siria. E iban todos para ser empadronados, cada uno a su ciudad. (Lc, 2:1-2)



También desde muy antiguo se tiene constancia de la afición a los juegos de azar. Así, en el museo Hermitage de Moscú se pueden observar dados egipcios del siglo XVI a.C.

Sin embargo, no se formalizó el estudio de la probabilidad hasta el siglo XVII a raíz de la correspondencia mantenida entre los matemáticos Blaise Pascal (1623-1662) y Pierre de Fermat (1601-1665), a instancias de un problema propuesto por un noble aficionado a los juegos de azar, conocido como el caballero de Méré.

Demuestra tu ingenio

En un concurso de televisión, se presentan al concursante tres puertas. Dos de ellas no tienen nada detrás y la otra esconde un premio. El concursante elige una puerta y el presentador, antes de abrir la puerta escogida, para darle más emoción al juego abre otra puerta que no tiene nada detrás. Naturalmente, el presentador sabe dónde está el premio, así que siempre abrirá una puerta que no lo tiene. Tras abrir la puerta, pregunta al concursante si mantiene su elección o prefiere cambiarla. Mucha gente piensa que es pura cuestión del azar cambiar o no, y que ambas opciones proporcionan la misma probabilidad de obtener el premio o no. ¿Es mejor quedarse con la elección inicial o es mejor cambiar?

Si accedes a http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_117_g_4_t_5.html?from=category_g_4_t_5.html, encontrarás una actividad interactiva para simular el juego que te proporcionará la respuesta.



CICLO DEL APRENDIZAJE

¿Cómo dinamizo el aula?

Experiencia

Se presentan estudios estadísticos que sirvan como tema de partida sobre la importancia de la estadística

Manipulación de material con fotos y representación de distintos tipos de análisis estadísticos.

Resolución de problemas de aplicación de funciones en el ámbito deportivo y social.

Reflexión

¿Qué podemos decir sobre la estadística y su aporte en la economía?

Identificación de medidas de tendencia central su aplicación en las finanzas y economía.

Reflexión y análisis sobre dichas aplicaciones

Conceptualización

Definición de variables estadísticas, medidas de dispersión, tablas de frecuencias, procedimientos, gráficas y análisis de resultados.

Uso de hojas de cálculo que facilitan la representación gráfica y posterior interpretación de información

Aplicación

¿Por qué es importante calcular, analizar e interpretar las medidas de tendencia central y de dispersión de una variable estadística?

Planteamiento y resolución de problemas que apliquen medidas de dispersión y de tendencia central.

BANCO DE PREGUNTAS

1. ¿Qué se entiende por estadística?

La estadística, en general, es la ciencia que trata de la recopilación, organización, presentación, análisis e interpretación de datos numéricos con el fin de realizar una toma de decisiones más efectiva.

2. ¿En qué consiste una muestra?

Es un subconjunto limitado extraído de una población con el objeto de reducir el campo de experiencias. Las propiedades que obtengamos se harán extensivas a toda la población.

3. ¿Qué se entiende por probabilidad?

La probabilidad mide la frecuencia con la que se obtiene un resultado (o conjunto de resultados) al llevar a cabo un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables. La teoría de la probabilidad se usa extensamente en áreas como la estadística, la física, la matemática, la ciencia y la filosofía para sacar conclusiones sobre la probabilidad de sucesos potenciales y la mecánica subyacente de sistemas complejos.

4. ¿En qué consiste una característica cualitativa?

Los datos de características cualitativas son aquellos que no se pueden expresar numéricamente. Estos datos se deben convertir a valores numéricos antes de que se trabaje con ellos.

5. ¿Qué se entiende por una variable?

Una variable es un elemento de una fórmula, proposición o algoritmo que puede adquirir o ser sustituido por un valor cualquiera (siempre dentro de su universo). Una variable es un símbolo que representa un elemento no especificado de un conjunto dado. Dicho conjunto es llamado conjunto universal de la variable, universo o dominio de la variable, y cada elemento del conjunto es un valor de la variable.

6. ¿Cuáles elementos se deben tomar en cuenta para construir una distribución de frecuencias?

RANGO. Es una medida de dispersión que se obtiene como la diferencia entre el número mayor y el número menor de los datos. **AMPLITUD TOTAL.** Simplemente se obtiene sumándole 1 al rango. **EL NÚMERO DE CLASES.** Se determina a través de la fórmula de Sturges, la cual es válida cuando el No de observaciones sea menor o igual a 500. **Formula.**

VALOR DEL INTERVALO O AMPLITUD Se obtiene por medio de la ecuación de dicta $V_i = AT / N_c$

7. ¿Qué se entiende por frecuencia absoluta y por frecuencia relativa en una distribución?

Frecuencias absolutas: es el número de veces que aparece en la muestra dicho valor de la variable y se representa por f_i .

Frecuencias relativas: es el cociente entre la frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra. La denotaremos por f_{ri} .

8. ¿Qué se entiende por azar aleatorio o estocástico?

Dependiendo del ámbito al que se aplique. El ordenamiento estadístico es una forma de tratar matemáticamente la naturaleza y el hombre, como si fuesen datos aleatorios pero sin que lo sean necesariamente.

9. De cinco ejemplos concretos de uso de los porcentajes en su profesión.

Cálculo de promedio de asistencia de los estudiantes, calcular notas, calcular inasistencia, mostrar el cálculo porcentual a una variable, determinar el porcentaje final semestral final, etc.

10. ¿Qué importancia tiene medir variabilidad para el análisis estadístico?

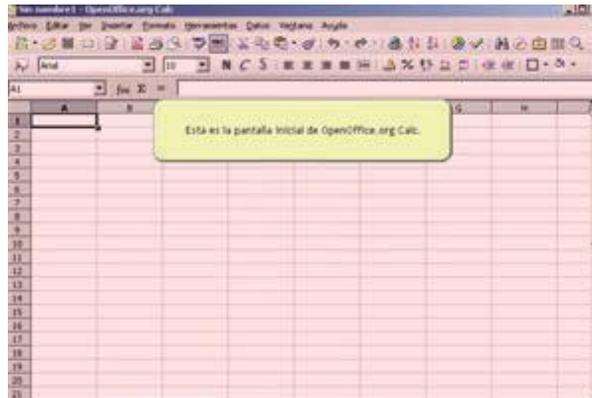
Variabilidad o dispersión nos indican si esas puntuaciones o valores están próximas entre sí o si por el contrario están o muy dispersas.

Una medida razonable de la variabilidad podría ser la amplitud o rango, que se obtiene restando el valor más bajo de un conjunto de observaciones del valor más alto.

RECURSOS PROPIOS DEL ÁREA

La hoja de cálculo. Utilización en Estadística

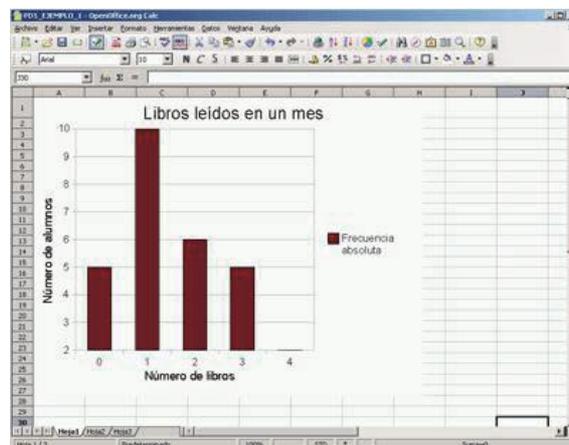
La Estadística es una materia que, aunque muy interesante, puede resultar algo tediosa por la cantidad de datos numéricos que debe manipular para hacer cálculos. Disponer de un instrumento como la hoja de cálculo OpenOffice.org Calc permite poder insistir en los conceptos más que en los cálculos. El uso de estos modelos en las clases puede organizarse de forma que su confección sea simultánea con su uso y el aprendizaje de los temas.



La hoja de cálculo es un recurso TIC con unas grandes posibilidades pedagógicas en Estadística (y en Matemáticas en general) porque:

- Educa al alumnado en el uso correcto de las fórmulas (necesidad de paréntesis, operadores en el orden correcto, etc.).
- Permite automatizar cálculos de forma sencilla e intuitiva.
- Permite interactuar con los gráficos estadísticos creados para cambiarlos, hacer pruebas, elegir el que más se adecue a la necesidad del momento, etc.

Vas a conocer el uso de la hoja de cálculo como instrumento de manejo y representación de datos, además de cálculo con funciones matemáticas y representación de gráficos.



Orientación didáctica

La unidad nos introduce en el estudio de variables estadísticas y el cálculo de probabilidades, muestra la diferencia entre la población y muestra, es una guía en la elaboración de tablas de frecuencia y el cálculo de medidas de tendencia central de datos agrupados y no agrupados. La portada de la unidad nos muestra un panorama de desarrollo financiero, el cual se lo entiende en base al estudio de estadísticas y probabilidad. En el desarrollo de la unidad el estudiante entenderá ¿Qué son las medidas de tendencia central y medidas de dispersión? Las cuales colaboran en la toma de decisiones dentro de un desarrollo económico.

Es importante que el estudiante pueda identificar la probabilidad de que un suceso exista ya que este conocimiento colabora en la toma de decisiones.

Como orientación metodológica el docente puede abordar la unidad con el apoyo de las TICs. Una herramienta que se sugiere es el manejo EXCEL y otras hojas de cálculo, las cuales ayudarían a los estudiantes a comprender, interpretar y calcular con mayor facilidad las medidas de tendencia central y dispersión.

Forme grupos de trabajo que busquen y analicen resultados estadísticos de temas importantes de su entorno y las relacionen con los temas estudiados.

Para comprobar la probabilidad de que un evento suceda puede llevar una urna con bolas de distintos colores y pedir a sus alumnos que saquen aleatoriamente.

En contexto

Respuesta abierta a modo de reflexión que puede servir como introducción a la estadística bidimensional. Las preguntas se pueden contestar observando el gráfico y analizando la noticia que se explica.





Las variables cualitativas pueden ser nominales u ordinales; en la primera, los valores no siguen una tendencia de orden determinado, por ejemplo tenemos: el estado civil de una persona, el género de un individuo, lugar de nacimiento...

En cambio, en las variables cualitativas ordinales se asignan valores que siguen una tendencia de orden, por ejemplo: Ninguna, algunas veces, muchas veces, siempre.

1.1. La recolección de datos y su interpretación

El instrumento más utilizado para recolectar información sobre cierto tipo de estudio es la encuesta; luego de realizada, se organiza en tablas, con la finalidad de realizar el tratamiento de la misma. Entre algunos conceptos integrantes, que figuran en las tablas tenemos:

Frecuencia absoluta: Es el número de veces en que se repite o aparece un valor, el total del número de veces, deberá coincidir con el tamaño de la muestra.

Frecuencia relativa: Es el cociente entre los valores de frecuencia absoluta y el tamaño de la muestra. Toma valores entre 0 y la unidad, debido a que son fracciones.

El valor total de todas las frecuencias relativas es 1.

De la frecuencia relativa se deriva su interpretación porcentual, donde se halla el producto entre la frecuencia relativa por 100%.

1. En la situación: Se realiza un estudio para determinar el grado de satisfacción del nivel educativo en el Colegio «ABC», que encuestó a 100 estudiantes de los cursos de bachillerato. **Identifica** la población, muestra, variable y tipo de variable.
2. **Clasifica** las siguientes variables en cualitativas o cuantitativas: Edad, ocupación, nacionalidad, remuneración económica, hijos, signo zodiacal, comida preferida.
3. **Escribe** tres ejemplos de variables cualitativas nominales y ordinales.
4. **Describe** tres ejemplos de variables cuantitativas.

Actividad de interpretación

Solucionario

1. Población: Estudiantes del Colegio “ABC”
 Muestra: 100 estudiantes de bachillerato
 Variable: Grado de satisfacción del nivel educativo
 Tipo de variable: Cualitativa
2. Cualitativas: Ocupación, nacionalidad, signo zodiacal, comida preferida
 Cuantitativas: Edad, remuneración económica, hijos
3. Nominales: Nombre, nacionalidad, estado civil
 Ordinales: Medallas de una prueba deportiva, clase social, grado de satisfacción.
4. Numero de hermanos, ingreso mensual, horas que utiliza internet.

Solucionario

$$5. \bar{x} = \frac{(300)+250+450+230+235+125+450+750+800+230+650+1800}{12} = \frac{6270}{12} = 522,5$$

125, 230, 230, 235, 250, 300, 450, 450, 650, 750, 800, 1800

Como el número de datos es par $Me = \frac{300+450}{2} = 375$

$$6. \bar{x} = \frac{\sum xi}{n} ; \bar{x} = \frac{3,2+3,4+3,52+3,48+3,67+3,67+3,15+3,96+3,75+3,45}{9} = 3,51$$

3,15; 3,2; 3,4; 3,45; 3,48; 3,52; 3,67; 3,75; 3,96

$$Me = 3,48$$

7. $Mo = 9,50$ Es el dato que no se repite

$$\bar{x} = \frac{\sum xi}{n} ; \bar{x} = \frac{9,75+9,5+9,5+9,25+9,5+9,75}{6} = 9,54$$

Ordenamos los datos 9,25; 9,50; 9,50; 9,50; 9,75; 9,75

$$Me = 9,50$$

Desviación Media

$$Dm = \frac{|9,75-9,54|+|9,50-9,54|+|9,50-9,54|+|9,25-9,54|+|9,50-9,54|+|9,75-9,54|}{6} = \frac{0,83}{6}$$

$$Dm = 0,138$$

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{9,75^2+9,50^2+9,50^2+9,25^2+9,50^2+9,75^2}{6} = 9,54^2$$

$$\sigma^2 = \frac{546,44}{6} = 91,01$$

$$\sigma^2 = 91,12 - 91,0$$

$$\sigma^2 = 0,11$$

Desviación Típica

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{0,11}$$

$$\sigma = 0,33$$

Solucionario

8. (Únicamente hay 19 datos)

Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{3+2+1+1+0+1+0+2+3+2+1+1+1+2+3+4+4+3+2}{19} = \frac{36}{19}$$

$$\bar{x} = 1,9$$

Media Aritmética Ponderada (De la tabla)

$$\bar{x} = \frac{0+6+10+12+8}{19} = \frac{36}{19}$$

$$\bar{x} = 1,9$$

Mediana (Ordenamos los datos)

0,0,1,1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,3,3,3,3,4,4

Me: 2

xi	fi	xi.fi
0	2	0
1	6	6
2	5	10
3	4	12
4	2	8
total	19	36

9. Moda

Con la ayuda de una tabla de frecuencias

Moda = 50 (Se repite 16 veces)

xi	fi
47	1
48	2
49	7
50	16
51	6
52	2
53	2
55	1
Total	37

Solucionario

$$Me = \frac{4 + 4}{2} = 4$$

Moda

Existen dos modas, cada una se repite 5 veces.

$$Mo1 = 3$$

$$Mo2 = 4$$

13. Media Aritmética Ponderada

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi \cdot fi}{\sum fi}$$

$$\bar{x} = \frac{(8 * 23) + 9(13) + (10 * 19) + (11 * 23)}{23 + 13 + 19 + 23}$$

$$\bar{x} = \frac{744}{78} = 9,5$$

Mediana

Como son un total de 78 datos, la mediana estará entre los datos 39 y 40. Observando la tabla de frecuencias $Me = 10$, ya que los dos anteriores 23 y 13 suman 36 datos.

Moda

$$Mo = 8 \text{ (Este valor se repite 23 veces)}$$

Y TAMBIÉN:

$$DM = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Simbología:

DM: Desviación media
 X_i : Valor estadístico
 n : Número de datos

1.7. Desviación media para datos no agrupados (DM)

Se denota como DM a la media aritmética de los valores absolutos de la diferencia entre un valor determinado y la media aritmética del respectivo conjunto de datos estadísticos. Relaciona las desviaciones de valores con respecto a la media aritmética.

Ejemplo 9

Los valores 8, 6, 7, 7, 9, 6, 6, 7, 8 y 9 constituyen la edad de un grupo de niños que participan en un curso vacacional. Determinemos la desviación media.

Solución:

Primero: Determinamos la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{8 + 6 + 7 + 7 + 9 + 6 + 6 + 7 + 8 + 9}{10} = \frac{73}{10} = 7,30$$

Segundo: Calculamos la desviación media (DM).

$$DM = \frac{|8 - 7,30| + |6 - 7,30| + |7 - 7,30| + |7 - 7,30| + |9 - 7,30| + |6 - 7,30| + |6 - 7,30| + |7 - 7,30| + |8 - 7,30| + |9 - 7,30|}{10}$$

$$DM = \frac{|0,70| + |1,30| + |0,30| + |0,30| + |1,70| + |1,30| + |1,30| + |0,30| + |0,70| + |1,70|}{10}$$

$$DM = \frac{9,60}{10}; DM = 0,96$$

14. Sean los valores: 4, 5, 6, 7, 8, 5, 6, 5, 8, 4, 5 y 8.

Determina:

- a. La media aritmética
- b. La mediana
- c. La moda
- d. La desviación media

15. Determina la desviación media de una distribución dada por los siguientes valores: 25, 28, 28, 29, 25, 25, 27, 28, 29, 25, 29, 27, 25, 27, 26 y 28.

16. Determina los valores de la media aritmética, media aritmética ponderada, mediana, moda y desviación media de: 26, 25, 24, 27, 28, 2, 26, 27, 26, 25 y 26.

17. Según los datos de la tabla, determina lo siguiente:

X_i	f_i
2	2
3	7
5	8
7	13
8	12

Tabla 5.

- a. ¿Cuántos valores constituyen la muestra?
- b. Determina la media aritmética.
- c. Determina la mediana.
- d. Determina la moda.
- e. Determina la desviación media.

Actividades

Prohibida su reproducción

Solucionario

14. Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{4+5+6+7+8+5+6+5+8+4+5+8}{12} = \frac{71}{12}$$

$$\bar{x} = 5,92$$

Mediana

Ordenando:

4,4,5,5,5,5,6,6,7,8,8,8

$$Me = \frac{5+6}{2} = 5,5$$

Moda

$Mo = 5$ (Este valor se repite 4 veces)

Desviación Media

$$Dm =$$

$$\frac{|4-5,92|+|4-5,92|+|5-5,92|+|5-5,92|+|5-5,92|+|5-5,92|+|6-5,92|+|6-5,92|+|7-5,92|+|8-5,92|+|8-5,92|+|8-5,92|}{12}$$

$$Dm = \frac{15}{12} = 1,25$$

$$5. Dm = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Determinamos:

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{431}{16}$$

$$\bar{x} = 26,9$$

Solucionario

$$Dm = \frac{20,3}{16} = 1,27$$

16. En este ejercicio hay un dato incorrecto, no es 2 sino 25

Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{26+25+24+27+28+25+26+27+26+25+26}{11} = \frac{285}{11}$$

$$\bar{x} = 25,9$$

Media Aritmética Ponderada (Con la ayuda de una tabla de frecuencias)

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi \cdot fi}{\sum fi}$$

$$\bar{x} = \frac{285}{11} = 25,9$$

Mediana

Ordenando:

24,25,25,25,26,26,26,26,27,27,28

$$Me = 26$$

Moda

$$Mo = 26 \quad (\text{Este valor se repite 4 veces})$$

xi	fi	xi.fi
24	1	24
25	3	75
26	4	104
27	2	54
28	1	28
Total	11	285

17. a) Los valores son la suma de los fi

$$Total = 2 + 7 + 8 + 13 + 12 = 42$$

c) De la tabla vemos que la mitad de los datos es 21 y ese valor se encuentra en la variable 7, ya que $2 + 7 + 8 = 16$ y este valor más 13 será 29, por lo tanto:

$$Me = 7$$

$$Dm = 1,76$$

d) $Mo = 7$

b) $\bar{x} = \frac{\sum Xi \cdot fi}{\sum fi}$

e) $Dm = \frac{\sum |Xi - \bar{x}|}{n}$

$$Dm = \frac{2|2-6|+7|3-6|+8|5-6|+13|7-6|+12|8-6|}{42} = \frac{74}{42}$$

$$\bar{x} = \frac{252}{42} = 6$$

1.8. La Varianza para datos no agrupados (σ^2)

Es una medida de dispersión, definida como la diferencia entre el cociente del cuadrado de cada uno de los datos estadísticos y el número de datos menos el cuadrado de la media aritmética.

Y TAMBIÉN:

$$\sigma^2 = \frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{x}^2$$

Simbología:
 σ^2 : Varianza
 X_i : Valor estadístico
 \bar{x} : Media aritmética

Ejemplo 10

Hallar la varianza entre los datos: 7, 9, 7, 7, 9, 6, 6, 7, 6 y 8.

Solución:

Primero: Determinamos la media aritmética.

Segundo: Calculamos la varianza.

$$\bar{x} = \frac{7 + 9 + 7 + 7 + 9 + 6 + 6 + 7 + 6 + 8}{10}$$

$$\sigma^2 = \frac{7^2 + 9^2 + 7^2 + 7^2 + 9^2 + 6^2 + 6^2 + 7^2 + 6^2 + 8^2}{10} - 7,20^2$$

$$\bar{x} = \frac{72}{10}$$

$$\sigma^2 = \frac{49 + 81 + 49 + 49 + 81 + 36 + 36 + 49 + 36 + 64}{10} - 7,20^2$$

$$\bar{x} = 7,20$$

$$\sigma^2 = \frac{4530}{10} - 51,84$$

$$\sigma^2 = 453 - 51,84$$

$$\sigma^2 = 401,16$$

18. Sean los valores: 14, 16, 18, 19, 16, 18, 18, 17, 15, 16, 14 y 18.

Determina:

- a. La varianza
- b. La media aritmética
- c. La mediana
- d. La desviación media.

19. Determina la varianza de los siguientes valores: 25, 28, 28, 29, 25, 25, 27, 28, 29, 25, 29, 27, 25, 27, 26 y 28.

20. Determina los valores de la media aritmética y la varianza de los siguientes datos:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f	12	8	7	6	5	3	3	2	12

Tabla 6.

21. Según los datos en las tablas, determina:

X	f	X	f
13	3	2	4
14	4	3	5
16	6	5	7
18	6	6	15
20	8	7	17
22	15	8	18

Tabla 7.

Tabla 8.

- a. ¿Cuántos valores constituyen la muestra?
- b. Determina la media aritmética.
- c. Determina la mediana.
- d. Determina la desviación media.
- e. Determina la varianza.

Solucionario

18. Primero encontramos la Media Aritmética

$$b) \bar{x} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{199}{12}$$

$$\bar{x} = 16,58$$

$$a) \sigma^2 = \frac{\sum Xi^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{14^2 + 16^2 + 18^2 + 19^2 + 16^2 + 18^2 + 18^2 + 17^2 + 15^2 + 16^2 + 14^2 + 18^2}{12} - 16,58^2$$

$$\sigma^2 = \frac{3331}{12} - 274,8964$$

$$\sigma^2 = 2,687$$

Ordenando:

14,14,15,16,16,16,17,18,18,18,19

$$Me = \frac{16+17}{2} = 16,5$$

$$Dm = \frac{\sum |Xi - \bar{x}|}{n}$$

$$Dm = \frac{17}{12} = 1,42$$

$$Dm = \frac{17}{12} = 1,42$$

Solucionario

$$\sigma^2 = \frac{11647}{16} = 727,94$$

20. $\bar{x} = \frac{0(12)+1(8)+2(7)+3(6)+4(5)+5(3)+6(3)+7(2)+8(12)}{12+8+7+6+5+3+3+2+12}$

$$\bar{x} = \frac{203}{58} = 3,5$$

xi	0	1	2	3	4	5	6	7	8
fi	12	8	7	6	5	3	3	2	12

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{12(0)^2+8(1)^2+7(2)^2+6(3)^2+5(4)^2+3(5)^2+3(6)^2+2(7)^2+12(8)^2}{58} - 3,5^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1219}{58} - 12,25$$

$$\sigma^2 = 21,02 - 12,25 = 8,77$$

a) El número de valores son la suma de los fi

$$\text{Muestra: } \sum fi = 3 + 4 + 6 + 6 + 8 + 15 + 4 + 5 + 7 + 15 + 17 + 18$$

Muestra: 108

b) Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi.fi}{\sum fi}$$

$$\bar{x} = \frac{1200}{108} = 11,11$$

c) La mitad de los datos es $\frac{108}{2} = 54$

Buscamos la Xi donde se encuentra el dato 54, sumando los fi y observamos que: $Me = 8$

d) $Dm = \frac{\sum |Xi - \bar{x}|}{n}$

$$Dm = \frac{644,64}{108} = 5,97$$

e) $\sigma^2 = \frac{\sum Xi^2}{n} - \bar{x}^2$

$$\sigma^2 = \frac{17992}{108} = 11,11^2$$

$$\sigma^2 = 166,59 - 123,43$$

$$\sigma^2 = 43,16$$

Solucionario

22. Primero calculamos la Media Aritmética

$$b) \bar{x} = \frac{245+250+252+253+251+250+250+247+249+253}{10} = \frac{2500}{10}$$

$$\bar{x} = 250$$

$$a) \sigma^2 = \frac{245^2+250^2+252^2+253^2+251^2+250^2+250^2+247^2+249^2+253^2}{10} - 250^2$$

$$\sigma^2 = \frac{625058}{10} - 62500$$

$$\sigma^2 = 5,8$$

c) Mediana

Ordenando:

245,247,249,250,**250,250**,251,252,253,253

$$Me = \frac{250+250}{2} = 250$$

$$d) Dm = \frac{\sum |xi - \bar{x}|}{n}$$

$$Dm = \frac{18}{10} = 1,8$$

$$e) \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{5,8}$$

$$\sigma = 2,4$$

23. Primero determinamos la Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{376}{14}$$

$$\bar{x} = 24,86$$

$$a) \sigma^2 = \frac{\sum Xi^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{10136}{14} - 26.86^2$$

1.9. Desviación típica para datos no agrupados (σ)

Conocida como desviación estándar, tiene amplia relación con la varianza, debido a que para obtener la desviación típica se calcula la raíz cuadrada de la varianza. Se denota σ.

Ejemplo 11

Hallemos la varianza entre los datos: 7, 9, 7, 7, 9, 6, 6, 7, 6 y 8.

Solución:

Primero: Determinamos la media aritmética.

$$\bar{x} = \frac{12 + 13 + 14 + 16 + 14}{5} = \frac{69}{5} = 13,8$$

Segunda: Calculamos la desviación típica o estándar.

$$\sigma = \sqrt{\frac{12^2 + 13^2 + 14^2 + 16^2 + 14^2}{5} - 13,8^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{144 + 169 + 196 + 256 + 196}{5} - 190,44}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{961}{5} - 190,44}$$

$$\sigma = \sqrt{1,8}$$

$$\sigma = 1,34$$

Y TAMBIÉN:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum Xi^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Simbología:
σ: Desviación típica
x̄: Dto estadístico
Σ: Media aritmética

22. Sean los valores: 245, 250, 252, 253, 251, 250, 250, 247, 249 y 253.

- Determina:**
a. La varianza
b. La media aritmética
c. La mediana
d. La desviación media.
e. La desviación típica.

23. Halla la varianza y la desviación típica de los siguientes valores: 27, 28, 28, 29, 25, 25, 26, 27, 29, 25, 29, 26, 24 y 28.

24. Determina los valores de la desviación típica y la varianza de los siguientes datos:

x _i	12	14	16	20	25	27	29	30
f _i	11	32	20	17	15	9	8	12

Tabla 9.

25. Según los datos en las tablas, determina:

x _i	1	1	1	1	1
f _i	7	8	8	7	5

Tabla 10.

x _i	5,34	6,34	5,97	6,03	5,99	6,05
f _i	23	32	29	28	27	30

Tabla 11.

x _i	2	2,7	2,9	2,9	2,6	2,4
f _i	2	8	7	5	9	5

Tabla 12.

- a. ¿Cuántos valores constituyen la muestra?
b. Determina la media aritmética
c. Determina la desviación estándar
d. Determina la desviación media
e. Determina la varianza

Solucionario

$$\sigma^2 = 724 - 721,46$$

$$\sigma^2 = 2,54$$

$$b) \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{2,54}$$

$$\sigma = 1,59$$

24. Primero determinamos \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi \cdot fi}{\sum fi}$$

$$\bar{x} = \frac{2450}{124} = 19,76$$

$$a) \sigma^2 = \frac{\sum Xi^2 \cdot fi}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{53240}{124} - 19,76^2$$

$$\sigma^2 = 429,35 - 390,46$$

$$\sigma^2 = 38,89$$

$$b) \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{38,89}$$

$$\sigma = 6,24$$

25. Para la primera tabla

$$a) \text{ Muestra: } \sum fi = 7 + 8 + 8 + 7 + 5 + 2 = 37$$

$$b) \bar{x} = \frac{\sum fi \cdot Xi}{\sum fi} = \frac{7\left(\frac{1}{2}\right) + 8\left(\frac{1}{4}\right) + 8\left(\frac{1}{5}\right) + 7\left(\frac{1}{2}\right) + 5\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right)}{37}$$

$$\bar{x} = \frac{12,77}{37} = 0,345$$

Xi	1/2	1/4	1/5	1/2	1/3	1/4
fi	7	8	8	7	5	2

Solucionario

e) Primero calculamos la varianza

$$\sigma^2 = \frac{\sum xi^2}{n} - \bar{x}$$

$$\sigma^2 = \frac{5,38}{37} - 0,345^2$$

$$\sigma^2 = 0,145 - 0,119$$

$$\sigma^2 = 0,026$$

$$c) \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{0,026}$$

$$\sigma = 0,161$$

$$d) Dm = \frac{\sum |xi - \bar{x}| \cdot fi}{n}$$

$$Dm = \frac{4,34}{37}$$

$$Dm = 0,117$$

Para la segunda tabla

$$a) \text{ Muestra: } \frac{\sum fi \cdot Xi}{n} = \frac{23(5,34) + 32(6,34) + 29(5,97) + 28(6,03) + 27(5,99) + 30(6,05)}{169} = 169$$

$$b) \bar{x} = \frac{\sum fi \cdot Xi}{n} = \frac{23(5,34) + 32(6,34) + 29(5,97) + 28(6,03) + 27(5,99) + 30(6,05)}{169}$$

$$\bar{x} = \frac{1010,90}{169} = 5,98$$

$$e) \sigma^2 = \frac{23(5,34)^2 + 32(6,34)^2 + 29(5,97)^2 + 28(6,03)^2 + 27(5,99)^2 + 30(6,05)^2}{169} - 5,98^2$$

$$\sigma^2 = \frac{6060,647}{169} - 35,76$$

$$\sigma^2 = 35,86 - 35,76$$

$$\sigma^2 = 0,1$$

xi	5,34	6,34	5,97	6,03	5,99	6,05
fi	23	32	29	28	27	30

$$c) \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Solucionario

$$\sigma = 0,316$$

$$d) Dm = \frac{23(5,34-5,98)+32(6,34-5,98)+29(5,97-5,98)+28(6,03-5,98)+27(5,99-5,98)+30(6,05-5,98)}{169}$$

$$Dm = \frac{30,30}{169}$$

$$Dm = 0,179$$

Para la tercera tabla

$$a) \text{ Muestra: } 2 + 8 + 7 + 5 + 9 + 5 = 36$$

$$b) \bar{x} = \frac{2(2)+8(2,7)+7(2,9)+5(2,9)+9(2,6)+5(2,4)}{36}$$

$$\bar{x} = \frac{95,8}{36} = 2,66$$

$$e) \sigma^2 = \frac{2(2)^2+8(2,7)^2+7(2,9)^2+5(2,9)^2+9(2,6)^2+5(2,4)^2}{36} - 2,66^2$$

$$\sigma^2 = \frac{256,88}{36} - 2,66^2$$

$$\sigma^2 = 7,13 - 7,08$$

$$\sigma^2 = 0,05$$

$$c) \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{0,05}$$

$$\sigma = 0,224$$

X_i	2,00	2,70	2,90	2,90	2,60	2,40
f_i	2	8	7	5	9	5

$$d) Dm = \frac{2|2-2,66|+8|2,7-2,66|+12|2,9-2,66|+5|2,4-2,66|}{36}$$

$$Dm = \frac{1,32}{36}$$

$$Dm = 0,037$$

Marca de clase (x_i)

Es valor medio de cada clase y se obtiene mediante el promedio del valor mínimo del intervalo y el valor mayor del intervalo.

Ejemplo 12

En los datos: 12; 50; 13; 25; 18; 25; 17; 50; 21; 25; 22; 50; 23; 25; 25; 25; 28; 50; 27; 75; 28; 00; 29; 25; 30; 25; 32; 25; 34; 50; 35; 25; 37; 25; 37; 25; 38; 00; 27; 25; 28; 50; 26; 25; 32; 50; 35; 25; 36; 40; 34; 50; 35; 25; 38; 00; 39; 65; 40; 25; 42; 25; 30; 75; 25; 75; 25; 50; 26; 25; determinemos el valor del rango, el número de intervalos y la marca de clase.

Solución:

Rango = $x_{máx} - x_{mín}$; Rango = $42,50 - 12,5$; Rango = 30
Entonces se pueden formar los intervalos según las opciones:

- Cinco intervalos que comprendan seis unidades.
- Seis intervalos que comprendan cinco unidades.
- Diez intervalos que comprendan tres unidades.
- Trece intervalos que comprendan diez unidades.

Para el ejemplo, escogemos cinco intervalos que comprendan seis unidades, así tendremos la siguiente tabla de frecuencias para intervalos:

Luego de determinar los intervalos, calculamos la marca de clase.

Realizamos el conteo de los 35 valores que se encuentran dentro del intervalo para determinar la frecuencia.

Se verifica que el total de la frecuencia absoluta coincide con el número de datos de la muestra.

Intervalos	X	f
[12,5 - 18,5[15,5	4
[18,5 - 24,5[21,5	3
[24,5 - 30,5[27,5	12
[30,5 - 36,5[33,5	8
[36,5 - 42,5[39,5	8
Tabla 13.		$\Sigma f = 35$

26. En los datos: 12, 50, 38, 26, 55, 18, 27, 13, 25, 18, 25, 17, 50, 28, 50, 27, 75, 28, 29, 25, 67, 34, 30, 25, 32, 25, 34, 50, 35, 25, 37, 25, 37, 25, 28, 50, 26, 25, 32, 50, 35, 25, 36, 50, 55, 35, 37, 45, 54, 36, 34, 50, 35, 25, 38, 42, 25, 30, 25, 58, 25, 50, 26, 25; **determina** el valor del rango, el número de intervalos y la marca de clase.

28. Al lanzar un dado cuarenta y dos veces, obtenemos los siguientes resultados:
3, 2, 1, 6, 3, 5, 4, 2, 4, 2, 6, 4, 1, 6, 4, 5, 1, 1, 2, 6, 4, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 5, 3, 1, 5, 6, 5, 6, 2, 4, 1, 6, 5, 1, 2, 6

Calcula el rango, el número de intervalos, realiza la tabla y coloca la marca de clase.

27. Considera los estaturas de 28 alumnos expresadas en centímetros:
154 158 162 148 163 153 159 180 165 168
156 148 162 157 153 158 147 165 166 175
172 167 160 155 147 156 161 159

29. Las masas en gramos de treinta y tres piezas producidas por una máquina son:

6,8; 6,5; 6,9; 7,0; 6,8; 6,7; 6,9; 6,4; 7,0; 7,1; 6,7; 6,6; 6,4; 6,7; 7,2; 6,8; 6,9; 6,9; 6,5; 7,0; 6,9; 6,7; 6,5; 6,8; 7,0; 6,8; 6,4; 6,9; 7,1; 7,0; 6,6; 6,6; 6,8

Calcula el rango, el número de intervalos, realiza la tabla y coloca la marca de clase.

Actividades

Solucionario

26. Rango = $X_{max} - X_{min}$

$R = 67 - 12$

$R = 55$ (Sus factores son 5 y 11)

Formaremos 5 intervalos de 11

Intervalos	X_i
[12 - 23[17,5
[23 - 34[28,5
[34 - 45[39,5
[45 - 56[50,5
[56 - 67]	61,5

27. Rango = $X_{max} - X_{min}$

$R = 180 - 147$

$R = 33$ (Número de intervalos 3 de 11)

$X_i = \frac{147 + 158}{2} = 152,5$

$X_i = \frac{158 + 169}{2} = 163,5$

$X_i = \frac{169 + 180}{2} = 174,5$

Intervalos	X_i	f_i
[147 - 158[153	11
[158 - 169[164	13
[169 - 180]	39,5	4

28. Rango = $X_{max} - X_{min}$

$R = 6 - 1$

$R = 5$

Solucionario

Como es un número primo

$$R = 7 - 0 \quad \text{También es prima}$$

Por lo tanto haremos 3 intervalos de 2

Intervalos	X_i	f_i
[1 - 3[2	16
[3 - 5[4	12
[5 - 7]	6	14

$$29. \quad R = 7,2 - 6,4$$

$$R = 0,8$$

Realizamos 4 intervalos de 0,2

Intervalos	X_i	f_i
[6,4 - 6,6[6,5	6
[6,6 - 6,8[6,7	7
[6,8 - 7,0[6,9	12
[7,0 - 7,2]	7,1	8

1.13. Moda para datos agrupados (Mo)

Para datos agrupados, es el dato estadístico que más se repite en el estudio de cierta variable, se calcula mediante:

$$Mo = \text{Lim}_{\text{inf}} + \frac{\Delta f_1}{\Delta f_1 + \Delta f_2} \cdot a$$

Simbología:
 Mo = moda.
 Lim_{inf} = límite inferior del intervalo de la moda.
 Δf_1 = diferencia entre la frecuencia absoluta del intervalo modal menos la frecuencia absoluta del intervalo anterior.
 Δf_2 = diferencia entre la frecuencia absoluta del intervalo modal menos la frecuencia absoluta del intervalo consecutivo.
 a = amplitud del intervalo.

Ejemplo 15

La siguiente tabla de frecuencias resume en intervalos el número de artículos vendidos durante 43 días. Determinemos la moda para datos agrupados.

Intervalos	X_i	f_i	f_{ai}
[120 - 135[127,5	5	7
[135 - 150[142,5	9	16
[150 - 165[157,5	3	28
[165 - 180[172,5	2	43
		$\Sigma f_i = 19$	

Solución:
 Frecuencia absoluta modal = 9
 Frecuencia absoluta intervalo anterior = 5
 Frecuencia absoluta intervalo siguiente = 3
 Y además a = 15.
 $\Delta f_1 = 9 - 5 = 4$
 $\Delta f_2 = 9 - 3 = 6$

■ Tabla 16.

Reemplazamos en la expresión:

$$Mo = \text{Lim}_{\text{inf}} + \frac{\Delta f_1}{\Delta f_1 + \Delta f_2} \cdot a ; Mo = 135 + \frac{4}{10} \cdot 15 ; Mo = 135 + 6 ; Mo = 141$$

Por lo tanto la moda es 141 artículos.

30. Para la siguiente disposición de datos:

12 28 23 32 36 48 50 55 57 26
 48 50 55 57 48 12 28 23 48 12
 15 28 29 32 32 28 23 55 12 28
 48 12 28 28 29 32 32 32 36 48

Determina el valor del rango, el número de intervalos y la marca de clase, la media aritmética, mediana y moda para datos agrupados.

31. Según la tabla:

Intervalos	X_i	f_i
[130 - 150[140	5
[150 - 170[160	7
[170 - 190[180	12
[190 - 210[200	4
	$\Sigma f_i =$	

■ Tabla 17.

Determina los valores de la media aritmética, mediana y moda para datos agrupados.

Actividades

209

Solucionario

30. Rango: $57 - 12 = 45$

Como 57 no puede incluirse como valor máximo aumentamos y disminuimos 1.

Rang: $58 - 11 = 47$

Como es número primo aumentamos y disminuimos 1

Rang: $59 - 10 = 49$

Tendremos 7 intervalos de 7

Intervalos	X_i	f_i
[10 - 17[13,5	6
[17 - 24[20,5	3
[24 - 31[27,5	10
[31 - 38[34,5	8
[38 - 45[41,5	0
[45 - 52[48,5	8
[52 - 59[55,5	5

Media Aritmética

$$\bar{x} = \frac{\sum Xi \cdot fi}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{13,5(6) + 20,5(3) + 27,5(10) + 34,5(8) + 41,5(0) + 48,5(8) + 55,5(5)}{40}$$

$$\bar{x} = \frac{1359}{40}$$

$$\bar{x} = 33,98$$

Solucionario

1.
 - a) Cualitativas: disciplina por cursos, aceptación de las autoridades.
Cuantitativas: número de estudiantes, promedios por cursos.
 - b) Cualitativas: estado de refrigeración, iluminación.
Cuantitativas: ventas mensuales, porcentaje de empleados mayores de 25 años.
 - c) Cualitativas: aseo del gimnasio, estudio de máquinas.
Cuantitativas: inscritos, calorías por día.
 - d) Cualitativas: aceptación en el mercado, satisfacción de empleados
Cuantitativas: ingreso por los últimos años, número de hijos por empleado.
2. Población: Estudiantes de 10° año de EGB
Muestra: José, Juan, Marian, Andrea, Luis, Alejandro, Silvia, Paulina, Jhon y Carlos
Variable: horas al día que utilizan el internet
Tipo: cuantitativa
3. Cuantitativas: edad, hijos, estatura, numero de hermanos
Cualitativas: ocupación, profesión, deporte preferido, postre preferido
4. Discretas: número de hijos, animales de una granja

Continuas: peso, estatura
5. Variable: número de veces que revisa el celular
Tipo: cuantitativa, discreta

$$6. \quad a) \quad \bar{x} = \frac{\sum Xi}{n} = \frac{1014}{40}$$

$$\bar{x} = 23,35$$

$$b) \quad \bar{x} = \frac{\sum Xi \cdot fi}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{8(23)+5(24)+6(25)+9(26)+10(27)+2(28)}{40} = \frac{1014}{40}$$

$$\bar{x} = 25,35$$

c) Ordenando:

23,23,23,23,23,23,23,23,,24,24,24,24,24,25,25,25,
25,25,25,26,26,26,26,26,26,26,26,26,27,27,27,27,2
7,27,27,27,27,28,28

Solucionario

$$Me = \frac{26+26}{2} = 26$$

d) Moda

$$Mo = 27$$

e) $Dm = \frac{\sum |xi - \bar{x}| \cdot fi}{n} = \frac{55,3}{40}$

$$Dm = 1,3825$$

7.

a) De la tabla de frecuencias observamos que el número de niños mayores de años son:

$$\% = (1 - 0,17) * 100 = 83\%$$

b) Ordenando:

5,5,5,5,5,5,6,6,6,6,6,6,6,7,7,7,7,7,7,7,8,8,8,8,8,9,9,9,9,9,10,10

$$Me = \frac{7+7}{2} = 7$$

c) Moda

$$Mo = 7$$

X_i	f_i	fr
5	6	0,17
6	7	0,19
7	10	0,28
8	5	0,14
9	6	0,17
10	2	0,06
	36	1,00

d) $\bar{x} = \frac{\sum X_i \cdot f_i}{n} =$

$$\bar{x} = \frac{6(5)+7(6)+10(7)+5(8)+6(9)+2(10)}{36} = \frac{256}{36}$$

$$\bar{x} = 7,11$$

8. a) De la tabla Muestra: $4 + 8 + 3 + 6 + 4 + 5 + 5 = 35$

b) Tipo: Cuantitativa continúa

Solucionario

c) 1,3 que tiene $fi = 8$

$$d) \bar{x} = \frac{\sum Xi \cdot fi}{n} =$$

$$\bar{x} = \frac{4(1,25) + 8(1,3) + 3(1,33) + 6(1,35) + 4(1,4) + 5(1,45) + 5(1,5)}{35} = \frac{47,84}{35}$$

$$\bar{x} = 1,37$$

e) Como $n = 35$; $\frac{n}{2} = 17,5 = 18$ La clase de la media es 1,35

$$Me = 1,35$$

$$Mo = 8$$

$$f) Dm = \frac{\sum |Xi - \bar{x}| \cdot fi}{n}$$

$$Dm = \frac{2,45}{35} = 0,07$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum Xi^2}{n} - \bar{x}^2$$
$$\sigma^2 = \frac{65,6142}{35} - 1,37^2$$

$$\sigma^2 = 1,87 - 1,87 = 0$$

$$e) \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = 0$$

$$e) \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = 0$$

$$9. a) \bar{x} = \frac{\sum Xi}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{28+32+28+29+29+29}{6} = \frac{175}{6}$$

$$\bar{x} = 29,2$$

b)

$$\sigma^2 = \frac{\sum Xi^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{28^2+32^2+28^2+29^2+29^2+29^2}{6} - 29,2^2$$

Solucionario

$$\sigma^2 = \frac{5115}{6} - 852,64$$

$$\sigma^2 = 0$$

c) $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

$$\sigma = 0$$

10. a) Determinamos la media aritmética de cada clase

$$3^\circ\text{A: } \bar{x} = \frac{\sum Xi \cdot fi}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{1(2)+2(1)+3(4)+4(5)+5(7)+6(6)+7(2)+8(1)+9(1)+10(1)}{30} = \frac{148}{30}$$

$$\bar{x} = 4,9$$

$$3^\circ\text{B: } \bar{x} = \frac{\sum Xi \cdot fi}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{1(4)+2(3)+3(3)+4(1)+5(4)+6(5)+7(3)+8(2)+9(2)+10(3)}{30} = \frac{158}{30}$$

$$\bar{x} = 5,3$$

El mejor rendimiento lo tiene el curso 3°B

b) $3^\circ\text{A: } Dm = \frac{\sum |Xi - \bar{x}|}{n}$

$$Dm = \frac{46,6}{30}$$

$$Dm = 1,5$$

$3^\circ\text{B: } Dm = \frac{\sum |Xi - \bar{x}|}{n}$

$$Dm = \frac{72}{30}$$

$$Dm = 2,4$$

El curso más uniforme es el 3°A

Solucionario

$$11. a) \bar{x} = \frac{0,25+0,56+0,67+0,87+0,67+0,7+0,68+0,7+0,65+0,67+0,8+0,9+0,88+0,78}{14} = \frac{9,78}{14}$$

$$\bar{x} = 0,698 \approx 0,7$$

$$b) \bar{x} = \frac{0,25+0,56+3(0,67)+0,87+2(0,7)+0,68+0,65+0,8+0,9+0,88+0,78}{14} = \frac{9,78}{14}$$

$$\bar{x} = 0,7$$

c) Ordenando:

0.25;0.56;0.65;0.67;0.67;0.67;**0.68;0.7**;0.7;0.78;0.8;0.8;
0.88:0.9

$$Me = \frac{0,68+0,7}{2} \quad ; \quad Me = 0,69$$

d) $Mo = 0,67$

$$e) \sigma^2 = \frac{\sum xi^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{7,1774}{14} - 0,7^2$$

$$\sigma^2 = 3,7 - 0,49$$

$$\sigma^2 = 3,21$$

12)

$$a) \bar{x} = \frac{\sum xi}{n} = \frac{578}{22}$$

$$\bar{x} = 26,27$$

$$b) \bar{x} = \frac{\sum xi \cdot fi}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{1(24) + 6(25) + 6(26) + 4(27) + 5(28)}{22}$$

$$\bar{x} = \frac{578}{22} \quad ; \quad \bar{x} = 26,27$$

c) Ordenemos:

24,25,25,25,25,25,25,26,26,26,**26,26**,26,27,27,27,27,28,28,28,28,28

$$Me = \frac{26+26}{2} \quad ; \quad Me = 26$$

d) Existen 2 modas

$$Mo1=25 \quad ; \quad Mo2=26$$

11. Se quiere determinar el aumento de peso durante el mes de enero de los leones del zoológico, y se registra los datos en kilogramos:

0,25, 0,56, 0,67, 0,87, 0,67, 0,7, 0,68, 0,7, 0,65, 0,67, 0,8, 0,9, 0,88, 0,78. **Determina** la media aritmética, la media aritmética ponderada, la mediana, la moda y la varianza.

12. **Determina** los valores de la moda aritmética, media aritmética ponderada, mediana, moda desviación media, desviación estándar y varianza para: 26, 25, 25, 27, 28, 27, 27, 26, 25, 28, 28, 26, 25, 24, 28, 25, 26, 27, 26, 25 y 26.

Responde: En el caso de eliminarse los números mayores, ¿en qué porcentaje varían todas las medidas estadísticas?

13. En 1º de bachillerato se registran según los parciales A, B y C, las notas que registran la nota final que tienen en la asignatura de Matemática, del tercio:

X	f _i	X	f _i	X	f _i
5,78	4	6,10	6	6,00	4
7,25	11	7,15	13	7,38	11
8,35	8	8,05	4	8,00	8
9,25	3	9,38	4	8,65	5
9,56	5	9,08	3	9,25	2

a) **Responde:** ¿Qué porcentaje registra resultados superiores a siete en todas las cursas?

b) **Responde:** ¿Cuál curso resultó con la mejor media aritmética?

14. **Calcula** la desviación media de los datos de la tabla, correspondientes al número de huevos diarios que ponen las veinte gallinas de un corral durante un mes.

Cantidad diaria de huevos (xi)	Nº días (fi)
11	12
13	14
15	16
17	10
19	11

Calcula la varianza y la desviación típica de la distribución.

15. **Calcula** el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de la siguiente serie de datos: 5, 4, 3, 6, 4, 3, 2, 12, 6, 4, 2, 10, 11.

16. **Determina** el recorrido, desviación media, la varianza, la desviación típica de los siguientes datos:

(xi)	1	3	5	7	9
(ni)	25	30	35	20	15

17. **Calcula** la media, mediana, moda, desviación media, varianza y desviación típica de esta serie de datos:

Serie: 21, 21, 34, 34, 34, 45, 55, 55, 55

18. **Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana de la siguiente distribución de datos, correspondiente al número de hijos de varias familias encuestadas:

datos: 2, 3, 1, 0, 2, 1, 2, 3, 0, 2, 1, 4, 0, 2, 2, 1, 3, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 2, 1, 1, 2.

19. **Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de los datos de esta tabla, correspondientes al número de llamadas telefónicas que cada abonado de una localidad recibe diariamente.

(xi)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(ni)	82	125	323	624	682	448	270	92	47	7

20. **Calcula** la moda, la media aritmética y la mediana, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de los datos de esta tabla, correspondientes al número de llamadas telefónicas que cada abonado de una localidad recibe diariamente.

(xi)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(ni)	12	15	9	18	17	15	11	6	8

21. **Determina** la moda, la mediana, la media aritmética, el recorrido, la desviación media, la varianza y la desviación típica de cada uno de estas distribuciones de datos, previa corrección de las tablas aducidas:

(xi)	18	19	20	21	22	23	24	25
(ni)	3	12	54	66	57	55	18	11

Xi	fi
24	1
25	6
26	6
27	4
28	5
	22

$$e) Dm = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$Dm = \frac{32,54}{22} ; Dm = 1,48$$

$$f) \sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{X}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{15218}{22} - 26,27^2$$

$$\sigma^2 = 1,61$$

$$g) \sigma = \sqrt{1,61}$$

$$\sigma = 1,27$$

Responder: Si se eliminan los 5 valores de 28

a) La media aritmética varía de 26,27 a 25,76, varía en aproximadamente en 2%

$$13) a) \quad A \quad \% = \frac{(11+8+3+5)}{31} * 100 \quad ; \% = 87,1\%$$

$$B \quad \% = \frac{(13+4+4+3)}{30} * 100 \quad ; \% = 80\%$$

$$C \quad \% = \frac{(11+8+5+2)}{30} * 100 \quad ; \% = 86,7\%$$

$$b) \quad A \quad \bar{X} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{n}$$

$$\bar{X} = \frac{4(5,78) + 11(7,25) + 8(8,35) + 3(9,25) + 5(9,56)}{31}$$

$$\bar{X} = \frac{245,22}{31} ; \bar{X} = 7,9$$

$$B \quad \bar{X} = \frac{6(6,1) + 13(7,15) + 4(8,05) + 4(9,38) + 3(9,08)}{30}$$

$$\bar{X} = \frac{226,51}{30} ; \bar{X} = 7,55$$

$$C \quad \bar{X} = \frac{4(6) + 11(7,38) + 8(8) + 5(8,65) + 2(9,25)}{31}$$

$$\bar{X} = \frac{230,93}{30} ; \bar{X} = 7,7$$

El curso con mayor promedio es el A

14. Primero calculamos \bar{x}

$$\bar{x} = \frac{11(3) + 12(4) + 13(6) + 14(7) + 15(4) + 16(3) + 17(2) + 18(11)}{30} = \frac{417}{30}$$

$$\bar{x} = 13,9$$



$$a) Dm = \frac{\sum |xi - \bar{x}|}{n}$$

$$Dm = \frac{16,2}{30} = 0,54$$

$$b) \sigma^2 = \frac{\sum xi^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{5895}{30} - 13,9^2$$

$$\sigma^2 = 3,3$$

$$c) \sigma = \sqrt{3,3}$$

$$\sigma = 1,81$$

$$15. a) R = Xmax - Xmin$$

$$R = 11 - 2 \quad ; \quad R = 9$$

$$b) \text{Primero calculamos } \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{3+2+3+5+8+3+2+12+8+4+2+10+11}{13} = \frac{73}{13}$$

$$\bar{x} = 5,6$$

$$Dm = \frac{\sum |x - xi|}{n}$$

$$Dm = \frac{41,8}{13} = 3,2$$

$$c) \sigma^2 = \frac{\sum (xi)^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{573}{13} - 5,6^2$$

$$\sigma^2 = 12,72$$

$$d) \sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{12,72}$$

$$\sigma = 3,6$$

16. a) $R = X_{max} - X_{min}$

$$R = 9 - 1 \quad ; \quad R = 8$$

b) $\bar{x} = \frac{25(1)+30(3)+35(5)+20(7)+15(9)}{125} = \frac{565}{125}$

$$\bar{x} = 4,52$$

c) $Dm = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$

$$Dm = \frac{267,2}{125} = 2,13$$

d) $\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

16. Serie: 21, 21, 34, 34, 34, 45, 55, 55,55

$$\bar{x} = \frac{21+21+34+34+34+45+55+55+55}{9} = \frac{354}{9}$$

$$\bar{x} = 39,3$$

$$Dm = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$Dm = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

$$\sigma^2 = \frac{2(21)^2 + 3(34)^2 + 45^2 + 3(55)^2}{9} - 39,3^2$$

$$\sigma^2 = \frac{15450}{9} - 1544,49$$

$$\sigma^2 = 172,18$$

$$\sigma = \sqrt{172,18} = 13,12$$

Serie: 21, 21, 34, 34, 34, 45, 55, 55,55, 55

$$\bar{x} = \frac{21 + 21 + 34 + 34 + 34 + 45 + 55 + 55 + 55 + 55}{10} = \frac{409}{10}$$

$$\bar{x} = 40,9$$

$$Dm = \frac{\sum |Xi - \bar{x}|}{n}$$

$$Dm = \frac{121}{10} = 12,1$$

$$\sigma^2 = \frac{2(21)^2 + 3(34)^2 + 45^2 + 4(55)^2}{10} - 40,9^2$$

$$\sigma^2 = \frac{18475}{10} - 1672,81$$

$$\sigma^2 = 174,69$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma \sqrt{174,69} = 13,2$$

17)

XI	FI
0	5
1	10
2	10
3	4
4	1
	30

a) Existen 2 modas

$$Mo1=1 \quad Mo2=2$$

$$b) \bar{x} = \frac{\sum xi.fi}{n} \quad ; \quad \bar{x} = \frac{0(5)+1(10)+2(10)+3(4)+4(1)}{30} \quad ; \quad \bar{x} = \frac{46}{30} \quad ; \quad \bar{x} = 1,53$$

$$c) Me = \frac{1+2}{2} \quad ; Me = 1,5$$

18) Tabla en el libro de texto del estudiante

19) a) Moda Mo=4 (Su fi =682)

$$b) \bar{x} = \frac{0(82)+1(125)+2(323)+3(624)+4(682)+5(448)+6(270)+7(92)+8(47)+9(7)}{2700}$$

$$\bar{x} = \frac{10314}{2700} \quad ; \quad \bar{x} = 3,82$$

c) Mediana como el total son 2700 datos $\rightarrow \frac{4}{2}=1350$, sumaremos los fi hasta llegar a un valor cercano a 1350

$$Me=4$$

$$d) R=9-0=9$$

$$e) Dm = \frac{\sum |xi - \bar{x}| \cdot fi}{4} \quad ; Dm = \frac{3530,56}{2700} \quad ; Dm=1,3$$

$$f) \sigma^2 = \frac{\sum xi^2 \cdot fi}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2$$

$$= \frac{82(0)^2 + 125(1)^2 + 323(2)^2 + 624(3)^2 + 682(4)^2 + 448(5)^2 + 270(6)^2 + 92(7)^2 + 47(8)^2}{2700}$$

$$\sigma^2 = \frac{46948}{2700} - 14,6$$

$$\sigma^2 = 2,8$$

$$g) \sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad ; \quad \sigma = \sqrt{2,8} \quad ; \quad \sigma = 1,7$$

Estos valores nos muestran que la mayoría de datos están cercanos a la media aritmética

20) Para la tabla a

$$Mo=4$$

$$Me=5$$

$$R=9-1 \quad ; R=8$$

$$a) \bar{x} = \frac{12(1)+15(2)+9(3)+18(4)+17(5)+15(6)+11(7)+6(8)+8(9)}{111}$$

$$\bar{x} = \frac{513}{111} \quad ; \quad \bar{x} = 4,62$$

$$b) Dm = \frac{\sum |xi - \bar{x}| \cdot fi}{n} \quad ; Dm = \frac{226,02}{111} \quad ; Dm = 2,04$$

$$c) \sigma^2 = \frac{\sum |xi|^2 \cdot fi}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{2977}{111} - 4,22^2$$

$$\sigma^2 = 5,47$$

$$d) \sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad ; \quad \sigma = \sqrt{5,47} \quad ; \quad \sigma = 2,3$$

Para la tabla b

$$Mo: 21$$

$$Me: 20$$

$$\bar{x} = \frac{3(18) + 12(19) + 54(20) + 66(21) + 57(22) + 55(23) + 18(24) + 11(25)}{273}$$

$$\bar{x} = \frac{5920}{273} \quad ; \quad \bar{x} = 21,7$$

$$Dm = \frac{\sum |xi - x| \cdot fi}{n} \quad ; Dm = \frac{4919,68}{273} \quad ; Dm = 18,02$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum |xi|^2 \cdot fi}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma^2 = \frac{129936}{373} - 21,7^2 \quad ; \sigma^2 = 5,06$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad ; \sigma = \sqrt{5,06} \quad ; \sigma = 2,25$$

Solucionario

21. $R = Xmax - Xmin$

$$R = 39 - 21 \quad ; \quad R = 18$$

Tenemos 3 intervalos de 6

intervalo	xi	fi
[21-27[24	26
[27-33[30	16
[33-39[36	3

22. Si aumentamos los valores, el rango no cambia

$$R = 39 - 21 \quad ; \quad R = 18$$

intervalo	xi	fi
[22-27[27
[27-32[14
[32-37[9

23.

intervalos	xi	fi	xi.fi	fa
[110-120[115	5	575	0,08
[120-130[125	7	875	0,19
[130-140[135	15	2025	0,42
[140-150[145	3	435	0,47
[140-150[145	21	3045	0,79
[160-170[165	14	2310	1,00

2 Datos agrupados

22. Determina el rango y el número de intervalos de los siguientes valores:
 23 21 22 27 24 23 22 24 26 27
 23 24 28 26 26 24 27 28 28 27
 28 27 26 27 27 23 32 29 26 25
 25 26 25 26 25 29 27 24 26 27

23. Con los datos del ejercicio anterior, aumenta los valores 25, 28, 35, 32 y 22. Luego vuelve a determinar el rango, número de intervalos y marca de clase.

24. Completa los valores de la tabla de datos con intervalos.

Intervalos	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[110 - 120[115	5	
[120 - 130[125	?	
[130 - 140[15	
[140 - 150[3	
[140 - 150[21	
[160 - 170[14	

25. Considerando la tabla de valores del ejercicio anterior, determina:
 a. El número de datos en la muestra.
 b. La media aritmética.
 c. Los valores de la columna de frecuencia acumulada acumulada.

26. Se realiza una campaña de vacunación, las personas beneficiadas en las jornadas de trabajo según los datos son:
 32 44 42 36 54 32 62 78 46 77
 63 77 90 26 13 25 57 68 78 47
 36 54 32 62 78 63 77 90 25 43
 32 29 27 24 27 24 36 90 26 13
 63 77 90 25 90 26 13 25 33 36

Elabora una tabla de frecuencias para datos agrupados, calcula el rango, el número de intervalos que considere adecuados, la media aritmética, la mediana y la moda.

27. Los siguientes valores pertenecen a una encuesta realizada para conocer el número de consultas de medicina general en una casa de salud:
 22 32 24 26 27 24 23 26 24 26
 23 35 31 26 26 24 37 24 28 27
 28 37 26 27 27 23 32 29 26 25
 25 26 35 33 25 27 27 28 23 36
 23 32 29 26 25 37 26 27 27 23

Elabora una tabla de frecuencias para datos agrupados y calcula el rango, el número de intervalos para analizar la variable, además de los valores de media aritmética, mediana y moda.

28. En el ejercicio anterior, si se atendió diez días más, ¿se registra:
 36, 35, 33, 15, 37, 22, 29, 23, 36, 32. Determina los nuevos valores de la media aritmética, mediana y moda.

29. Considera la distribución de datos agrupados en intervalos que aparece en la tabla y calcula la moda, la mediana, la media aritmética, el sesgo, la desviación media, la varianza y la desviación típica.

Intervalo	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)
(n_i)	2	4	7	5	8

30. Considera los datos agrupados y determina la moda, la mediana, la media aritmética, el sesgo, la desviación media, la varianza y la desviación típica de la siguiente distribución de datos.

Intervalo de clase	[1,3)	[3,5)	[5,7)	[7,9)	[9,11)
(n_i)	52	35	41	22	36

31. En base a la siguiente tabla calcula la media, mediana y moda:

x_i	n_i	N_i	$x_i \cdot n_i$
[0,1)	0,5	2	1
[1,2)	1,5	4	6
[2,3)	2,5	7	17,5
[3,4)	3,5	5	17,5
[4,5)	4,5	8	36
[5,6)	5,5	7	38,5
[6,7)	6,5	9	58,5
[7,8)	7,5	5	37,5
		47	212,5

24. a) Muestra: $5 + 7 + 15 + 3 + 21 + 14$

Muestra = 65

$$b) \bar{x} = \frac{115(5)+125(7)+135(15)+145(3)+145(21)+165(14)}{65} = \frac{9265}{65}$$

$$\bar{x} = 142,5$$

c) $fr = \frac{fi}{n}$ y la frecuencia relativa acumulada fa es la suma consecutiva de las frecuencias relativas de cada clase.

$$25. R = 90 - 13 \quad ; \quad R = 77$$

Tenemos 7 intervalos de 12

intervalo	xi	fi
[13-24[18.5	3
[24-35[29.5	16
[35-46[40.5	7
[46-57[51.5	5
[57-68 [62.5	6
[68-79[73.5	8
[79-90]	84.5	5

$$a) \bar{x} = \frac{3(18.5)+16(29.5)+7(40.5)+5(51.5)+6(62.5)+8(73.5)+5(84.5)}{50} = \frac{2398,5}{50}$$

$$\bar{x} = 47,97$$

b) Clase de la mediana 35 – 46

$$Me = 35 - \frac{\frac{50}{2} - 19}{7} * 11$$

$$Me = 35 - \frac{6(11)}{7} = 25,6$$

c) Clase de la moda 24 - 35

$$Mo = 24 + \frac{(16-3)}{(16-3)+(16-7)}$$

$$Mo = 24 + \frac{13}{13+9} = 24,6$$

26. $R = 37 - 22$; $R = 15$

Tenemos 3 intervalos de 5

intervalo	xi	fi
[22-27[24,5	27
[27-32[29,5	14
[32-37[34,5	9
		50

$$\bar{x} = \frac{27(24,5)+14(29,5)+9(34,5)}{50} = \frac{1385}{50}$$

$$\bar{x} = 27,7$$

Clase de mediana 22 - 27

$$Me = 22 + \frac{\frac{50}{2}-0}{27} * 5$$

$$Me = 22 + \frac{25(5)}{27} = 26,6$$

Clase de la moda 22- 27

$$Mo = 22 + \frac{(17-0)}{(17-0)+(17-14)}$$

$$Mo = 22 + \frac{17}{20} = 22,85$$

27. El rango cambia $R = 37 - 15$; $R = 22$. Si sumamos y restamos 1, tenemos 4 intervalos de 6

$$\bar{x} = \frac{17(1)+23(17)+29(25)+35(17)}{60} = \frac{1728}{60}$$

$$\bar{x} = 28,8$$

Clase de la media 26 – 32

$$Me = 26 + \frac{\frac{60}{2} - 18}{25} * 6$$

$$Me = 26 + \frac{12(6)}{25} = 28,9$$

Clase de la moda 26 – 32

$$Mo = 26 + \frac{(25-17)}{(25-17)+(25-17)} * 6$$

$$Mo = 26 + \frac{8(6)}{16} = 29$$

intervalo	xi	fi
[14 - 20[17	1
[20 - 26[23	17
[26 - 32[29	25
[32 - 38[35	17
		60

28. Recorrido:

$$R = Xmax - Xmin$$

$$R = 5 - 0 \quad ; \quad R = 5$$

$$\bar{x} = \frac{2(0,5) + 4(1,5) + 7(2,5) + 5(3,5) + 8(4,5)}{26} = \frac{78}{26}$$

$$\bar{x} = 3$$

intervalo	xi	fi
[0 - 1[0,5	2
[1 - 2[1,5	4
[2 - 3[2,5	7
[3 - 4[3,5	5
[4 - 5[4,5	8

La mitad de los datos es 13

Clase de la media 2 – 3

$$Me = 2 + \frac{\frac{26}{2} - 6}{7} * 1$$

$$Me = 2 + \frac{7}{7} * 1 = 3$$

Clase de la moda 2 – 3

$$Mo = 2 + \frac{(7-2)}{(7-2)+(7-5)} * 1$$

$$Mo = 2 + \frac{5}{7} = 2,7$$

$$Dm = \frac{2|0,5-3|+4|1,5-3|+7|2,5-3|+5|3,5-3|+8|4,5-3|}{26} = \frac{29}{26}$$

$$Dm = 0,9$$

$$\sigma^2 = \frac{2(0,5)^2+4(1,5)^2+7(2,5)^2+5(3,5)^2+8(4,5)^2}{26} - 3^2$$

$$\sigma^2 = \frac{276,5}{26} - 9 = 1,6$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{1,6} = 1,3$$

$$29. \quad R = 11 - 1 \quad ; \quad R = 10$$

$$\bar{x} = \frac{52(2)+35(4)+41(6)+22(8)+36(10)}{186} = \frac{1026}{186}$$

$$\bar{x} = 5,5$$

$$Dm = \frac{52|2-5,5|+35|4-5,5|+41|6-5,5|+22|8-5,5|+36|10-5,5|}{186} = \frac{472}{186}$$

$$Dm = 2,5$$

$$\sigma^2 = \frac{52(2)^2+35(4)^2+41(6)^2+22(8)^2+36(10)^2}{186} - 5,5^2$$

$$\sigma^2 = \frac{7252}{186} - 30,25$$

$$\sigma^2 = 8,74$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

$$\sigma = \sqrt{8,74}$$

$$\sigma = 2,96$$

intervalo	xi	fi
[1 - 3[2	52
[3 - 5[4	35
[5 - 7[6	41
[7 - 9[8	22
[9 - 11[10	36

186

$$30) \quad \bar{x} = \frac{\sum fi \cdot xi}{ni}$$

$$\bar{x} = \frac{2121,5}{47}$$

$$\bar{x} = 45,1$$

Mediana

Como $\frac{n}{2} = 23,5$; la clase de la media sea [4-5)

$$Me = 4 + \frac{\frac{n}{2} - 18}{26} * 1$$

$$Me = 4 + 0,2$$

$$Me = 4,211$$

Clase de la moda [6-7)

$$Mo = 6 + \frac{(9-7)}{(9-7)+(9-5)} * 1$$

$$Mo = 6 + \frac{2}{6}$$

$$Mo = 6,33$$

Página 223

3 Experimentos aleatorios

32. Justifica si los siguientes experimentos son aleatorios o no:
- Extraer una bola de una urna con el mismo número de bolas rojas que blancas.
 - Extraer una bola de una urna donde únicamente hay bolas blancas.
 - Determinar el tiempo de caída de un cuerpo desde 1 m de altura y con masa conocida.

33. Una urna contiene 3 bolas verdes, 1 amarilla y 2 blancas. Describe el espacio muestral si:
- Extraemos dos bolas con reposición.
 - Extraemos dos bolas sin reposición.

34. En los semifinales del Mundial de Fútbol se enfrentan 4 equipos: España, Italia, Brasil y Argentina. Describe el espacio muestral de los partidos que se podrán jugar.

4 Sucesos

35. Sacamos una bola de una bolsa que contiene 1 bola roja, 1 blanca y 1 negra, y a continuación lanzamos un dado. Describe el espacio muestral y los siguientes sucesos:
- Obtener una bola roja y un número impar.
 - Obtener una bola que no sea blanca y un múltiplo de 3.
 - Sacar un 2 en el dado y una bola negra.
 - Sacar una bola que no sea blanca y un número que no sea impar.

36. Sea $\Omega = \{A, B, C, E, F, G, H, I, J\}$ el espacio muestral de un experimento, consideramos los siguientes sucesos:

$$A = \{A, E, F, G, J\} \quad C = \{A, C, E, G\}$$

$$B = \{A, H, I\} \quad D = \{B, C, D, E, F\}$$

Determina:

$$a. A \cap \bar{B} \quad e. D - (B \cap C)$$

$$b. \bar{A} \cap \bar{B} \quad d. C \cup \bar{D}$$

$$c. B \cup (C \cap \bar{D}) \quad f. (A \cup B) - (C \cap D)$$

5 Probabilidad

37. Tenemos una urna con 3 bolas verdes, 1 azul, 2 blancas y 4 rojas. Extraemos una bola. Calcula la probabilidad de que la bola extraída:
- Sea verde.
 - Sea blanca.
 - No sea roja.

38. Al lanzar dos dados, se suman los resultados. Describe el espacio muestral. ¿Son todos los resultados igual de probables? Halla sus probabilidades.

39. Calcula la probabilidad de que, al lanzar dos dados, la suma de los resultados sea:
- Múltiplo de 3.
 - Divisible por 4.

40. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, calcula:

- $P(A \cup B)$
- $P(A)$
- $P(A \cap B)$
- $P(A \cap B)$

41. En las pruebas para obtener el carné de conducir, la probabilidad de superar la parte teórica es 0,45; la práctica, 0,4; y ambas, 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de superar alguna prueba?

42. Para comprar un antivirus, una empresa de videojuegos hace un estudio en 600 ordenadores durante un mes.

	Ordenadores con virus	Ordenadores sin virus
Con fallos de software	17	49
Sin fallos	23	520

- Tabla 37. ¿Cuál será la probabilidad de que se produzcan fallos en el software? ¿Y de que se infecte con algún virus?

43. Irene y María han quedado esta tarde. La probabilidad de que Irene llegue tarde es 0,34. La probabilidad de que llegue tarde María es 0,2. La probabilidad de que lleguen las dos tarde es 0,1. Calcula:

- La probabilidad de que alguna llegue tarde.
- La probabilidad de que ninguna llegue tarde.

44. Lanzamos un dado en el que la probabilidad de que salga impar es el doble de que salga par. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga cinco de 6?

223

Solucionario

Experimentos aleatorios

31. TX1 112861, página 200 ejercicio 6

32. TX1 112861, página 200 ejercicio 7

33. TX1 112861, página 200 ejercicio 8

Sucesos

34. TX1 112861, página 200 ejercicio 9

35. TX1 112861, página 200 ejercicio 10

Probabilidad

36. TX1 112861, página 200 ejercicio 11

37. TX1 112861, página 200 ejercicio 12

38. TX1 112861, página 200 ejercicio 13

39. TX1 112861, página 200 ejercicio 14

40. TX1 112861, página 201 ejercicio 15

41. TX1 112861, página 201 ejercicio 16

42. TX1 112861, página 201 ejercicio 17

43. TX1 112861, página 201 ejercicio 18

Solucionario

- 1) a) F
 b) V
 c) F
 d) V
 e) V
 f) F
 g) F

2) Respuesta c

intervalo	xi	fi
[2 - 4[3	3
[4 - 6[5	6
[6 - 8[7	7

3) $3+6+3+8+4+5+X$

7

$$35 + x = 42$$

$$X=42-35$$

$$X=7$$

Respuesta d

5) Rango = $51-11$

se suma y resta 1

al valor máximo y mínimo

$$\text{Rango} = 4$$

Respuesta d

6) no tiene preguntas

Para finalizar

- 1 Para las siguientes afirmaciones, escribe V si es verdadero o F inicial de falso según corresponda:
- La población, en estadística, es un subconjunto de la muestra.
 - El género musical preferido es una variable cualitativa.
 - El valor total de todas las frecuencias relativas es 100.
 - Cuando el número de datos es impar, la mediana se ubica en el valor central de los datos estadísticos.
 - El valor de la mediana en: 6, 5, 7, 8, 8, 9, 9 es 8.
 - La moda en: 8, 6, 7, 5, 4, 3, 4, 5, 6, 7, 4, 5, 6, 7, 6, 6, 8 es 6 y 8.
 - La mediana se identifica porque presenta la mayor frecuencia absoluta.
- 2 Considerando los siguientes datos: 8, 7, 4, 5, 3, 6, 7, 8, 5, 6, 4, 3, 2, 8, 5, 4, los valores de la media aritmética, la mediana y la moda son correspondientemente:
- 4,5 3 5,17
 - 8 6 5,17
 - 5,17 4,5 3,0
 - 5,17 3,0 4,5
- 3 Sean los valores: 9, 6, 3, 8, 4, 5. El valor que se deba aumentar a los datos para que la media aritmética sea 6, es:
- 10
 - 11
 - 2
 - 7
- 4 Se realiza un estudio para analizar el tiempo de espera, en tramitar documentos, los resultados obtenidos en minutos para 50 personas que acudieron en un día de atención, fueron:
- 12 23 22 19 34 33 32 45 33 20
 18 21 26 27 46 34 37 38 42 43
 12 23 50 19 34 33 50 48 33 20
 18 21 47 27 31 34 37 38 42 43
 35 32 45 27 52 34 37 36 23 22
- 5 Considerando los datos indicados, el valor del rango y el número de intervalos es:
- Rango = 40,8 intervalos de diez unidades.
 - Rango = 30,6 intervalos de cinco unidades.
 - Rango = 50,5 intervalos de diez unidades.
 - Rango = 40,8 intervalos de cinco unidades.
- 6 Sea la siguiente tabla de frecuencias para datos agrupados correspondientes al recorrido en kilómetros de un vehículo:

Intervalos	xi	fi	xi·fi	Fal
[10 - 35[22,5	2	45	2
[35 - 60[47,5	5	237,5	7
[60 - 85[72,5	7	507,5	14
[85 - 110[97,5	12	1170	26
[110 - 135[122,5	9	1102,5	35
		35	3062,5	

Tabla 38.

AUTOEVALUACIÓN

Reflexiona y autoevalúate en tu cuaderno:

• Trabajo personal

¿Cómo ha sido mi actitud frente al trabajo?

¿He cumplido mis tareas?

¿Qué aprendí en esta unidad?

• Trabajo en equipo

¿He compartido con mis compañeros conocimientos?

¿He respetado las opiniones de los demás?

• Escribe la opinión de tu familia.

• Pide a tu profesor sugerencias para mejorar y escríbelas.

Solucionario

1. Indica que **variables** son **cualitativas** y cuales **cuantitativas**:

Comida Favorita, Profesión que te gusta, Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada, Número de alumnos de tu Instituto, El color de los ojos de tus compañeros de clase, Coeficiente intelectual de tus compañeros de clase.

2. Los miembros de una cooperativa de viviendas tienen las siguientes edades:

42 60 60 38 60 63 21 66 56 57 51 57 44 45 35 30 35 47 53 49 50 49 38 45 28 41 47 42 53 32
54 38 40 63 48 33 35 61 47 41 55 53 27 20 21 42 21 39 39 34 45 39 28 54 33 35 43 48 48 27
53 30 29 53 38 52 54 27 27 43 28 63 41 23 58 56 59 60 40 24

Elabore una tabla de frecuencias.

Calcule la media y la desviación típica.

3. Sea una distribución estadística que viene dada por la siguiente tabla:

x_i	f_i
61	5
64	18
67	42
70	27
73	8

Calcular:

La moda, mediana y media.

El rango, desviación media, varianza y desviación típica.

4. Las alturas de los jugadores de un equipo de baloncesto vienen dadas por la tabla:

Altura	Nº de jugadores
[170, 175)	1
[175, 180)	3
[180, 185)	4
[185, 190)	8
[190, 195)	5
[195, 2.00)	2

Calcular:

La media.

La mediana.

La desviación típica.

¿Cuántos jugadores se encuentran por encima de la media más una desviación típica?

- 1** Se lanzan tres monedas y observamos qué sale.
- Construye el espacio muestral.
 - Describe los sucesos A : «salir al menos una cara», B : «obtener al menos dos cruces», C : «la primera y la última sean caras».
 - Calcula $A \cap B$, $B \cap C$, $A - C$ y $A \cap (B \cup C)$.

- 2** Consideramos el experimento aleatorio de lanzar 2 dados, uno de seis caras y otro de doce, y sumar los resultados obtenidos. Describe el espacio muestral mediante una tabla de contingencia.
- ¿Son todos los sucesos elementales equiprobables?
 - ¿Cuál es la probabilidad de obtener más de 14?

Sol.: b) 0,1389

- 3** Sean A y B sucesos con $P(\bar{A}) = \frac{3}{5}$, $P(B/A) = \frac{1}{2}$ y $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, calcula:

- $P(B)$
- $P(A \cup \bar{B})$
- $P(A/\bar{B})$

Sol.: a) 0,6; b) 0,6; c) 0,5

- 4** Con un dado trucado la probabilidad de obtener un número par es de 0,8, la probabilidad de sacar un número mayor que 3 es de 0,75, y la probabilidad de que salga el 5 es 0,2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 2?

Sol.: 0,25

- 5** Sean A y B sucesos con $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B/A) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, responde a las siguientes preguntas:

- ¿Son A y B independientes?
- ¿Son A y B excluyentes?
- Calcula $P(B)$.
- Calcula $P(A/\bar{B})$

Sol.: c) 0,333; d) 0,5

- 6** La probabilidad de que mañana llueva es 0,53, la probabilidad de que sople viento es 0,62, y la probabilidad de que ni llueva ni sople viento es 0,25.
- ¿Cuál es la probabilidad de que mañana llueva y sople viento?
 - ¿Cuál es la probabilidad de que mañana solo llueva o solo sople viento?

Sol.: a) 0,4; b) 0,35

- 7** En un colegio en el que hay 900 alumnos, el 55 % son chicos. En el recreo juegan al fútbol 100 chicos y 65 chicas, y al baloncesto 45 chicos y 60 chicas.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno elegido practique algún deporte?
- ¿Cuál es la probabilidad de que sea chico y no juegue a nada?
- Si es chico, ¿cuál es la probabilidad de que juegue al baloncesto?

	BALONCESTO	FÚTBOL	NADA
ALUMNOS			
ALUMNAS			

Sol.: a) 0,3; b) 0,3889; c) 0,0909

- 8** La probabilidad de que en un experimento de laboratorio fallen los aparatos es de 0,05; además, la probabilidad de tener un error al tomar las medidas es de 0,15. En cualquier caso, la probabilidad de que ocurra alguna de las dos cosas y que deba repetirse el experimento es de 0,18. ¿Cuál es la probabilidad de fallar al medir y, además, de que falle algún aparato?

Sol.: 0,02

- 9** Un acuario tiene un 30% de posibilidades de tener una plaga de algas y un 15% de posibilidades de falta de nitrógeno. Las probabilidades de supervivencia de los peces disco el primer mes es de 0,6, que mengua a 0,4 con plaga de algas y a 0,2 con falta de nitrógeno.

- ¿Cuál es la probabilidad de que, al introducir un pez disco, este sobreviva?
- ¿Cuál es la probabilidad de que el acuario tenga falta de nitrógeno si hay un pez disco vivo?

Sol.: a) 0,48; b) 0,0625

- 10** El número de estudiantes que vienen andando triplica al de los que vienen en bicicleta, que son el mismo número que los que vienen en coche. Además, las posibilidades de llegar tarde andando son del 20%; en bicicleta, del 15%, y en coche, del 30%.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno venga en bicicleta?
- Si elegimos un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue tarde?
- Si un alumno llega tarde, ¿con qué probabilidad ha venido en bicicleta?

Sol.: a) 0,2; b) 0,21; c) 0,1428

Solucionario

1. Cualitativas:

Comida Favorita. Profesión que te gusta. El color de los ojos de tus compañeros de clase.

Cuantitativas:

Número de goles marcados por tu equipo favorito en la última temporada. Número de alumnos de tu Instituto. Coeficiente intelectual de tus compañeros de clase.

2. SOLUCIÓN:

	fi
20 - 29	14
30 - 39	17
40 - 49	22
50 - 59	18
60 - 69	9
total	80

Cálculo de la media:

Puede calcularse directamente sumando las edades de todos los miembros de la cooperativa y dividiendo por el total que en este caso es ochenta, el resultado es una media de 43,29.

También:

	x_i	fi	$x_i n_i$
20-29	25	14	350
30-39	35	17	595
40-49	45	22	990
50-59	55	18	990
60-69	65	9	585
Total		80	3510

$$\bar{x} = \frac{3510}{80} = 43,875$$

, por tanto, podemos decir que la media es de casi 44 años.

Cálculo de la desviación típica:

Edad	x_i	n_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$
20-29	25	14	-18,875	356,2656	4987,71875
30-39	35	17	-8,875	78,7656	1339,01563
40-49	45	22	1,125	1,2656	27,84375
50-59	55	18	11,125	123,7656	2227,78125
60-69	65	9	21,125	446,2656	4016,39063

Total		80			12598,75
--------------	--	-----------	--	--	----------

$$S_x = \sqrt{\frac{12598,75}{80}} = 12,549$$

La desviación típica es de 12,5 años

3.

xi	fi	Fi	xi · fi	x - x	x - x · fi	xi ² · fi
61	5	5	305	6.45	32.25	18 605
64	18	23	1152	3.45	62.10	73 728
67	42	65	2814	0.45	18.90	188 538
71	27	92	1890	2.55	68.85	132 300
73	8	100	584	5.55	44.40	42 632
	100		6745		226.50	455 803

Moda $M_o = 67$

Mediana $100/2 = 50$ $M_e = 67$

Media

$$\bar{x} = \frac{6745}{100} = 67.45$$

Desviación media

$$D_{\bar{x}} = \frac{226.5}{100} = 2.265$$

Rango $r = 73 - 61 = 12$

Varianza

$$\sigma^2 = \frac{455803}{100} - 67.45^2 = 8.53$$

Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{8.53} = 2.92$$

4.

	x_i	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
[1.70, 1.75)	1.725	1	1	1.725	2.976
[1.75, 1.80)	1.775	3	4	5.325	9.453
[1.80, 1.85)	1.825	4	8	7.3	13.324
[1.85, 1.90)	1.875	8	16	15	28.128
[1.90, 1.95)	1.925	5	21	9.625	18.53
[1.95, 2.00)	1.975	2	23	3.95	7.802
		23		42.925	80.213

Media

$$\bar{x} = \frac{42.925}{23} = 1.866$$

Mediana

$$\frac{23}{2} = 11.5 \qquad Me = 1.85 + \frac{\frac{23}{2} - 8}{8} \cdot 0.05 = 1.872$$

Desviación típica

$$\sigma = \sqrt{\frac{80.213}{23} - 1.866^2} = 0.077$$

$$x + \sigma = 1.866 + 0.077 = 1.943$$

Este valor pertenece a un percentil que se encuentra en el penúltimo intervalo.

$$1.943 = 1.90 + \frac{\frac{23}{100} \cdot k - 16}{5} \qquad k = 88$$

$$\frac{100}{100 - 88} = \frac{23}{x} \qquad x = 3$$

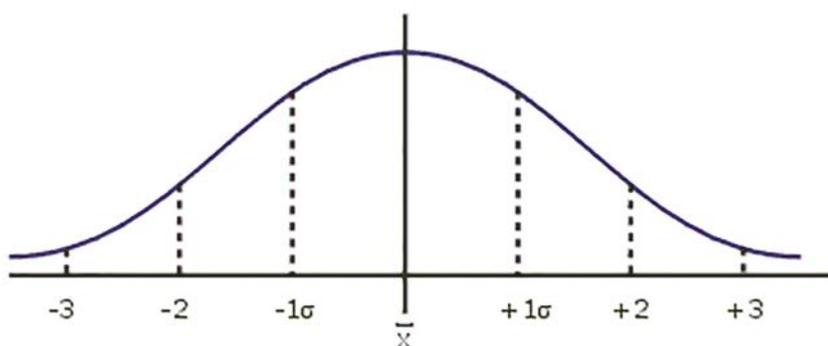
Sólo hay 3 jugadores por encima de $x + \sigma$.

AMPLIACIÓN DE CONTENIDOS

La Campana de Gauss

En cursos superiores el estudiante deberá conocer y familiarizarse con el concepto de la función gaussiana o conocida también con el nombre de Campana de Gauss, que tiene las siguientes aplicaciones:

- Los orbitales moleculares usados en química computacional son combinaciones lineales de funciones gaussianas llamados orbitales gaussianos.
- También es muy extendido su uso en Economía y Administración.
- Matemáticamente, la función gaussiana juega un papel importante en la definición de los polinomios de Hermite.
- Consecuentemente, están también asociadas con el estado de vacío en la teoría cuántica de campos.
- Los rayos gaussianos se usan en sistemas ópticos y de microondas.
- Las funciones gaussianas se utilizan como filtro de suavizado en el procesamiento digital de imágenes.



\bar{x} - Media (concentración máxima)

σ - Símbolo de la desviación estándar

<http://goo.gl/tgJpAa>

Trabajo Inclusivo

1. Los pesos de los 65 empleados de una fábrica vienen dados por la siguiente tabla:

Pesos	fi
[50, 60)	8
[60, 70)	10
[70, 80)	16
[80,90)	14
[90, 100)	10
[100, 110)	5
[110, 120)	2

Construir la tabla de frecuencias

2. Si yo tengo una canasta llena de peras y manzanas, de las cuales hay 20 peras y 10 manzanas.

¿Qué fruta es más probable que saque al azar de la canasta?

Respuesta a Trabajo Inclusivo

1.

	Xi	fi	Fi	ni	Ni
[50, 60)	55	8	8	0.12	0.12
[60, 70)	65	10	18	0.15	0.27
[70, 80)	75	16	34	0.24	0.51
[80,90)	85	14	48	0.22	0.73
[90, 100)	95	10	58	0.15	0.88
[100, 110)	105	5	63	0.08	0.96
[110, 120)	115	2	65	0.03	0.99

65

2. Para este ejemplo tenemos que 30 es el total de frutas en la canasta; es decir los casos posibles. Para calcular la probabilidad de sacar una manzana mis casos favorables son 10 puesto que existen sólo 10 manzanas. Así, aplicando la fórmula obtenemos que:

$$P(\text{Manzana}) = 10/30 = 1/3 = 33.3\% \text{ probable}$$

Calculando igual, la probabilidad de sacar pera es:

$$P(\text{Pera}) = 20/30 = 2/3 = 66.7\% \text{ probable}$$

Como 66.7 es mayor que 33.3 es más probable que saque una pera, pues hay más peras que manzanas en la canasta.

Solucionario

Redes bayesianas

- Las variables son el tipo de accidente, la edad del conductor, los factores atmosféricos, el sexo del conductor, la iluminación, el número de heridos y el número de personas involucradas en el accidente. Se basa en el teorema de Bayes.
- Actualmente, hay múltiples campos que utilizan las redes bayesianas, como la inteligencia artificial, la toma de decisiones, la meteorología, el reconocimiento facial, el estudio de infecciones, etc.

¿La intuición entiende de probabilidades?

- Probablemente elegirá el número 00005 por su particularidad, pero los dos números son igual de probables. A priori, no hay números más probables que otros, de modo que atribuir más probabilidad de éxito a uno u otro no tiene sentido.

El nacimiento de la estadística aplicada

- Respuesta sugerida:

A Galton se le puede considerar como el «padre» de la psicología diferencial, al aplicar los principios de su primo, Darwin, al estudio de las diferencias individuales.

Descubrió también que, con la edad, el oído humano pierde la percepción de las ondas de alta frecuencia (tonos agudos).

En lo que más afecta a la psicología, acuñó el concepto estadístico de correlación como una forma de determinar matemáticamente la relación entre dos variables (el procedimiento matemático fue refinado más tarde por su discípulo Karl Pearson).

Redes bayesianas

En el año 2011, investigadores de la Universidad de Granada determinaron hasta 18 variables que pueden intervenir en un accidente mortal de tráfico, y solo con 7 de ellas ya es posible construir modelos probabilísticos basados en las **redes bayesianas**.

Entra en la red y accede a <http://ines.educ.es/mmyeqa>, donde podrás encontrar más información al respecto. ¿Cuáles son estas 7 variables fundamentales? ¿En qué teorema probabilístico se basan? Busca información sobre otros ámbitos (científicos, técnicos, sociales...) en los que se pueden realizar modelos probabilísticos basados en las redes bayesianas. ¿Qué utilidad pueden tener dichos modelos?

¿LA INTUICIÓN ENTIENDE DE PROBABILIDADES?

- En una administración de lotería, a una persona se le dan a escoger entre el número 00 105 y el 48 679. ¿Qué número crees que escogerá? ¿Cuál es el razonamiento para elegir un número u otro? ¿Es un razonamiento matemático?
- Si a esta misma persona le dicen que en el último sorteo el primer premio fue para el número 48 679, ¿qué número crees que escogerá?
- ¿Cuál será su razonamiento? ¿Es un razonamiento matemático?
- En una clase de 30 estudiantes, están discutiendo la probabilidad de que, como mínimo, dos de ellos hayan nacido el mismo día. ¿A qué conclusión crees que llegarán? ¿Cuál es su razonamiento? ¿Es un razonamiento matemático?

El nacimiento de la estadística aplicada

Esta frase es del matemático y pensador británico Karl Pearson (1857-1936) que, entre otros aspectos, estableció las bases de la estadística matemática del siglo XX, llegando a definir los conceptos de desviación típica, correlación y análisis de la regresión.

Entra en Internet y averigua qué relación guardaba Pearson con otro científico británico y primo de Charles Darwin, Francis Galton (1822-1911), en cuanto al concepto de correlación que ambos trabajaban.

Se sabe que el valor del coeficiente de correlación de Pearson está comprendido entre -1 y 1, y que existe una escala graduada que interpreta diferentes intervalos de valores de este coeficiente. Busca en Internet información sobre esta escala y qué significado otorga a cada grupo de valores.

Ingeniero estadístico

Si ya fuera ingeniero estadístico, mediante técnicas estadísticas y la complementación de herramientas computacionales, analizaría los datos del censo poblacional, determinando las medidas estadísticas de las variables consideradas en el censo, para luego entregar resultados como:

- Ocho de cada diez personas tiene casa propia.
- Cuatro de cada diez familias disponen del servicio de Internet.
- Cada familia ecuatoriana tiene en promedio 2 hijos.

225